BERKELEY
LIBRARY
UNIVERSITY OF
CALIFORNIA

MATH/STAT

MATHESIA

LEÇONS

SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE

DES SURFACES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
114190 Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS DE GÉOMÉTRIE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

LEÇONS

SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE

DES SURFACES

ET LES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL

PAR

GASTON DARBOUX

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DOYEN HONORAIRE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
MEMBRE DU BUREAU DES LONGITUDES

PREMIÈRE PARTIE.

GÉNÉRALITÉS. COORDONNÉES CURVILIGNES.
SURFACES MINIMA.

NOUVEAU TIRAGE.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1941

Math. ope.

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

QA641
D3
1914
v.1
Math.
Dept.

PRÉFACE

DE LA PREMIÈRE ÉDITION

L'Ouvrage dont je publie aujourd'hui la première Partie est le résumé des Leçons que j'ai faites à la Sorbonne pendant les hivers de 1882 à 1885. J'avais commencé l'exposition de la *Théorie des surfaces* dans le but unique d'y trouver des applications nouvelles de la théorie, si vaste et si peu connue, des équations aux dérivées partielles. Je comptais consacrer une année à peine à cet enseignement; mais l'intérêt du sujet, et aussi les demandes de mes auditeurs, m'ont entraîné bien au delà des limites que j'avais primitivement fixées.

Ce premier Volume comprend trois parties distinctes. Le premier Livre traite des *Applications à la Géométrie de la théorie des mouvements relatifs;* j'aurai à revenir sur les propositions qui y sont exposées, dans la partie où seront étudiées plus tard, avec tous les détails nécessaires, les belles formules de M. Codazzi. Le second Livre contient l'étude des *différents systèmes de coordonnées curvilignes.* J'y considère successivement les systèmes à lignes conjuguées, dont l'étude a été trop négligée, les lignes asymptotiques, les lignes de courbure, les systèmes orthogonaux et isothermes.

Le Volume se termine par la *Théorie des surfaces minima*, où j'ai mis à profit les travaux si remarquables publiés par d'éminents géomètres dans ces dernières années. Elle forme à peu près

M745193

la moitié de ce Volume ; sauf les trois derniers Chapitres, qui ont été rédigés au moment de l'impression, elle a été enseignée à deux reprises différentes, en 1882 et 1885. Une ou deux questions importantes y ont été omises; elles seront mieux à leur place dans la suite, quand j'aurai donné les propositions générales auxquelles on peut les rattacher.

Suivant son habitude constante, M. Gauthier-Villars, après avoir accueilli cet Ouvrage, a apporté tous ses soins à l'impression ; qu'il reçoive ici mes plus vifs remercîments; je dois aussi les adresser à mes auditeurs, qui ont désiré voir ces Leçons publiées, et, plus particulièrement, à un de nos jeunes géomètres, M. G. Kœnigs, Maître de Conférences à l'École Normale, qui a bien voulu m'aider dans la revision des épreuves.

14 juin 1887.

PRÉFACE

DE LA DEUXIÈME ÉDITION

Le premier Volume de mes *Leçons sur la théorie générale des surfaces et sur les applications géométriques du Calcul infinitésimal* était, depuis quelque temps, épuisé. Mon excellent éditeur, M. Gauthier-Villars, a bien voulu me demander d'en publier une nouvelle édition. C'est cette nouvelle édition, augmentée de divers Chapitres relatifs au déplacement, au conoïde de Plücker, aux surfaces de translation, etc., que je soumets aujourd'hui au public géomètre. L'accueil si bienveillant qu'il avait fait à la première édition m'imposait le devoir d'apporter tous mes soins à la seconde. Dans cette tâche, que je me suis efforcé de remplir, j'ai été beaucoup aidé par deux collaborateurs : M. Ernest Lebon, professeur honoraire, et M. Claude Guichard, mon collègue de la Sorbonne, dont on connaît les beaux travaux sur la Géométrie infinitésimale. A eux, ainsi qu'à M. Gauthier-Villars, on me permettra d'adresser ici mes bien vifs remercîments.

7 octobre 1913.

THÉORIE GÉNÉRALE
DES SURFACES.

PREMIÈRE PARTIE.

LIVRE I.

APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE DE LA THÉORIE DES MOUVEMENTS RELATIFS.

CHAPITRE I.

DU DÉPLACEMENT A UN PARAMÈTRE; APPLICATION A LA THÉORIE DES COURBES GAUCHES.

Déplacement d'un système invariable ayant un point fixe. — La vitesse absolue d'un point rapporté au système invariable est la résultante de sa vitesse relative et de sa vitesse d'entraînement. — On donne d'abord les formules qui permettent de définir un déplacement fini, c'est-à-dire le passage d'un système fixe d'axes rectangulaires à un système mobile de même nature, et l'on rappelle les expressions des neuf cosinus en fonction des angles d'Euler. — On donne également les expressions des mêmes cosinus en fonction des quantités λ, μ, ν, ρ qui font connaître simplement la rotation finie par laquelle on réalise le passage des axes fixes aux axes mobiles. — Définition des paramètres quaternioniens.

On définit le mouvement du trièdre mobile par les composantes p, q, r de la rotation instantanée, relatives aux axes de ce trièdre. — Expressions des dérivées des neuf cosinus. — Solution d'un problème fondamental : déterminer le mouvement quand on se donne les composantes p, q, r en fonction du temps. — La solution est unique et exige l'intégration d'un système linéaire à trois inconnues.

Cas où le système mobile n'a plus de point fixe. — Il faut joindre à p, q, r les trois composantes par rapport aux axes mobiles de la vitesse de l'origine de ces axes. — Ici encore il y a un seul mouvement correspondant à des valeurs données de ξ, η, ζ, p, q, r. — Composantes de la vitesse absolue d'un point

rapporté aux axes mobiles. — Détermination de l'axe du mouvement hélicoïdal instantané. Cas où ce mouvement se réduit à une rotation. — Réduction du mouvement instantané à deux rotations. — Droites conjuguées.

Application de la théorie précédente à l'étude des courbes gauches. — Les propriétés de ces courbes se déduisent de l'étude du mouvement d'un trièdre formé par la tangente à la courbe, la normale principale et la binormale. — Propriétés caractéristiques de ce déplacement : Les translations η, ζ et la rotation q sont nulles. Les deux composantes p et r représentent respectivement la torsion et la courbure de la courbe. — Distinction essentielle entre la courbure et la torsion. — Calcul de divers infiniment petits. — Théorie des développées. — Enveloppe du plan rectifiant. — Toute courbe pour laquelle le rapport de la courbure à la torsion est constant est une hélice tracée sur un cylindre quelconque. Ce cylindre est circulaire droit si la courbure et la torsion sont constantes. — Étude des courbes, dites de Bertrand, pour lesquelles les normales principales sont normales principales d'une autre courbe. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, en général, qu'il y ait une seule relation entre la courbure et la torsion. — Relations entre les deux courbes qui ont mêmes normales principales. — Propriétés relatives à certaines droites conjuguées.

---

1. Considérons un corps solide ou système invariable, mobile autour d'un point fixe. On sait qu'à un instant quelconque les vitesses des différents points du système sont les mêmes que s'il tournait autour d'une droite passant par le point fixe, droite qui a reçu le nom d'*axe instantané de rotation*. On démontre en Mécanique que les rotations peuvent être représentées géométriquement par des droites, comme les forces, et composées ou décomposées suivant la même loi, c'est-à-dire que, si l'on compose ou si l'on décompose les rotations comme les forces, la vitesse imprimée par la rotation résultante à un point quelconque est la résultante des vitesses qui seraient communiquées au même point par chacune des rotations composantes, existant isolément. On sait aussi que, si l'on considère un point mobile par rapport au système invariable, la vitesse absolue de ce point est la résultante de sa vitesse relative et de sa vitesse d'*entraînement*. On désigne sous ce nom la vitesse qu'aurait un point qui, à l'instant considéré, coïnciderait avec le point mobile, mais demeurerait invariablement lié au système solide.

Il résulte de ces propositions qu'on pourra construire, à un instant quelconque, les vitesses de tous les points du système invariable dès qu'on aura, en grandeur et en direction, la rotation à cet instant. Il semblerait naturel de déterminer à chaque instant

cette rotation par ses composantes relatives à trois axes rectangulaires, fixes dans l'espace et ayant pour origine le point fixe du système solide. En réalité, les éléments les plus importants, les seuls qui permettent le plus souvent une étude approfondie du mouvement, ce sont les composantes de la rotation relativement à des axes mobiles, entraînés dans le mouvement du système invariable. Rappelons rapidement la méthode employée en Mécanique.

Soient OX, OY, OZ trois axes fixes passant par le point fixe O du système et Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires invariablement liés au système mobile. Nous supposerons que les deux systèmes d'axes aient la même disposition, c'est-à-dire qu'ils puissent être amenés à coïncider. De plus, nous supposerons que les sens des axes aient été choisis de telle manière que la rotation autour de OZ, qui déplacerait OX du côté de OY, soit représentée par une droite dirigée suivant la partie positive de OZ. Nous déterminerons les axes mobiles par les cosinus des angles qu'ils forment avec les axes fixes. Pour cela nous écrirons le Tableau

	x	y	z
X	a	b	c
Y	a'	b'	c'
Z	a''	b''	c''

qui fait connaître les cosinus des angles formés par chacun des axes fixes avec les axes mobiles.

On a les relations

$$(1)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, & aa' + bb' + cc' = 0, \\ a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & ab + a'b' + a''c'' = 0, \\ a = b'c'' - c'b'', & \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 1, \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre toutes celles qu'on obtiendrait par des permutations circulaires effectuées, soit sur les lettres, soit sur les indices. Rappelons encore que les neuf cosinus peuvent être

exprimés par les trois angles d'Euler, au moyen des formules [1]

$$(2)\quad \begin{cases} a = \cos\theta \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi, \\ b = \cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi, \\ c = \sin\theta \sin\psi, \\ a' = \cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi, \\ b' = \cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi, \\ c' = \sin\theta \cos\psi, \\ a'' = -\sin\theta \sin\varphi, \\ b'' = -\sin\theta \cos\varphi, \\ c'' = \cos\theta. \end{cases}$$

Un autre système de formules, également dû à Euler, doit être rappelé ici. On sait que les axes fixes peuvent être ramenés à coïncider avec les axes mobiles par une rotation d'angle fini autour d'une droite passant par le point O. Si l'on désigne par θ l'angle de cette rotation, par α, β, γ les angles de son axe avec les axes fixes (et aussi avec les axes mobiles) et si l'on pose

$$(3)\quad \frac{\lambda}{\rho} = \cos\alpha \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{\mu}{\rho} = \cos\beta \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{\nu}{\rho} = \cos\gamma \operatorname{tang}\frac{\theta}{2},$$

les formules qui permettent de passer des axes fixes aux axes mobiles seront

$$(4)\quad \begin{cases} BX = (\rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)x + 2(\lambda\mu + \nu\rho)y + 2(\lambda\nu - \mu\rho)z, \\ BY = 2(\lambda\mu - \nu\rho)x + (\rho^2 + \mu^2 - \lambda^2 - \nu^2)y + 2(\mu\nu + \lambda\rho)z, \\ BZ = 2(\lambda\nu + \mu\rho)x + 2(\mu\nu - \lambda\rho)y + (\rho^2 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2)z, \end{cases}$$

B désignant, pour abréger, la somme

$$(5)\qquad B = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2.$$

---

[1] Dans ces formules, ψ désigne l'angle de OX avec l'intersection commune ON des deux plans des xy et des XY, φ désigne l'angle de Ox avec la même droite ON; enfin θ est l'angle de Oz et OZ. L'angle φ mesure la grandeur de la rotation qu'il faut imprimer à ON dans le plan des xy, et dans le sens direct, pour faire coïncider ON avec Ox; on peut supposer qu'il varie de 0° à 180°. De même, ψ mesure la rotation que l'on doit imprimer à ON dans le plan des XY, toujours dans le sens direct, pour amener cette droite à coïncider avec OX : cet angle varie de 0° à 360°.

De là résultent les valeurs suivantes des neuf cosinus :

$$(6)\quad \begin{cases} Ba = \rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2, & Bb = 2\lambda\mu + 2\nu\rho, & Bc = 2\lambda\nu - 2\mu\rho, \\ Ba' = 2\lambda\mu - 2\nu\rho, & Bb' = \rho^2 + \mu^2 - \lambda^2 - \nu^2, & Bc' = 2\mu\nu + 2\lambda\rho, \\ Ba'' = 2\lambda\nu + 2\mu\rho, & Bb'' = 2\mu\nu - 2\lambda\rho, & Bc'' = \rho^2 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2 \end{cases}$$

qui sont cette fois des fonctions algébriques des trois arbitraires [1].

Les valeurs des cosinus ne dépendent que des rapports mutuels de λ, μ, ν, ρ. Comme B n'est pas nul, il y aura souvent avantage à le prendre égal à 1. Si l'on suppose

$$(7)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1,$$

les formules (3) nous donneront les valeurs suivantes :

$$(8)\quad \lambda = \cos\alpha \sin\frac{\theta}{2}, \qquad \mu = \cos\beta \sin\frac{\theta}{2}, \qquad \nu = \cos\gamma \sin\frac{\theta}{2}, \qquad \rho = \cos\frac{\theta}{2},$$

de λ, μ, ν, ρ. Nous dirons que ces valeurs sont les *paramètres quaternioniens* du déplacement. Il est clair qu'elles le déterminent complètement.

Remarquons qu'on peut changer simultanément tous les signes des paramètres quaternoniens. Cela revient à remplacer θ par $\theta + 2\pi$.

Désignons maintenant par p, q, r les composantes de la rotation à l'instant t par rapport aux axes mobiles. Considérons un point dont les coordonnées soient x, y, z, relativement aux axes mobiles, et cherchons les composantes de sa vitesse *absolue* par rapport aux mêmes axes. En écrivant que cette vitesse absolue est la résultante de la vitesse relative et de celles qui seraient dues aux trois rotations p, q, r, on obtiendra les expressions suivantes de ces composantes :

$$(9)\qquad \begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} + qz - ry, \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} + rx - pz, \\ V_z = \dfrac{dz}{dt} + py - qx, \end{cases}$$

dont nous aurons souvent à faire usage.

---

[1] Pour la démonstration de ces formules, on pourra consulter soit les *Leçons de Cinématique théorique* de M. G. Kœnigs, p. 344, soit la Note V de la 4e Partie de cet Ouvrage, 1re édition.

Nous allons montrer, dès à présent, comment on peut en déduire les expressions de p, q, r en fonction des neuf cosinus et de leurs dérivées par rapport au temps. Pour cela, considérons le point pris sur l'axe OX à la distance 1. Ce point a pour coordonnées relatives (c'est-à-dire relativement aux axes mobiles) a, b, c. En exprimant que sa vitesse est nulle et en appliquant les formules (9), nous obtiendrons les équations fondamentales

$$(10)\qquad \frac{da}{dt} = br - cq, \qquad \frac{db}{dt} = cp - ar, \qquad \frac{dc}{dt} = aq - bp,$$

auxquelles on peut joindre les suivantes :

$$(10')\qquad \frac{da'}{dt} = b'r - c'q, \qquad \frac{db'}{dt} = c'p - a'r, \qquad \frac{dc'}{dt} = a'q - b'p;$$

$$(10'')\qquad \frac{da''}{dt} = b''r - c''q, \qquad \frac{db''}{dt} = c''p - a''r, \qquad \frac{dc''}{dt} = a''q - b''p,$$

qu'on démontrera de la même manière.

On déduit de là les formules

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} p\,dt &= \Sigma c\,db = -\Sigma b\,dc,\\ q\,dt &= \Sigma a\,dc = -\Sigma c\,da,\\ r\,dt &= \Sigma b\,da = -\Sigma a\,db,\end{aligned}\right.$$

qui donnent les valeurs cherchées des rotations. Si l'on remplace les cosinus par leurs expressions en fonction des angles d'Euler, on aura le système

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \sin\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi\frac{d\theta}{dt},\\ q &= \cos\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi\frac{d\theta}{dt},\\ r &= \frac{d\varphi}{dt} - \cos\theta\frac{d\psi}{dt},\end{aligned}\right.$$

qu'il serait aisé de démontrer géométriquement. En résolvant par rapport aux dérivées des angles, on trouve

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= q\sin\varphi - p\cos\varphi,\\ \sin\theta\frac{d\psi}{dt} &= q\cos\varphi + p\sin\varphi,\\ \frac{d\varphi}{dt} &= r + \cos\theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi).\end{aligned}\right.$$

Si, au lieu d'employer les premières formules d'Euler, on utilisait les secondes avec les arbitraires λ, μ, ν, ρ, on trouverait de même

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathrm{B}p &= \nu\frac{d\mu}{dt} - \mu\frac{d\nu}{dt} + \lambda\frac{d\rho}{dt} - \rho\frac{d\lambda}{dt},\\ \frac{1}{2}\mathrm{B}q &= \lambda\frac{d\nu}{dt} - \nu\frac{d\lambda}{dt} + \mu\frac{d\rho}{dt} - \rho\frac{d\mu}{dt},\\ \frac{1}{2}\mathrm{B}r &= \mu\frac{d\lambda}{dt} - \lambda\frac{d\rho}{dt} + \nu\frac{d\rho}{dt} - \rho\frac{d\nu}{dt}. \end{aligned}\right.$$

On pourrait faire dans ces formules $\rho = 1$; mais il vaut mieux conserver l'homogénéité, ce qui permet de considérer les rotations de 180°, pour lesquelles on a $\rho = 0$.

En introduisant la dérivée de B, on peut résoudre ces équations par rapport aux dérivées de λ, μ, ν. ρ, ce qui donne

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} 2\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{d\log\mathrm{B}}{dt}\lambda + r\mu - q\nu - p\rho,\\ 2\frac{d\mu}{dt} &= -r\lambda + \frac{d\log\mathrm{B}}{dt}\mu + p\nu - q\rho,\\ 2\frac{d\nu}{dt} &= q\lambda - p\mu + \frac{d\log\mathrm{B}}{dt}\nu - r\rho,\\ 2\frac{d\rho}{dt} &= p\lambda + q\mu + r\nu + \frac{d\log\mathrm{B}}{dt}\rho. \end{aligned}\right.$$

Si les paramètres sont ceux que nous avons appelés *quaternioniens* et pour lesquels on a $\mathrm{B} = 1$, le terme $\frac{d\log\mathrm{B}}{dt}$ devient nul, et les formules se simplifient.

2. Tout cela étant rappelé, nous allons étudier la question suivante, qui est fondamentale dans notre théorie : *On donne p, q, r, en fonction du temps t, et l'on propose de déterminer complètement le mouvement.*

Il est clair que la question sera résolue si l'on a les expressions des neuf cosinus en fonction du temps. Or, il résulte immédiatement des formules (10) que, si l'on sépare les cosinus en trois groupes, formés respectivement de a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', les trois cosinus de chaque groupe sont des solutions simultanées

du système

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q, \\ \dfrac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r, \\ \dfrac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p. \end{cases}$$

Toute la difficulté se réduit donc à l'intégration de ce système. L'étude détaillée de cette intégration fera l'objet du Chapitre suivant. Pour le moment, nous nous contenterons de signaler les propriétés du système.

D'abord, par suite de sa forme linéaire, il admettra toujours une solution et une seule, pour laquelle les valeurs initiales de α, β, γ seront données.

En second lieu, si α, β, γ; α', β', γ' désignent deux systèmes de solutions quelconques, les expressions

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma', \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$$

seront des constantes. On le reconnaît aisément en les différentiant et tenant compte des équations (16).

Ces propriétés vont nous permettre d'établir qu'il y a toujours, quelles que soient les expressions de p, q, r en fonction du temps, une infinité de mouvements dans lesquels ces trois quantités sont les composantes de la rotation relativement aux axes mobiles.

Considérons en effet un trièdre trirectangle (T_0), de même sens que le trièdre OXYZ, formé par les axes fixes et soient a_0, b_0, c_0, ... les cosinus directeurs de OX, OY, OZ par rapport aux axes de (T_0). Déterminons les trois systèmes de solutions des équations (16), a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', qui correspondent respectivement aux valeurs initiales suivantes : a_0, b_0, c_0; a'_0, b'_0, c'_0; a''_0, b''_0, c''_0.

Les fonctions, telles que

$$a^2 + b^2 + c^2, \quad aa' + bb' + cc', \quad \ldots,$$

ayant pour valeur initiale 1 ou 0, et devant rester constantes d'après les propriétés du système (16), ne cesseront pas de conserver leurs valeurs initiales; par conséquent, les neuf quantités

a, a', a'', ... seront à chaque instant les cosinus directeurs de trois droites rectangulaires formant un trièdre mobile (T) dont la position initiale sera (T_0). Comme cette position initiale peut être choisie à volonté, on voit qu'il existe une infinité de mouvements pour lesquels p, q, r sont des fonctions données du temps.

Tous ces mouvements, qui dépendent de trois constantes arbitraires, se réduisent au fond à un seul, mais qui serait rapporté à des axes fixes différents.

En effet, considérons, dans l'un quelconque d'entre eux, la position occupée par le trièdre mobile à l'instant initial, et choisissons-la pour le système d'axes fixes auquel nous rapporterons le mouvement du système mobile. Les valeurs initiales des neuf cosinus sont alors 1 ou 0; la solution qui correspond à ces valeurs numériques ne contient aucune constante arbitraire et est bien déterminée.

Il résulte de ce qui précède que, lorsqu'on aura obtenu une solution quelconque du problème, c'est-à-dire un système de valeurs des neufs cosinus, il suffira, si l'on veut avoir la solution la plus générale, de changer d'axes fixes, ce qui introduira trois constantes; puis de supposer que les nouvelles formules se rapportent aux anciens axes.

3. Nous allons maintenant étudier le cas où le système mobile n'a plus de point fixe. Alors il faut joindre aux composantes p, q, r celles de la vitesse de l'origine O des axes mobiles, prises toujours relativement aux axes mobiles Ox, Oy, Oz. Désignons-les par ξ, η, ζ; jointes aux trois rotations, elles interviennent dans toutes les questions relatives à l'étude du mouvement. Supposons que l'on connaisse les expressions de ces six quantités en fonction du temps, et cherchons comment on déterminera le mouvement du trièdre mobile. Désignons par (T) ce trièdre mobile, et soit (T′) le trièdre dont l'origine est un point fixe quelconque et dont les axes sont parallèles à ceux de (T). A un instant quelconque, les deux trièdres sont animés de la même rotation et, par conséquent, les neuf cosinus se détermineront au moyen de p, q, r comme dans le cas précédent; d'ailleurs, si X_0, Y_0, Z_0 désignent les coordonnées de l'origine mobile O par rapport aux axes fixes, on a évidemment, en projetant la vitesse de cette origine sur les

axes fixes,

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{dX_0}{dt} = a\xi + b\eta + c\zeta, \\ \dfrac{dY_0}{dt} = a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ \dfrac{dZ_0}{dt} = a''\xi + b''\eta + c''\zeta. \end{cases}$$

Quand on aura déterminé les cosinus, ces formules feront connaître X_0, Y_0, Z_0 par de simples quadratures, qui introduiront trois constantes nouvelles.

Ici encore, tous les mouvements possibles correspondant aux différentes valeurs des six constantes arbitraires, se réduisent à un seul et même mouvement, observé par rapport à des axes différents; car l'intégration n'introduit aucune constante arbitraire et ne donne qu'un seul mouvement, si l'on suppose que les axes fixes coïncident avec la position initiale des axes mobiles.

Je rappellerai, relativement au cas que nous venons de considérer, que, si x, y, z sont les coordonnées d'un point relativement aux axes mobiles, la vitesse absolue de ce point aura pour composantes, relatives aux mêmes axes, les trois quantités

$$(18)\quad \begin{cases} V_x = \xi + qz - ry + \dfrac{dx}{dt}, \\ V_y = \eta + rx - pz + \dfrac{dy}{dt}, \\ V_z = \zeta + py - qx + \dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Considérons, par exemple, les points invariablement liés au système mobile et cherchons ceux pour lesquels la vitesse est minimum. Il faudra déterminer les valeurs de x, y, z rendant minimum la somme

$$(\xi + qz - ry)^2 + (\eta + rx - pz)^2 + (\zeta + py - qx)^2.$$

En égalant à zéro les dérivées par rapport à x, à y et à z, on obtient trois équations qui se réduisent aux deux suivantes :

$$(19)\quad \frac{\xi + qz - ry}{p} = \frac{\eta + rx - pz}{q} = \frac{\zeta + py - qx}{r}.$$

Ces deux équations représentent une droite, l'axe central du

mouvement à l'instant considéré. On trouve facilement, pour la valeur commune des rapports précédents,

$$\frac{\xi p + \eta q + \zeta r}{p^2 + q^2 + r^2},$$

ce qui donne, pour la valeur minimum de la vitesse,

$$\frac{\xi p + \eta q + \zeta r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement du système se réduise à une simple rotation est donc la suivante :

$$\xi p + \eta q + \zeta r = 0, \tag{20}$$

et, dans ce cas, l'axe de rotation est représenté par les trois équations

$$\left\{\begin{aligned} &\xi + qz - ry = 0,\\ &\eta + rx - pz = 0,\\ &\zeta + py - qx = 0,\end{aligned}\right. \tag{21}$$

qui caractérisent en effet les points dont la vitesse est nulle, comme le montrent les formules (18).

D'après ces remarques, il est aisé de trouver les formules qui décomposent le mouvement en deux rotations infiniment petites.

Ce mouvement, en effet, résulte de la composition de celui qui correspond aux valeurs, choisies arbitrairement, des rotations et des translations,

$$\begin{matrix} \xi', & \eta', & \zeta', \\ p', & q', & r', \end{matrix}$$

et du mouvement qui correspond aux valeurs

$$\begin{matrix} \xi - \xi', & \eta - \eta', & \zeta - \zeta', \\ p - p', & q - q', & r - r', \end{matrix}$$

des mêmes éléments. Pour que les deux mouvements composants se réduisent à des rotations, il faut et il suffit que l'on ait à la fois

$$\left\{\begin{aligned} &p'\xi' + q'\eta' + r'\zeta' = 0,\\ &(\xi - \xi')(p - p') + (\eta - \eta')(q - q') + (\zeta - \zeta')(r - r') = 0,\end{aligned}\right. \tag{22}$$

en sorte que les axes des deux rotations conjuguées sont définis

respectivement par les équations

$$(23)\qquad \begin{cases} \xi' + q'z - r'y = 0, \\ \eta' + r'x - p'z = 0, \\ \zeta' + p'y - q'x = 0, \end{cases}$$

$$(13')\qquad \begin{cases} \xi - \xi' + (q - q')z - (r - r')y = 0, \\ \eta - \eta' + (r - r')x - (p - p')z = 0, \\ \zeta - \zeta' + (p - q')y - (q - q')x = 0. \end{cases}$$

Si l'on prend les équations d'une droite quelconque sous la forme Pluckérienne

$$(24)\qquad \begin{cases} a' + bz - cy = 0, \\ b' + cx - az = 0, \\ c' + ay - bx = 0, \end{cases}$$

avec la condition nécessaire

$$(25)\qquad aa' + bb' + cc' = 0,$$

on voit que, pour qu'il soit possible de la choisir pour axe d'une des deux rotations conjuguées, il faut qu'on puisse prendre

$$(26)\qquad \begin{cases} \xi' = \lambda a', \quad \eta' = \lambda b', \quad \zeta' = \lambda c', \\ p' = \lambda a, \quad q' = \lambda b, \quad r' = \lambda c, \end{cases}$$

λ étant une arbitraire à déterminer. La première équation (12) étant vérifiée d'elle-même, la seconde nous donnera

$$(27)\qquad p\xi + q\eta + r\zeta - \lambda(a'p + b'q + c'r + a\xi + b\eta + c\zeta) = 0,$$

équation qui déterminera une valeur de λ, à moins qu'on n'ait

$$(28)\qquad a'p + b'q + c'r + a\xi + b\eta + c\zeta = 0.$$

Cette relation caractérise les droites qui sont perpendiculaires au déplacement d'un de leurs points et, par conséquent, de tous leurs points. Nous retrouvons donc ce résultat connu que toute droite peut être choisie pour axe d'une des deux rotations conjuguées en lesquelles on peut décomposer le déplacement, à moins qu'elle n'appartienne au complexe des droites qui sont perpendiculaires aux déplacements de tous leurs points.

Ce complexe est défini par l'équation (28), on sait d'ailleurs

qu'il comprend toutes les droites qui rencontrent deux axes conjugués de rotation.

4. Pour indiquer, dès à présent, une application des propositions précédentes, considérons une courbe gauche quelconque et étudions le mouvement du trièdre (T) formé par la tangente, que nous prendrons pour axe des x; par la normale principale, que nous prendrons pour axe des y, et par la binormale, qui sera l'axe des z.

Prenons l'arc s comme variable indépendante ou, ce qui est la même chose, supposons

$$\frac{ds}{dt} = 1.$$

On a ici

$$\xi = 1, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$

et, si x, y, z désignent les coordonnées par rapport à des axes fixes du point de la courbe qui est le sommet du trièdre,

$$(29) \qquad a = \frac{dx}{ds}, \qquad a' = \frac{dy}{ds}, \qquad a'' = \frac{dz}{ds}.$$

Les formules générales (10) nous donnent

$$(30) \quad da = (br - cq)\,ds, \qquad db\,(cp - ar)\,ds, \qquad dc = (aq - bp)\,ds.$$

Exprimons que la binormale, dont les cosinus directeurs sont c, c', c'', est perpendiculaire au plan osculateur, c'est-à-dire aux deux droites dont les cosinus directeurs sont respectivement a, a', a'' et $a + da$, $a' + da'$, $a'' + da''$. L'une des équations sera vérifiée d'elle-même; l'autre nous donnera la condition

$$\mathrm{S}\,c\,da = -q\,ds = 0.$$

Ainsi la composante q doit être nulle et les formules (30) se réduisent aux suivantes :

$$(31) \qquad \frac{da}{ds} = br, \qquad \frac{db}{ds} = cp - ar, \qquad \frac{dc}{ds} = -bp,$$

où l'on peut remplacer a, b, c, par a', b', c', a'', b'', c''. Il reste à obtenir la signification géométrique de p et de r.

Menons, par un point fixe quelconque, des parallèles aux axes du

trièdre (T). Elles forment un trièdre (T_1), dont les translations sont nulles et dont les rotations sont évidemment les mêmes que celles du trièdre (T). Un point situé à la distance 1 sur l'axe des x du trièdre (T_1) aura une vitesse dont les composantes seront, d'après les formules (9),

$$0, \quad r, \quad 0,$$

et, par conséquent, lorsque s augmentera de ds, ce point décrira le chemin $r\,ds$. En d'autres termes, la tangente à la courbe tournera de l'angle $r\,ds$, quand son point de contact décrira l'élément d'arc ds. Par suite, la composante r sera égale à la première courbure $\frac{1}{\rho}$ de la courbe. Nous poserons donc

$$r = \frac{1}{\rho}. \tag{32}$$

Prenons de même un point situé à la distance 1 sur l'axe des z du trièdre (T_1), les composantes de sa vitesse seront

$$0, \quad -p, \quad 0,$$

et, par conséquent, le plan osculateur tournera de l'angle $p\,ds$ quand le point de la courbe décrira l'arc ds. En d'autres termes, p sera la torsion de la courbe. Ainsi nous pourrons poser

$$p = \frac{1}{\tau}. \tag{33}$$

Les formules (31) deviendront alors

$$\frac{da}{ds} = \frac{b}{\rho}, \qquad \frac{db}{ds} = \frac{c}{\tau} - \frac{a}{\rho}, \qquad \frac{dc}{ds} = -\frac{b}{\tau}. \tag{34}$$

On reconnaît, avec un très léger changement de signe sur lequel nous allons revenir, les formules qui portent le nom de Serret-Frenet, et qui jouent un rôle si important dans la théorie des courbes gauches.

5 La méthode qui nous a permis de les établir met en évidence quelques propositions dont on fait un usage continuel dans les démonstrations géométriques.

Étant donnée la courbe gauche (C), si l'on mène par l'origine une

droite de longueur égale à 1 parallèle à la tangente, l'extrémité de cette parallèle décrira une courbe sphérique (C_1), que M. Paul Serret a considérée le premier et qu'il a appelée l'*indicatrice sphérique* de la courbe proposée. Il résulte de ce qui précède que la tangente à l'indicatrice sphérique est parallèle à la normale principale de (C); car le point qui décrit l'indicatrice sphérique est celui qui est situé à la distance 1 sur l'axe des x du trièdre (T), et nous avons vu que la vitesse de ce point, égale à $\frac{1}{\rho}$, est parallèle à la normale principale.

De même si, par l'origine, nous menons une droite de longueur 1 parallèle à la binormale, l'extrémité de cette droite sera le point situé à la distance 1 sur l'axe des z du trièdre (T_1), ce point aura une vitesse qui sera égale à $-\frac{1}{\tau}$ et sera encore parallèle à la normale principale. Il décrit une courbe sphérique (C_2), à laquelle nous donnerons le nom d'*indicatrice sphérique des binormales*, réservant le nom d'*indicatrice des tangentes* à la courbe (C_1). On obtiendra l'indicatrice des binormales en portant, sur les grands cercles normaux à l'indicatrice des tangentes, une longueur égale à un quadrant. En d'autres termes, les deux indicatrices seront des courbes *polaires l'une de l'autre*.

L'indicatrice des normales principales, s'il y a lieu de la considérer, sera la courbe polaire de l'enveloppe des normales communes aux deux premières indicatrices.

6. Supposons que les coordonnées x, y, z des points de la courbe gauche (C), rapportées à des axes fixes, soient des fonctions connues d'une variable u. Les formules que nous avons données plus haut nous permettront de calculer la courbure et la torsion. Nous allons faire ce calcul, car il nous permettra de faire remarquer une différence essentielle entre la courbure et la torsion.

Désignant par des lettres accentuées les dérivées de x, y, z, nous aurons d'abord

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, du = \Delta\, du.$$

Puis les formules (29) nous donneront

$$(35) \qquad a = \frac{x'}{\Delta}, \qquad a' = \frac{y'}{\Delta}, \qquad a'' = \frac{z'}{\Delta}.$$

On déduira ensuite des formules (31), par un calcul facile,

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} & c = \frac{\rho}{\Delta^3}(y'z''-z'y''), \quad c' = \frac{\rho}{\Delta^3}(z'x''-x'z''), \quad c'' = \frac{\rho}{\Delta^3}(x'y''-y'x''), \\ & \frac{\Delta^6}{\rho^2} = (y'z''-z'y'')^2 + (z'x''-x'z'')^2 + (x'y''-y'x'')^2, \\ & \frac{\Delta^6}{\tau\rho^2} = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Ainsi, *tandis que la courbure ne peut être obtenue, en général, que par l'extraction d'une racine carrée, la torsion s'exprime au contraire rationnellement.*

Il y a là une différence essentielle entre les deux éléments que l'on confond très souvent en les réunissant dans l'appellation commune : courbures de la courbe.

On verra facilement qu'avec la convention introduite dans les formules (34), une hélice *dextrorsum* aura sa torsion positive ; une hélice *sinistrorsum* aura, au contraire, sa torsion négative.

La dernière formule (36) est susceptible d'une interprétation géométrique élégante. Soit M un point quelconque de la courbe gauche et prenons sur cette courbe quatre points quelconques M_1, M_2, M_3, M_4, infiniment voisins de M. Proposons-nous d'évaluer le volume du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$. Il sera défini, *en grandeur et en signe*, par la formule

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

où x_i, y_i, z_i désignent les coordonnées du point M_i.

Si le point M_i correspond à la valeur $u + h_i$ du paramètre u, on aura évidemment

$$x_i = x + x'h_i + x''\frac{h_i^2}{2} + x'''\frac{h_i^3}{6} + \ldots,$$

$$y_i = y + y'h_i + y''\frac{h_i^2}{2} + y'''\frac{h_i^3}{6} + \ldots,$$

$$z_i = z + z'h_i + z''\frac{h_i^2}{2} + z'''\frac{h_i^3}{6} + \ldots.$$

Le volume V du tétraèdre deviendra donc

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & x' & y' & z' \\ 0 & x'' & y'' & z'' \\ 0 & x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & h_1 & \frac{h_1^2}{2} & \frac{h_1^3}{6} \\ 1 & h_2 & \frac{h_2^2}{2} & \frac{h_2^3}{6} \\ 1 & h_3 & \frac{h_3^2}{2} & \frac{h_3^3}{6} \\ 1 & h_4 & \frac{h_4^2}{2} & \frac{h_4^3}{6} \end{vmatrix},$$

en négligeant la quatrième puissance et les puissances supérieures de h_i.

La formule précédente nous donne

$$72V = \zeta(h_1, h_2, h_3, h_4)\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

$\zeta(h_1, h_2, h_3, h_4)$ désignant le produit suivant

$$(h_4 - h_1)(h_4 - h_2)(h_4 - h_3)(h_3 - h_1)(h_3 - h_2)(h_2 - h_1).$$

D'après la dernière formule (36), on a

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \frac{\Delta^6}{\tau\rho^2}.$$

D'autre part, le premier terme du développement de l'arête $\overline{M_i M_k}$ est évidemment

$$\Delta(h_k - h_i).$$

On peut donc, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, écrire la formule entièrement géométrique

$$(37) \qquad 72V = \frac{1}{\tau\rho^2}\overline{M_1M_2}\,\overline{M_1M_3}\,\overline{M_1M_4}\,\overline{M_2M_3}\,\overline{M_2M_4}\,\overline{M_3M_4},$$

qui résout complètement le problème proposé. Elle est tout à fait analogue à la suivante

$$4S = \frac{1}{\rho}\overline{M_1M_2}\,\overline{M_1M_3}\,\overline{M_2M_3},$$

qui donne, sur une courbe plane ou gauche, l'aire du triangle formé par les trois points infiniment voisins M_1, M_2, M_3.

La formule (37) prête à un grand nombre d'applications. Nous signalerons seulement la suivante. On sait que le volume V admet l'expression

$$V = \frac{1}{6}\overline{M_1M_2}\,\overline{M_3M_4}\,\delta\sin\theta,$$

θ désignant l'angle des deux arêtes opposées M_1M_2, M_3M_4 du tétraèdre et δ étant leur plus courte distance. En remplaçant V par cette expression dans la formule (27), on aura donc

$$12\delta\sin\theta = \frac{1}{\tau\rho^2}\,\overline{M_1M_4}\,\overline{M_2M_4}\,\overline{M_1M_3}\,\overline{M_2M_3}.$$

Supposons que M_2 vienne coïncider avec M_1 et M_4 avec M_3, les arêtes M_1M_2 et M_3M_4 deviendront les tangentes aux points M_1 et M_3; leur angle θ aura pour valeur approchée $\frac{\overline{M_1M_3}}{\rho}$ et la formule précédente nous donnera

$$12\delta = \frac{\overline{M_1M_3}^3}{\rho^2}. \tag{38}$$

C'est l'expression que Ossian Bonnet a donnée pour la plus courte distance de deux tangentes infiniment voisines.

7. Revenons à la méthode du trièdre mobile. On peut en faire dériver les principales propriétés des courbes gauches.

Considérons, par exemple, un point du plan normal et soient o, y, z ses coordonnées relatives au trièdre (T).

Les composantes de son déplacement sont

$$D_x = (1 - ry)\,ds, \qquad D_y = dy - pz\,ds, \qquad D_y = dz + py\,ds. \tag{39}$$

La droite de contact de ce plan normal avec son enveloppe sera évidemment le lieu des points pour lesquels le déplacement est parallèle au plan, c'est-à-dire pour lesquels $D_x = 0$. On retrouve ainsi les équations

$$y = \frac{1}{r} = \rho, \qquad x = 0$$

de la *droite polaire*. Pour avoir le point où cette droite touche

l'arête de rebroussement de la surface polaire, il faut joindre à l'équation précédente la condition

$$D_y = 0, \qquad \text{qui donne} \quad z = \frac{1}{p}\frac{dy}{ds} = \tau\frac{d\rho}{ds}.$$

Les mêmes formules (39) permettent également de déterminer les développées de la courbe gauche, c'est-à-dire les courbes (D) dont les tangentes sont des normales de (C). On les obtiendra toutes évidemment en exprimant que la vitesse d'un point du plan normal est dirigée vers le point M. On a ainsi les deux équations

$$D_x = 0, \qquad \text{ou} \qquad y = \rho,$$

$$y D_y - y D_z = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{z\,dy - y\,dz}{y^2 + z^2} = \frac{ds}{\tau}.$$

En intégrant, on a

$$\text{arc tang}\frac{y}{z} = \int\frac{ds}{\tau},$$

et, par suite,

$$(40) \qquad x = 0, \qquad y = \rho, \qquad y = z\,\text{tang}\int\frac{ds}{\tau}.$$

Ces équations renferment toute la théorie des développées. On voit que ces courbes sont toutes tracées sur la surface polaire et que les normales de la courbe qui enveloppent deux développées différentes font entre elles un angle constant. Réciproquement, si deux normales à la courbe font un angle constant et si l'une enveloppe une développée de la courbe, il en est de même de l'autre.

Il résulte de là que l'on peut déterminer *sans quadrature* les développées d'une courbe plane ou sphérique, et, en général, de toute courbe dont on connaît déjà une développée.

8. Considérons maintenant le plan passant par la tangente et perpendiculaire à la normale principale, c'est-à-dire le plan des xz du trièdre (T). On lui donne quelquefois, d'après Lancret, le nom de *plan rectifiant*. Soient x, 0, z les coordonnées d'un de ses points. Les composantes du déplacement de ce point seront

$$(41) \qquad D_x = dx + ds, \qquad D_y = (rx - pz)\,ds, \qquad D_z = dz.$$

La droite de contact de ce plan avec son enveloppe sera donc définie par les équations

$$(42) \qquad y = 0, \qquad rx - pz = 0,$$

qui montrent qu'elle est parallèle à l'axe du déplacement instantané

Le point de contact de cette droite, dite *rectifiante*, avec la courbe qu'elle enveloppe, s'obtiendra en joignant aux équations précédentes la suivante :

$$r\,D_x - p\,D_z = 0 \qquad \text{ou} \qquad r(dx + ds) - p\,dz = 0.$$

En différentiant la seconde équation (42), on a

$$r\,dx\,p\,dz = -x\,dr + z\,dp.$$

On peut donc éliminer dx, dz et il suffit, pour avoir le point de contact, de joindre aux deux équations (42) la suivante :

$$-r\,ds + x\,dr - z\,dp = 0,$$

ce qui donne

$$(43) \qquad x = \frac{pr\,ds}{p\,dr - r\,dp}, \qquad z = \frac{r^2\,ds}{p\,dr - r\,dp}.$$

Telles sont les coordonnées du point de contact de la droite rectifiante avec la courbe à laquelle elle demeure tangente.

Ces coordonnées deviennent infinies si l'on a

$$r\,dp - p\,dr = 0,$$

c'est-à-dire si le rapport $\frac{p}{r}$ est constant, et dans ce cas seulement. Alors la droite rectifiante engendre nécessairement un cylindre et, comme elle fait un angle constant avec la tangente à la courbe, cette courbe est une hélice tracée sur un cylindre quelconque.

Ainsi *toute courbe pour laquelle le rapport* $\frac{\rho}{\tau}$ *est constant est une hélice tracée sur un cylindre quelconque.*

Lorsque ρ et τ sont l'un et l'autre constants, cette hélice est tracée sur un cylindre de révolution. Dans ce cas, en effet, l'axe instantané du déplacement infiniment petit défini par les équations

$$\frac{1 - ry}{p} = \frac{py}{r}, \qquad rx - pz = 0,$$

occupe une position invariable par rapport au trièdre (T) et, par suite, est fixe dans l'espace absolu. Alors tous les points du système mobile et, en particulier, l'origine du trièdre décrivent des hélices tracées sur des cylindres circulaires droits.

Ainsi, *toute courbe pour laquelle* ρ *et* τ *sont constants est une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit.*

9. Dans le mouvement que nous venons d'étudier, trois des six quantités ξ, η, ζ, p, q, r sont nulles. Nous allons montrer que, réciproquement, si l'on a

$$\eta = \zeta = q = 0,$$

l'origine du trièdre décrit une courbe qui est tangente à l'axe des x de ce trièdre et admet l'axe des y pour normale principale. Le premier point résulte immédiatement des équations

$$\eta = \zeta = 0.$$

D'autre part, la composante q étant nulle, nous avons à la fois

$$\Sigma ca = 0, \qquad \Sigma c\,da = 0.$$

L'axe des z du trièdre mobile est donc normal à deux positions consécutives de l'axe des x. En d'autres termes, le plan des xy est le plan osculateur de la courbe décrite par l'origine des coordonnées.

En réduisant toutes les vitesses dans un même rapport, de manière que ξ devienne égal à 1, on doit remplacer p, r par $\frac{p}{\xi}$, $\frac{r}{\xi}$. La courbure et la torsion de la courbe sont données par les formules

$$(44) \qquad \frac{r}{\xi} = \frac{1}{\rho}, \qquad \frac{p}{\xi} = \frac{1}{\tau}.$$

10. La méthode cinématique que nous venons d'exposer s'applique d'une manière élégante à la solution du problème suivant, résolu par J. Bertrand : *Rechercher s'il existe une courbe dont les normales principales soient aussi normales principales d'une autre courbe.*

Soient M un point de la courbe donnée (C) et (T) le trièdre relatif à ce point. Si l'on porte sur la normale principale une lon-

gueur $MM' = a$, la vitesse du point M' aura pour composantes

$$1 - ra, \quad \frac{da}{ds}, \quad pa,$$

suivant Mx, My, Mz respectivement; cela résulte des formules (39). Si l'on veut que la courbe décrite par M' soit normale à MM', il faudra que l'on ait

$$\frac{da}{ds} = 0,$$

a devra être constant : ce résultat était évident et nous aurions pu l'admettre *a priori*.

Alors la vitesse v de M' est perpendiculaire à My et, si l'on appelle ω l'angle qu'elle fait avec Mx, on a

$$(45) \qquad \begin{cases} v\cos\omega = 1 - ra, \\ v\sin\omega = pa. \end{cases}$$

Mais si la droite MM' est normale à la courbe (C') décrite par le point M', elle n'est pas, en général, normale principale de cette courbe. Construisons le trièdre (T') formé par la tangente $M'x'$ à (C'), par la droite $M'y$ et par la perpendiculaire commune à ces deux droites. Comme le trièdre (T) et le trièdre (T') ont même axe des y, on voit qu'on aurait un trièdre ayant même orientation que (T') en faisant tourner le trièdre (T) de l'angle $-\omega$ autour de son axe des y. On obtiendra donc la rotation instantanée du trièdre (T') en composant les deux rotations p et r autour des axes des x et des z du trièdre (T) avec la rotation $-\frac{d\omega}{ds}$ autour de My.

Or, la condition nécessaire et suffisante pour que la droite My ou $M'y$ soit normale principale de la courbe décrite par le point M' est, nous l'avons vu, que la composante de la rotation de (T') autour de $M'y$ soit nulle. Cette composante étant évidemment $-\frac{d\omega}{ds}$, puisque les axes des rotations p et r sont normaux à My, il faudra qu'on ait

$$\frac{d\omega}{ds} = 0,$$

et, par suite, que l'angle ω soit constant. Ainsi *les plans oscu-*

lateurs des courbes décrites par les points M, M′ *devront se couper sous un angle constant* ω.

Si l'on se reporte maintenant aux formules (45), on en déduit, par l'élimination de v,

$$\frac{\sin\omega}{a} = r\sin\omega + p\cos\omega,$$

ou, en remplaçant r et p par leurs expressions géométriques,

$$\frac{\sin\omega}{a} = \frac{\sin\omega}{\rho} + \frac{\cos\omega}{\tau}. \tag{46}$$

Il y a donc une relation linéaire entre les deux courbures.

11. Réciproquement, s'il existe une relation linéaire entre les deux courbures

$$C = \frac{A}{\rho} + \frac{B}{\tau},$$

la courbe jouira en général de la propriété indiquée. On identifiera la relation précédente avec l'équation (46), et l'on aura

$$a = \frac{A}{C}, \qquad \cot\omega = \frac{B}{A}.$$

Signalons cependant deux cas d'exception :

Si l'on a $C = 0$, sans que A soit nul, la relation entre les courbures prend la forme

$$\frac{\rho}{\tau} = \text{const.},$$

et a devient infini. Ainsi, la seconde courbe, lieu de M′, est rejetée à l'infini. La courbe proposée est alors une hélice.

Si l'on a $A = 0$, c'est-à-dire si la courbe a une torsion constante, a est nul, et les deux courbes lieux de M et de M′ se confondent.

On peut avoir plus de deux courbes ayant les mêmes normales principales : 1° si la valeur de a est indéterminée, c'est-à-dire si l'on a $A = C = 0$; dans ce cas la courbe sera plane; 2° s'il y a plus d'une relation linéaire entre les courbures, c'est-à-dire si les deux courbures sont constantes; dans ce cas l'équation (46) sera vérifiée pour toute valeur de a et fera connaître ω. Toutes les trajectoires orthogonales des normales admettront ces droites comme normales

principales. La courbe primitive, et par conséquent toutes les autres, seront des hélices tracées sur des cylindres circulaires droits; la surface engendrée par les normales principales sera l'hélicoïde gauche à plan directeur.

Revenons au cas général et cherchons les deux courbures de la courbe (C′). Le trièdre (T′) relatif à cette courbe est invariablement lié au trièdre (T). Il suffira donc, pour avoir les composantes p', r' relatives au trièdre (T′), de projeter les rotations p et r sur les axes de (T′). Cela donne

$$\begin{aligned} p' &= p\cos\omega + r\sin\omega, \\ r' &= -p\sin\omega + r\cos\omega. \end{aligned}$$

Or, on a, d'après les formules (44), en désignant par $\frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{\tau'}$ les deux courbures de (C′).

$$p' = \frac{v}{\tau'}, \qquad r' = \frac{v}{\rho'}.$$

Les relations précédentes nous donnent donc, par la substitution des expressions de p, q, p', q',

$$(47) \qquad \begin{cases} \dfrac{v}{\tau'} = \dfrac{\cos\omega}{\tau} + \dfrac{\sin\omega}{\rho}, \\[2ex] \dfrac{v}{\rho'} = -\dfrac{\sin\omega}{\tau} + \dfrac{\cos\omega}{\rho}, \end{cases}$$

formules auxquelles il faut joindre les équations (45), écrites sous la forme

$$(48) \qquad v\cos\omega = 1 - \frac{a}{\rho}, \qquad v\sin\omega = \frac{a}{\tau}.$$

Ces quatre formules contiennent toutes les relations entre les deux courbes. On en déduit, par exemple, les deux suivantes :

$$(49) \qquad \frac{\cos\omega}{v} = 1 + \frac{a}{\rho'}, \qquad \frac{\sin\omega}{v} = \frac{a}{\tau'},$$

qui montrent bien la réciprocité entre les deux courbes (C) et (C′) et peuvent remplacer les équations (47). L'élimination de $\frac{1}{v}$ donne la relation

$$(50) \qquad \frac{\sin\omega}{a} + \frac{\sin\omega}{\rho'} - \frac{\cos\omega}{\tau'} = 0,$$

entre les deux courbures de (C′). Elle se déduit de la relation (46) par le changement de a en $-a$ et de ω en $-\omega$.

L'un des cas particuliers les plus intéressants avait été déjà signalé et étudié par Monge [1]. C'est celui où les plans osculateurs des deux courbes sont perpendiculaires. On a alors

$$\rho = a, \qquad \rho' = -a.$$

Chacune des deux courbes (C) et (C′) est le lieu des centres de courbure de l'autre et, aussi, le lieu des centres des sphères osculatrices à l'autre.

12. Nous terminerons ce que nous avons à dire sur les courbes de Bertrand en signalant entre les courbes conjuguées (C), (C′), une relation qui a d'importantes applications.

Considérons le mouvement du trièdre (T) lié à une courbe *quelconque* (C). Si l'on applique les remarques développées au n° 3, on verra que ce mouvement peut être considéré comme résultant de la composition des deux suivants :

L'un, pour lequel on a

$$\xi' = 0, \qquad \eta' = 0, \qquad \zeta' = 0,$$
$$p' = p, \qquad q' = 0, \qquad r' = r';$$

---

(1) Monge, *Supplément où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration et que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux dérivées partielles élevées* (*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences pour l'année* 1784, p. 536 et suiv.)

Ce beau travail vient compléter, comme l'indique son titre, le célèbre *Mémoire sur le Calcul intégral des équations aux différences partielles*, publié dans le même Volume (p. 118), et où se trouvent les premières recherches de Monge sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima. Monge fait voir, dans le *Supplément*, que, si une courbe a un rayon de courbure constant, le lieu des centres de courbure jouira de la même propriété et aura ses centres de courbure sur la courbe primitive. De plus, les plans osculateurs des deux courbes aux points correspondants seront rectangulaires. Mais le procédé que Monge fait connaître, pour la détermination de l'équation en termes finis de courbes dont la courbure est constante, est évidemment inexact. Les équations finies que donne l'illustre géomètre contiennent, en effet, deux fonctions arbitraires que Monge regarde comme indépendantes, bien qu'il ait démontré, quelques pages auparavant, qu'elles sont liées l'une à l'autre par une équation différentielle.

L'autre, pour lequel on a

$$\xi'' = 1, \qquad \eta'' = 0, \qquad \zeta'' = 0,$$
$$p'' = 0, \qquad q'' = 0, \qquad r'' = r - r'.$$

Or, ces deux mouvements se réduisent à deux rotations : l'une s'effectuant autour de la droite

$$y = 0, \qquad r'x - pz = 0,$$

qui passe à l'origine et se trouve dans le plan rectifiant; l'autre s'effectuant autour de la droite

$$1 - (r - r')y = 0, \qquad x = 0,$$

parallèle à la binormale.

De là résulte que, dans le mouvement du trièdre (T), toute droite du plan rectifiant passant par le point de la courbe a pour conjuguée une parallèle à la binormale située dans le plan normal.

Appliquons cette remarque au cas où (C) est une courbe de Bertrand et conservons les notations précédentes. On verra facilement, en tenant compte de la relation (46), que la droite du plan rectifiant de (C) menée perpendiculairement au plan osculateur de (C′) a pour conjuguée la perpendiculaire au plan osculateur de (C) menée par le point de (C′).

Ainsi, si l'on considère les deux points correspondants M, M′ de (C) et de (C′) et que, par chacun d'eux, on mène une perpendiculaire au plan osculateur de la courbe décrite par l'autre, les deux droites ainsi obtenues sont des axes conjugués dans le mouvement des deux trièdres, invariablement liés l'un à l'autre, qui sont attachés aux deux courbes (C) et (C′).

Cette proposition joue un rôle fondamental dans l'étude approfondie des courbes de Bertrand. On pourra consulter à ce sujet notre Mémoire *Sur un problème relatif à la théorie des courbes gauches*, inséré dans le Tome L des *Mémoires de l'Académie des Sciences*.

CHAPITRE II.

SUR L'INTÉGRATION DU SYSTÈME LINÉAIRE QUI SE PRÉSENTE DANS LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

Il s'agit du système qui détermine le mouvement quand on se donne les rotations p, q, r en fonction du temps. — Ce système est le type, ou la forme réduite d'une classe importante de systèmes linéaires qui admettent une intégrale quadratique à coefficients constants ou variables. — On voit immédiatement, presque sans calcul, qu'on peut l'intégrer complètement, si l'on en connaît deux solutions particulières. Mais, d'après un résultat plus caché, il suffira d'en connaître une solution particulière pour en achever l'intégration complète à l'aide d'une seule quadrature. Pour établir ce résultat, on reprend l'intégrale $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const.}$ et l'on examine successivement le cas où la constante du second membre n'est pas nulle, et celui où elle est nulle.

Dans le premier cas, l'intégration du système linéaire se ramène à celle d'une *seule* équation de Riccati. — Propriétés générales de l'équation de Riccati. Forme de l'intégrale par rapport à la constante. Le rapport anharmonique de quatre solutions est constant. Cas où l'on connaît une, deux ou trois solutions particulières. Réduction à un système linéaire homogène à deux inconnues.

Application de ces propriétés générales à l'équation de Riccati qui se présente dans le problème actuel. La connaissance d'un seul système de cosinus vérifiant les trois équations fondamentales permet d'achever le problème par une seule quadrature portant sur une fonction réelle. — Rappel de la méthode par laquelle Euler avait établi ce résultat.

On arrive maintenanl à l'étude des solutions du système fondamental pour lesquelles la somme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ est nulle. On ramène leur détermination à celle d'un système linéaire à deux inconnues, un de ceux qu'on peut rattacher à l'équation de Riccati considérée plus haut. Son intégration complète permettra d'obtenir sans quadrature celle du système linéaire à trois inconnues. Si l'on en connaît une solution particulière, on en obtiendra une autre sans intégration, ce qni fournira l'intégrale générale, lorsque p, q, r seront fonctions réelles de t; dans le cas contraire, il faudra une quadrature pour déduire l'intégrale générale de la solution particulière.

---

13. Il nous reste à étudier d'une manière détaillée l'intégration du système

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \beta r - \gamma q, \\ \frac{d\beta}{dt} &= \gamma p - \alpha r, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \alpha q - \beta p, \end{aligned}\right.$$

auquel satisfont les trois groupes de cosinus. Nous avons déjà signalé une propriété fondamentale de ce système. Il admet l'intégrale quadratique

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const.}, \tag{2}$$

et l'existence de cette intégrale entraîne comme corollaires une série de propositions qui facilitent, dans plusieurs cas, l'intégration du système.

Avant de commencer l'étude des équations (1), je vais montrer d'abord que tout système linéaire de la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= A\alpha + B\beta + C\gamma, \\ \frac{d\beta}{dt} &= A'\alpha + B'\beta + C'\gamma, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= A''\alpha + B''\beta + C''\gamma, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

où A, B, C, A', ... sont des fonctions de t, peut être ramené à la forme (1) toutes les fois qu'il admet une intégrale du second degré connue

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \text{const.}, \tag{4}$$

où φ désigne une fonction homogène du second degré, à coefficients constants ou variables.

En effet, une substitution linéaire homogène quelconque ne change évidemment pas la forme des équations (3) et, à l'aide d'une telle substitution, on peut évidemment ramener l'équation (4) à la forme

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const.}, \tag{5}$$

en laissant de côté les cas exceptionnels, qu'on traitera aisément, où la fonction φ serait un carré, ou une somme de carrés.

Si l'on exprime que le premier membre de l'équation (5) est une intégrale du système (3), on obtient les conditions

$$A = B' = C'' = B + A' = C + A'' = C' + B'' = 0,$$

qui permettent de ramener ce système (3) à la forme (1).

Ainsi, le système (1) nous apparaît comme le type, ou la *forme*

réduite, d'une classe entière de systèmes présentant la propriété, qu'on rencontre fréquemment dans les applications, d'admettre une intégrale connue du second degré. Ce caractère particulier des équations que nous allons étudier méritait d'être approfondi et suffirait à justifier l'étendue des développements qui vont suivre[1].

14. Je vais montrer d'abord que, toutes les fois que l'on connaîtra une solution particulière du système (1) $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, on pourra joindre l'intégrale du premier degré

$$\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0 = \text{const.}$$

à l'intégrale déjà donnée du second degré.

Cette proposition a déjà été indiquée au n° 2. La démonstration suivante en fera connaître la véritable origine.

Si l'on a une solution quelconque (α, β, γ) du système (1), on pourra en déduire, d'après les propriétés de tout système linéaire, une solution plus générale

$$\alpha + k\alpha_0, \qquad \beta + k\beta_0, \qquad \gamma + k\gamma_0,$$

k désignant une constante quelconque. On devra donc avoir, pour toutes les valeurs de k,

$$(\alpha + k\alpha_0)^2 + (\beta + k\beta_3)^2 + (\gamma + k\gamma_0)^2 = \text{const.}$$

Le coefficient de k^2 et le terme indépendant de k dans le premier membre étant constants, il faudra qu'il en soit de même du coefficient de k

$$\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0,$$

comme on voulait le démontrer.

Il résulte évidemment de là que, si l'on connaissait seulement deux solutions particulières du système (1) $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ et $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, on pourrait obtenir immédiatement la solution générale, qui serait définie par les équations

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= \text{const.}, \\ \alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0 &= \text{const.}, \\ \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 &= \text{const.} \end{aligned}$$

---

[1] On peut caractériser aussi le système étudié en disant qu'il est identique à son système *adjoint*. *Voir*, pour la définition du système adjoint, deux *Notes* de l'Auteur insérées en 1880 aux *Comptes rendus*, t. 90, pp. 524 et 596.

Ces équations peuvent être résolues et donnent pour α, β, γ des valeurs de la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} \alpha = c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + c_2(\beta_0\gamma_1 - \beta_1\gamma_0), \\ \beta = c_0\beta_0 + c_1\beta_1 + c_2(\gamma_0\alpha_1 - \alpha_0\gamma_1), \\ \gamma = c_0\gamma_0 + c_1\gamma_1 + c_2(\alpha_0\beta_1 - \beta_0\alpha_1), \end{cases}$$

où c_0, c_1, c_2 désignent les trois constantes arbitraires. Mais on peut obtenir une proposition plus complète et montrer que, si l'on connaît un seul système de solutions du système (1), *une seule quadrature* suffira à nous donner son intégrale générale.

15. Pour établir ce résultat essentiel, nous reprendrons l'intégrale générale

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const.},$$

et nous examinerons successivement le cas où la constante du second membre n'est pas nulle, et celui où elle est égale à zéro.

Dans le premier cas, on pourra toujours, en divisant α, β, γ par une constante convenable, supposer qu'on a

$$(7)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Remarquons même que, dans le problème particulier que nous avons à traiter, α, β, γ étant trois cosinus directeurs, doivent nécessairement vérifier cette relation.

Il est naturel de profiter de la relation (7) pour exprimer α, β, γ en fonction de deux variables indépendantes et de chercher les équations différentielles auxquelles devront satisfaire ces deux variables. Voici comment nous allons procéder :

Si l'on regarde α, β, γ comme les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace, l'équation (7) représentera une sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine des coordonnées. Considérons cette sphère comme une surface réglée admettant un double système de génératrices imaginaires et prenons pour variables deux quantités demeurant constantes respectivement sur les génératrices de chaque système. Pour cela nous poserons

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha + i\beta}{1-\gamma} = \dfrac{1+\gamma}{\alpha - i\beta} = x, \\ \dfrac{\alpha - i\beta}{1-\gamma} = \dfrac{1+\gamma}{\alpha + i\beta} = -\dfrac{1}{y}, \end{cases}$$

ce qui donnera

$$(9)\qquad \alpha = \frac{1 - xy}{x - y}, \qquad \beta = i\frac{1 + xy}{x - y}, \qquad \gamma = \frac{x + y}{x - y}.$$

Remarquons que, d'après les formules (8), x et y seront imaginaires quand α, β, γ seront réels, et en outre l'imaginaire conjuguée de x sera $-\frac{1}{y}$.

Si nous substituons les valeurs ainsi obtenues de α, β, γ dans les équations différentielles, ces équations se réduiront à deux, comme il fallait s'y attendre, et après quelques calculs faciles, on obtiendra le système

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{q - ip}{2} - irx + \dfrac{q + ip}{2}x^2, \\ \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{q - ip}{2} - iry + \dfrac{q + ip}{2}y^2, \end{cases}$$

d'où il suit : 1° que x et y se déterminent séparément; 2° que ces deux inconnues sont des solutions différentes de la *même* équation

$$(11)\qquad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{q - ip}{2} - ir\sigma + \frac{q + ip}{2}\sigma.$$

L'intégration de notre système se trouve donc ramenée à celle de cette seule équation. Deux solutions particulières distinctes de l'équation donneront, par l'emploi des formules (9), des valeurs réelles ou imaginaires de α, β, γ liées par la relation (7) et vérifiant le système (1).

16. L'équation en σ appartient au groupe des équations de la forme

$$(12)\qquad \frac{d\sigma}{dt} = a + 2b\sigma + c\sigma^2,$$

où a, b, c désignent des fonctions quelconques de t; je leur ai donné le nom de Riccati, parce qu'elles comprennent comme cas particulier l'équation

$$(13)\qquad \frac{d\sigma}{dt} = a\sigma^2 + bt^m,$$

qui seule a été l'objet des recherches du géomètre italien. Nous allons rappeler rapidement leurs principales propriétés.

D'abord, elles ne changent pas de forme, lorsqu'on effectue sur σ une substitution linéaire, c'est-à-dire quand on substitue à σ la variable λ définie par l'équation

$$\lambda = \frac{M\sigma + N}{M'\sigma + N'},$$

M, N, M', N' étant des fonctions quelconques de t.

D'après cela, soient σ_0, σ_1 σ_2 trois solutions particulières de l'équation, et considérons le rapport anharmonique

$$\frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma - \sigma_2} : \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 - \sigma_2} = \lambda;$$

λ satisfera, d'après ce que nous venons de dire, à une équation de la forme (12), et cette équation devra admettre les trois solutions particulières

$$\lambda = 0, \qquad \lambda = 1, \qquad \lambda = \infty.$$

Donc elle se réduira à la forme

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

et par conséquent λ devra être constant.

Ainsi, *le rapport anharmonique de quatre solutions quelconques de l'équation différentielle est constant.*

Cette propriété est d'ailleurs caractéristique. Car soient σ_0, σ_1, σ_2 trois solutions particulières de l'équation. Si elle jouit de la propriété précédente, sa solution générale devra vérifier la condition

$$\frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma - \sigma_2} : \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 - \sigma_2} = C, \tag{14}$$

C désignant une constante. En l'éliminant par différentiation, on retrouve précisément une équation différentielle de la forme considérée.

Si l'on résout l'équation (14) par rapport à σ, on a, pour l'intégrale générale, une expression de la forme

$$\sigma = \frac{RC + S}{PC + Q}, \tag{15}$$

où P, Q, R, S sont des fonctions de la variable indépendante; et

réciproquement, si l'intégrale générale se présente sous cete forme, on peut dire que le rapport anharmonique de quatre solutions particulières quelconques est constant et égal à celui des valeurs correspondantes de C. Ainsi, c'est encore une propriété caractéristique de notre équation que son *intégrale générale peut être mise sous la forme* (15) *par rapport à la constante arbitraire* C.

17. Les applications particulières de cette propriété essentielle sont les suivantes :

1° Si l'on connaît trois solutions particulières distinctes $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ de l'équation (12), son intégrale générale sera donnée sans quadrature par la formule (14).

2° Si l'on connaît deux solutions particulières σ_0, σ_1, on prendra comme inconnue auxiliaire

$$\lambda = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma - \sigma_1},$$

λ devra satisfaire à une équation de Riccati privée des termes a et c, c'est-à-dire intégrable immédiatement. On a, en effet,

$$\frac{d\log\lambda}{dt} = \frac{\frac{d\sigma}{dt} - \frac{d\sigma_0}{dt}}{\sigma - \sigma_0} - \frac{\frac{d\sigma}{dt} - \frac{d\sigma_1}{dt}}{\sigma - \sigma_1},$$

ou, en remplaçant $\frac{d\sigma}{dt}, \frac{d\sigma_0}{dt}, \frac{d\sigma_1}{dt}$ par leurs valeurs,

$$\frac{d\log\lambda}{dt} = c(\sigma_0 - \sigma_1).$$

On aura donc

$$\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma - \sigma_1} = e^{\int c(\sigma_0 - \sigma_1)\,dt}, \tag{16}$$

σ s'obtiendra par *une seule quadrature.*

3° Enfin, si l'on connaît une seule solution particulière σ_0, on posera

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{1}{\lambda}.$$

L'équation en λ devant admettre la solution $\lambda = \infty$ sera une équa-

tion de Riccati privée du terme en λ^2. Et, en effet, on trouve

$$\frac{d\lambda}{dt} = -c - 2(c\sigma_0 + b)\lambda, \tag{17}$$

c'est-à-dire une équation linéaire qui s'intégrera à l'aide *de deux quadratures*

18. L'équation de Riccati possède donc une des propriétés fondamentales des équations linéaires; en ce sens que la connaissance de chaque solution particulière permet de faire un pas vers la solution générale. Et, en effet, il est aisé de ramener son intégration à celle d'une équation linéaire du second ordre. Voici le procédé qui nous paraît le plus élégant pour effectuer cette réduction : Posons

$$\sigma = \frac{\mu}{\nu}, \tag{18}$$

l'équation deviendra

$$\nu\frac{d\mu}{dt} - \mu\frac{d\nu}{dt} = a\nu_2 + 2b\mu\nu - c\nu^2. \tag{19}$$

Cette unique relation peut être évidemment remplacée par les deux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= \quad a\nu + (b+h)\mu, \\ \frac{d\nu}{dt} &= -c\mu - (b-h)\nu, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

où h désigne une fonction arbitraire de t. Or, l'élimination de μ ou de ν conduit évidemment à une équation linéaire du second ordre pour la variable conservée.

Si l'on prend par exemple $h = b$, on aura

$$\mu = -\frac{1}{c}\frac{d\nu}{dt},$$

et ν satisfera à l'équation

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} - \left(2b + \frac{c'}{c}\right)\frac{d\nu}{dt} + ac\nu = 0.$$

Si ν_1 et ν_2 désignent deux solutions particulières de cette équation, on aura

$$\sigma = -\frac{1}{c}\,\frac{\nu'_1 + C\nu'_2}{\nu_1 + C\nu_2}, \tag{21}$$

C désignant la constante arbitraire.

Les propriétés des systèmes linéaires nous indiquent, d'ailleurs, une autre valeur qu'il pourra être avantageux de choisir pour h.

Si μ_0, ν_0; μ_1, ν_1 désignent deux systèmes de solutions des équations (20), on a

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \mu_0 & \nu_0 \\ \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix} = 2h \begin{vmatrix} \mu_0 & \nu_0 \\ \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix}.$$

Si donc on prend $h = 0$, on aura l'avantage d'obtenir immédiatement la relation

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \nu_0 \\ \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix} = \text{const.},$$

reliant deux solutions particulières quelconques.

Le système (20) se réduira alors au suivant

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu}{dt} = \quad b\mu + a\nu, \\[2ex] \dfrac{d\nu}{dt} = -c\mu - b\nu. \end{cases} \tag{22}$$

19. Appliquons ces propositions générales à notre problème particulier. Toutes les fois que l'on connaîtra une solution du système (1) pour laquelle la somme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma_2$ sera différente de zéro, on pourra réduire cette somme à l'unité, et les formules (8) nous donneront deux solutions particulières de l'équation en σ. Désignons ces deux solutions par σ', $\frac{-1}{\sigma'_0}$. Si α, β, γ, p, q, r sont réelles, σ', σ'_0 seront des imaginaires conjuguées l'une de l'autre.

L'application de la formule (16) nous conduira, après quelques transformations faciles, à la formule

$$\frac{\sigma - \sigma'}{1 + \sigma\sigma'_0} = C\sqrt{\frac{\sigma'}{\sigma'_0}}\, e^{-\int \frac{1+\sigma'\sigma'_0}{4}\left(\frac{q-ip}{\sigma'} - \frac{q+ip}{\sigma'_0}\right)dt},$$

C désignant la constante arbitraire.

La quadrature qui figure dans ces formules porte sur une fonc-

tion réelle toutes les fois que $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$ sont réels; car alors σ', σ'_0 sont des imaginaires conjuguées et la fonction sous le signe $\int$ dans les formules précédentes est de la forme $i\Theta$, Θ étant réelle.

Au reste, dans ce cas particulier où tout est réel, il suffirait de connaître une seule solution particulière de l'équation de Riccati. Car alors, si cette équation admet la solution σ', elle admet aussi la solution $-\frac{1}{\sigma'_0}$, σ'_0 étant imaginaire conjuguée de σ'.

20. Euler, qui a le premier étudié le mouvement d'un corps solide, a démontré, en suivant une méthode toute différente, les résultats que nous venons d'établir; nous avons vu qu'il a exprimé les neuf cosinus au moyen de trois angles seulement, et nous savons que les rotations p, q, r s'expriment, en fonction de ces angles et de leurs dérivées relatives au temps, par les formules (12) du numéro 2. Si donc on suppose connues les trois rotations, ces trois formules constitueront un système d'équations différentielles qui remplacera le système (1) et suffira à déterminer les angles θ, φ, ψ. A la vérité, le défaut de symétrie de ces équations ne permet pas de les employer d'une manière générale; cependant on en déduit très simplement la propriété fondamentale du système (1).

En effet, soient a'', b'', c'' les valeurs particulières, supposées connues, de α, β, γ vérifiant le système (1) et la relation (7). Si nous prenons comme axe OZ la droite dont les cosinus directeurs sont a'', b'', c'', nous aurons alors θ et φ par les trois dernières formules (2) (n° 1). Ensuite la dernière des formules (12), ou la seconde des formules (13) (n° 2), nous permettra de déterminer ψ par une quadrature. Connaissant les trois angles d'Euler, nous aurons trois solutions particulières du système (1) et, par conséquent aussi, la solution générale.

Il est aisé de voir que les quadratures à effectuer dans les deux méthodes se ramènent l'une à l'autre et ne diffèrent que par des quantités exactement intégrables.

La méthode d'Euler que nous venons de rappeler a quelque chose d'artificiel. Il semble qu'on se rendra mieux compte de son succès si l'on emploie les considérations suivantes :

a'', b'', c'' étant les valeurs particulières, supposées connues, de α, β, γ, il est toujours possible de leur adjoindre, et d'une infi-

nité de manières, deux groupes a', b', c', a, b, c, de fonctions de t qui complètent avec a'', b'', c'' un système de neuf cosinus.

Effectuons alors sur le système (1) la substitution

$$\begin{aligned}\alpha &= a\alpha' + a'\beta' + a''\gamma',\\ \beta &= b\alpha' + b'\beta' + b''\gamma',\\ \gamma &= c\alpha' + c'\beta' + c''\gamma',\end{aligned}$$

le système (1) se changera en un autre système linéaire *qui admettra encore l'intégrale quadratique*

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \text{const.}$$

et sera, par conséquent, de la forme

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \beta' r' - \gamma' q', \qquad \frac{d\beta'}{dt} = \gamma' p' - \alpha' r', \qquad \frac{d\gamma'}{dt} = \alpha' q' - \beta' p',$$

p', q' r' étant de nouvelles fonctions de t.

Or, d'après les formules de transformation, ce nouveau système doit admettre la solution particulière

$$\alpha' = 0, \qquad \beta' = 0, \qquad \gamma' = 1.$$

On doit donc avoir

$$q' = 0, \qquad p' = 0;$$

en sorte que les équations précédentes deviennent

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \beta' r', \qquad \frac{d\beta'}{dt} = -\alpha' r', \qquad \frac{d\gamma'}{dt} = 0,$$

et s'intègrent complètement à l'aide de la seule quadrature $\int r'\,dt$.

C'est le résultat d'Euler.

21. Après avoir envisagé les solutions du système (1) pour lesquelles la somme

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

est différente de zéro, il nous reste à étudier celles qui satisfont à la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0. \tag{23}$$

Elles se présentent dans l'étude de différentes questions, en

particulier dans les belles recherches d'Hermite sur la rotation d'un corps solide [1]. Il est facile de voir que, dans le cas où p, q, r sont réelles, la connaissance *d'un seul* de ces systèmes donnerait la solution complète du problème.

Soient, en effet,

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'', \qquad \beta = \beta' + i\beta'', \qquad \gamma = \gamma' + i\gamma'',$$

les valeurs, nécessairement imaginaires, de α, β, γ, vérifiant la relation (23). Les parties réelles α', β', γ' et les parties imaginaires α'', β'', γ'' de α, β, γ constitueront évidemment deux systèmes différents de solutions réelles du système (1) pour lesquels la somme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ sera différente de zéro. L'application des formules (6) fera connaître alors, sans intégration nouvelle, la solution complète du système (1).

Pour étudier et déterminer complètement les systèmes vérifiant la relation (23), on peut procéder comme nous l'avons fait dans le cas où la somme des carrés des solutions n'était pas nulle. On exprimera α, β, γ en fonction de deux arbitraires u et v de manière à satisfaire à la relation (23); ce qui se fera, par exemple, au moyen des formules

$$(24) \qquad \alpha = u^2 - v^2, \qquad \beta = i(u^2 + v^2), \qquad \gamma = 2uv.$$

En portant ces valeurs de α, β, γ dans le système linéaire (1), celui-ci se réduira aux deux équations suivantes :

$$(25) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{ir}{2}u - \dfrac{q+ip}{2}v, \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{q-ip}{2}u - \dfrac{ir}{2}v, \end{cases}$$

qui sont linéaires. Elles jouent évidemment par rapport à l'équation (11) le même rôle que le système (22) par rapport à l'équation générale de Riccati. Au reste, il est facile de rattacher le système (25) à l'équation (11), car si l'on ajoute les équations précédentes, après les avoir multipliées respectivement par v et $-u$ et si l'on pose

$$v = u\sigma,$$

---

[1] Hermite, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (*Œuvres de Charles Hermite*, t. III, p. 234 et suiv.).

on retrouve précisément l'équation de Riccati (11)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{q - ip}{2} - ir\sigma + \frac{q + ip}{2}\sigma^2$$

qui joue le rôle fondamental dans notre première méthode.

22. Nous avons vu que, si u_0, v_0, u_1, v_1 désignent deux systèmes de solutions des équations (25), on a

$$u_0 v_1 - v_0 u_1 = \text{const.}$$

Il résulte de là que, si l'on a obtenu une solution particulière u', v', du système (25), on en connaîtra par cela même une intégrale première

$$uv' - vu' = \text{const.} = \text{C},$$

ce qui permettra d'achever, *à l'aide d'une seule quadrature*, l'intégration complète du système (25). Il suffit, en effet, de remplacer v par sa valeur

$$v = \frac{uv' - \text{C}}{u'}$$

dans la première équation (25), pour obtenir l'équation linéaire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{u'}\right) = \text{C}\,\frac{q - ip}{2u'^2},$$

qui s'intègre à vue *par une seule quadrature.*

Au reste, si p, q, r sont des fonctions réelles de t, le système ne peut admettre la solution

$$u = u', \qquad v = v',$$

sans admettre également la suivante :

$$u = v'_0, \qquad v = -u'_0,$$

où u'_0, v'_0 désignent les imaginaires conjuguées de u', v' respectivement. Alors son intégration complète s'achèvera sans aucun signe de quadrature.

En général, lorsqu'on aura intégré le système (25) par les formules

$$u = \text{C}u' + \text{D}u'', \qquad v = \text{C}v' + \text{D}v'',$$

où C et D désignent les deux constantes arbitraires, la substitution de ces valeurs dans les formules (24) donnera trois solutions distinctes du système fondamental (1) (n° 13)

$$\alpha = u'^2 - v'^2, \qquad \beta = i(u'^2 + v'^2), \qquad \gamma = 2u'v',$$
$$\alpha = u''^2 - v''^2, \qquad \beta = i(u''^2 + v''^2), \qquad \gamma = 2u''v',$$
$$\alpha = u'u'' - v'v'', \qquad \beta = i(u'u'' + v'v''), \qquad \gamma = u'v'' + v'u'',$$

Si même on les combine linéairement de la manière suivante :

$$\alpha = i\frac{u'^2 - v'^2 + u''^2 - v''^2}{2}, \quad \beta = -\frac{u'^2 + v'^2 + u''^2 + v''^2}{2}, \quad \gamma = i(u'v' + u''v''),$$
$$\alpha = \frac{u'^2 - v'^2 + v''^2 - u''^2}{2}, \quad \beta = i\,\frac{u'^2 + v'^2 - u''^2 - v''^2}{2}, \quad \gamma = u'v' - u''v'',$$
$$\alpha = u'u'' - v'v'', \qquad \beta = i(u'u'' + v'v''), \qquad \gamma = u'v'' + v'u''$$

et si l'on suppose, ce qui est permis,

$$u'v'' - v'u'' = 1,$$

on aura les éléments d'une substitution orthogonale.

22*bis*. En terminant ce Chapitre, où nous nous sommes occupés de la détermination du mouvement lorsque l'on connaît p, q, r et où nous avons reconnu qu'on peut la faire dépendre, soit de l'intégration du système (1) qui contient trois inconnues, soit de l'intégration du système (25) qui n'en contient plus que deux, il nous paraît intéressant de remarquer que l'on pourrait employer aussi le système (15) du numéro 1, où l'on supposerait $B = 1$, et qui deviendrait alors :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} 2\frac{d\lambda}{dt} &= \star + r\mu - q\nu - p\rho,\\ 2\frac{d\mu}{dt} &= -r\lambda \quad \star + p\nu - q\rho,\\ 2\frac{d\nu}{dt} &= q\lambda - p\mu \quad \star - r\rho,\\ 2\frac{d\rho}{dt} &= p\lambda + q\mu + r\nu \quad \star. \end{aligned}\right.$$

Ce système, qui détermine les paramètres quaternoniens du

déplacement, est linéaire comme les précédents. Il se rapproche du premier, en ce qu'il admet comme lui une intégrale quadratique et est, comme lui, identique à son adjoint; mais il contient une inconnue de plus.

Ainsi, on aura le choix entre trois systèmes, contenant respectivement quatre, trois ou deux inconnues.

CHAPITRE III.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES DEUX MÉTHODES EMPLOYÉES DANS LE CHAPITRE PRÉCÉDENT.

Étude des coordonnées, dites symétriques, sur la sphère. Forme de l'élément linéaire. Substitutions linéaires effectuées sur ces cordonnées qui reproduisent cet élément et transforment par conséquent une figure quelconque en une figure égale ou symétrique. — Formules qui expriment à l'aide des coordonnées symétriques la distance de deux points sur la sphère. — Définition de deux rapports anharmoniques attachés à un quadrilatère et explication géométrique de la réduction du problème traité au Chapitre précédent à l'intégration d'une seule équation de Riccati.

Réduction de tout déplacement fini à une même substitution linéaire fractionnaire effectuée sur les deux coordonnées symétriques. On montre, lorsque cette substitution est connue, comment on obtient les paramètres quaternoniens qui définissent le déplacement. — Système de coordonnées symétriques imaginaires conjuguées employé dans la théorie moderne des fonctions.

Étude du cône isotrope ou sphère de rayon nul. Cette sphère doit être considérée comme une surface double et, de plus, la distance de deux quelconques de ses points jouit de la même propriété que celle de deux points sur une droite : elle s'exprime rationnellement. — Généralisation du théorème de Ptolémée.

Roulement du cône isotrope sur lui-même. — Tout déplacement fini s'obtient en soumettant les coordonnées u et v de chaque point à une substitution linéaire de coefficients constants. Relations entre les paramètres quaternoniens du déplacement et les coefficients de cette substitution. — Déplacement infiniment petit. Système de deux équations différentielles linéaires rattaché à ce déplacement et permettant de déterminer le mouvement quand on connaît les expressions des rotations p, q, r en fonction du temps. Ce système est précisément celui que l'on a rencontré au Chapitre précédent. — Indications historiques.

---

23. Il nous paraît intéressant de justifier et d'expliquer par quelques considérations de Géométrie pure les résultats que nous avons obtenus au Chapitre précédent. A cet effet, nous commencerons par étudier ce système de coordonnées curvilignes x et y à l'aide desquelles on détermine tous les points de la sphère de rayon 1 et qui sont définies par les formules (9) du numéro 15.

Par un calcul élémentaire, ces formules nous permettent de

déterminer l'élément linéaire de toute courbe tracée sur la sphère et nous donnent

$$(1) \qquad d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \frac{4\,dx\,dy}{(x-y)^2}.$$

On voit que cet arc sera nul lorsque l'une des quantités x ou y restera constante, c'est-à-dire quand on se déplacera sur une des génératrices rectilignes de la sphère. C'est là un résultat bien connu et qui caractérise les coordonnées dites *symétriques*; mais la formule va nous conduire à d'autres conséquences.

On voit immédiatement que le second membre ne changera pas, soit quand on ajoutera une même quantité à x et à y, soit quand on les multipliera par un même nombre, soit quand on les remplacera par leurs inverses, soit enfin quand on les échangera. On est ainsi conduit à constater que le second membre se reproduit, soit lorsqu'on effectue sur x et sur y une même substitution définie par les formules

$$(2) \qquad x = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \qquad y = \frac{ay_1 + b}{cy_1 + d},$$

a, b, c, d étant des constantes, soit lorsque, après avoir effectué cette substitution, on échange x_1 et y_1, ce qui donne

$$(3) \qquad x = \frac{ay_1 + b}{cy_1 + d}, \qquad y = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}.$$

Dans l'un et l'autre cas, on a

$$\frac{4\,dx\,dy}{(x-y)^2} = \frac{4\,dx_1\,dy_1}{(x_1-y_1)^2}.$$

Il résulte de là que, si l'on considère sur la sphère la figure (F) décrite par le point (x, y), et la figure (F_1) décrite par le point (x_1, y_1), la distance de deux points infiniment voisins quelconques de la première figure sera toujours égale à la distance des points correspondants de l'autre; par conséquent, les triangles infiniment petits qui se correspondent dans les deux figures seront égaux ou symétriques; *les deux figures seront égales ou symétriques.*

24. Le résultat précédent a été déduit en faisant usage uniquement de l'équation (1), qui donne la distance de deux points

infiniment voisins sur la sphère. Mais on peut l'obtenir, et d'une manière plus nette, par l'emploi de la formule qui détermine, dans le système de coordonnées x, y, la distance de deux points *quelconques* de la sphère.

Soient, en effet, M, M′ deux points de coordonnées x, y; x', y'.

On aura, en désignant par MM′ l'arc de grand cercle qui les réunit, et en faisant usage des formules (9) (n° 15),

$$(4)\qquad \cos \mathrm{MM}' = \frac{-2xy - 2x'y' + (x+y)(x'+y')}{(x-y)(x'-y')},$$

d'où l'on déduira

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sin^2\dfrac{\mathrm{MM}'}{2} = \dfrac{(x-x')(y-y')}{(x-y)(x'-y')}, \qquad \cos^2\dfrac{\mathrm{MM}'}{2} = \dfrac{(x-y')(y-x')}{(x-y)(y'-x')}, \\ \tang^2\dfrac{\mathrm{MM}'}{2} = -\dfrac{(x-x')(y-y')}{(x-y')(y-x')}. \end{array}\right.$$

Ces formules, que j'ai données avec plusieurs autres en 1872 [1], peuvent servir de base à une étude fructueuse de la trigonométrie sphérique. On peut les écrire encore comme il suit

$$(5')\qquad \left\{\begin{array}{l} \sin^2\dfrac{\mathrm{MM}'}{2} = \mathcal{R}(x, y', x', y), \qquad \cos^2\dfrac{\mathrm{MM}'}{2} = \mathcal{R}(x, x', y', y), \\ \tang^2\dfrac{\mathrm{MM}'}{2} = -\mathcal{R}(x, y, x', y'), \end{array}\right.$$

$\mathcal{R}(a, b, c, d)$ désignant le rapport anharmonique des quantités a, b, c, d. D'après les propriétés de ce rapport, on reconnaît immédiatement que ces expressions demeurent invariables lorsqu'on applique aux coordonnées des deux points l'une ou l'autre des substitutions (2) ou (3). Ainsi ces substitutions ne changent pas la distance de deux points *quelconques* et, par conséquent, remplacent toute figure sphérique par une figure égale ou symétrique. Il est d'ailleurs très aisé de démontrer que la substitution (2) donne une figure égale à la proposée, tandis que la substitution (3) conduit à une figure symétrique.

En effet, dans les formules (2), faisant varier progressivement a, b, c, d de leurs valeurs actuelles aux valeurs suivantes 1, 0, 0, 1.

---

[1] Gaston Darboux, *Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 212.

La figure (F_1) se déplacera d'une manière continue et, comme elle est toujours égale ou symétrique à (F), elle demeurera toujours superposable à sa disposition primitive. Or, pour les valeurs extrêmes de a, b, c, d, la substitution (2) se réduit à la suivante :

$$x = x_1, \qquad y = y_1.$$

La figure (F_1) est venue coïncider avec la figure F; et, par conséquent, *les deux figures sont égales.*

Si l'on emploie au contraire la substitution (3), on peut remarquer qu'elle résulte de la composition de la première (2), qui remplace toute figure (F) par une figure égale, avec la suivante :

$$x = y_1, \qquad y = x_1.$$

Il suffit de se reporter aux formules (9) (n° 15) pour reconnaître que cette dernière substitution remplace un point de la sphère par le point diamétralement opposé, c'est-à-dire la substitution (F) par une de ses symétriques; il en sera donc de même de la substitution générale définie par les formules (3).

25. Il résulte de ce qui précède que, si l'on considère sur la sphère un quadrilatère quelconque qui se déplace sans se déformer, les quatre coordonnées x ou les quatre coordonnées y de ses sommets seront soumises, dans le passage d'une position à une autre, à une même substitution linéaire. *Leur rapport anharmonique demeurera donc constant.* En d'autres termes, ces deux rapports anharmoniques, qui sont imaginaires conjugués, ne dépendent que de la forme du quadrilatère. On en connaît plusieurs expressions élégantes, que je ne m'arrêterai pas à établir. Il nous suffira de savoir qu'ils demeurent constants quand le quadrilatère se déplace sans se déformer.

D'après cela, revenons au système (1) du Chapitre précédent et considérons-y α, β, γ comme les coordonnées rectangulaires d'un point de la sphère. A chaque solution du système (1) correspondra une certaine courbe décrite par ce point. Il résulte des propositions établies tout d'abord (n°s 2 et 14) que, si deux points de la sphère représentent deux solutions particulières distinctes du système (1), ils demeurent toujours à une distance invariable l'un de l'autre; donc, si quatre points décrivent dans leur mouvement les courbes

qui correspondent à quatre solutions particulières différentes, ils formeront une figure invariable; et le rapport anharmonique des quatre valeurs paticulières de x ou de y qui correspondent à ces quatre points sera constant. Chacune de ces variables, considérée comme une fonction de t, devra donc satisfaire à une équation de Riccati (n° 16).

Il reste à montrer pourquoi la seconde coordonnée y satisfait à la même équation que la première. Pour cela, il suffit de remarquer que, si un point M de la sphère donne une solution du système (1) (n° 13), il en sera de même du point diamétralement opposé, qui correspond à des valeurs de α, β, γ changées de signe. Or, on passe de l'un de ces points à l'autre en échangeant x et y; ces deux coordonnées doivent donc satisfaire à la même équation différentielle.

26. Les résultats analytiques du Chapitre précédent sont ainsi complètement expliqués. Mais, puisque nous avons montré que tout déplacement autour d'un point fixe peut se définir à l'aide d'une même substitution linéaire, effectuée sur les coordonnées symétriques x et y, il importe que nous indiquions comment on rattachera cette substitution aux formules générales de transformation des coordonnées.

Reprenons les formules

$$(6) \qquad \alpha = \frac{1 - xy}{x - y}, \qquad \beta = i\frac{1 + xy}{x - y}, \qquad \gamma = \frac{x + y}{x - y},$$

qui donnent les coordonnées rectangulaires α, β, γ en fonction de x et de y. Si l'on effectue sur x, y les substitutions définies par les formules

$$(7) \qquad x = \frac{mx_1 + n}{px_1 + q}, \qquad y = \frac{my_1 + n}{py_1 + q},$$

et si l'on désigne par α_1, β_1, γ_1 les coordonnées rectangulaires qui correspondent à x_1, y_1, on trouvera, après un calcul qui ne présente aucune difficulté,

$$(8) \qquad \begin{cases} \alpha = a\,\alpha_1 + b\,\beta_1 + c\,\gamma_1, \\ \beta = a'\alpha_1 + b'\beta_1 + c'\gamma_1, \\ \gamma = a''\alpha_1 + b''\beta_1 + c''\gamma_1, \end{cases}$$

a, b, c ayant les valeurs suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} a = \dfrac{q^2+m^2-n^2-p^2}{2\mathrm{B}}, & b = i\dfrac{m^2+n^2-p^2-q^2}{2\mathrm{B}}, & c = \dfrac{pq-mn}{\mathrm{B}}, \\ a' = i\dfrac{q^2+n^2-m^2-p^2}{2\mathrm{B}}, & b' = \dfrac{m^2+n^2+p^2+q^2}{2\mathrm{B}}, & c' = i\dfrac{pq+mn}{\mathrm{B}}, \\ a'' = \dfrac{nq-mp}{\mathrm{B}}, & b'' = -i\dfrac{mp+nq}{\mathrm{B}}, & c'' = \dfrac{mq+np}{\mathrm{B}}, \end{cases}$$

où B désigne le déterminant de la substitution

$$(10)\qquad \mathrm{B} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}.$$

Il est aisé de reconnaître sur ces formules que les neuf éléments a, b, c, ... sont les coefficients d'une substitution linéaire de déterminant 1, ce qui démontre une fois de plus notre théorème fondamental.

Pour identifier les expressions (9) de ces cosinus à celles que nous avons rappelées plus haut (n° 1), il suffira de poser

$$(11)\qquad \begin{cases} m = \rho - i\nu, & n = \mu - i\lambda, \\ p = -\mu - i\lambda, & q = \rho + i\nu, \end{cases}$$

ce qui donnera

$$(12)\qquad \mathrm{B} = mq - np = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2.$$

Si donc on veut trouver les paramètres quaternioniens du déplacement défini par la substitution (7), on aura les valeurs suivantes :

$$(13)\quad \begin{cases} \lambda = \cos\alpha_1 \sin\dfrac{\theta}{2} = i\dfrac{n+p}{2\sqrt{\mathrm{B}}}, \\ \mu = \cos\beta_1 \sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{n-p}{2\sqrt{\mathrm{B}}}, \qquad \left(\rho = \cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{m+q}{2\sqrt{\mathrm{B}}}\right). \\ \nu = \cos\gamma_1 \sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{m-q}{2\sqrt{\mathrm{B}}}, \end{cases}$$

Ces formules font connaître à la fois la direction $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ de l'axe de rotation et la grandeur θ de la rotation. On en déduit, en particulier,

$$(14)\qquad 4\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{(m+q)^2}{mq-np}.$$

Les formules (11) montrent que, pour tout déplacement réel, on peut supposer que m et q, n et $-p$ soient imaginaires conjugués. C'est ce qu'il serait aisé d'établir directement. Car, si dans les formules (7) on change i en $-i$, il faut y remplacer x, y, x_1, y_1 par $-\frac{1}{y}$, $-\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{y_1}$, $-\frac{1}{x_1}$ respectivement, m, n, p, q par leurs imaginaires conjuguées m_0, n_0, p_0, q_0. La première devient donc

$$y = \frac{q_0 y_1 - p_0}{m_0 - n_0 y_1}.$$

Pour que cette relation soit identique à la seconde formule (7), il faut qu'on ait

$$\frac{q_0}{m} = \frac{p_0}{-n} = \frac{-n_0}{p} = \frac{m_0}{q};$$

ce qui permet de supposer

$$p = -n_0, \qquad q = m_0.$$

On pourrait également déterminer l'axe de rotation en remarquant que le point où il perce la sphère de rayon 1 doit se correspondre à lui-même. On l'obtiendra donc en faisant, dans les formules (7),

$$x = x_1, \qquad y = y_1,$$

ce qui conduira à l'unique équation du second degré

$$px^2 + (q - m)x - p = 0,$$

qui détermine à la fois x et y. Si x' et y' désignent les deux racines de cette équation, on aura les quatre points

$$\begin{array}{llll} x = x', & y = y'; & x = y', & y = x'; \\ x = x', & y = x'; & x = y', & y = y'. \end{array}$$

Les deux derniers sont à l'infini. Les deux premiers sont, au contraire, à distance finie et diamétralement opposés.

On voit ainsi que le déplacement peut être considéré comme une transformation homographique de la sphère qui laisse invariables quatre points de la surface dont deux à l'infini.

27. Dans la théorie des fonctions et dans différentes recherches de Géométrie, il peut être avantageux de modifier le système de

coordonnées symétriques x, y et de substituer à y la variable

$$x_0 = -\frac{1}{y}. \tag{15}$$

On a alors pour α, β, γ les expressions

$$\alpha = \frac{x + x_0}{1 + xx_0}, \qquad \beta = i\,\frac{x_0 - x}{1 + xx_0}, \qquad \gamma = \frac{xx_0 - 1}{xx_0 + 1}, \tag{16}$$

et l'équation (1) prend la forme

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \frac{4\,dx\,dx_0}{(1 + xx_0)^2}. \tag{17}$$

Ce nouveau système offre le grand avantage de donner pour tout point réel des coordonnées imaginaires conjuguées; mais d'autre part un déplacement n'est plus représenté par la même substitution linéaire effectuée sur les deux variables.

28. Après avoir étudié le déplacement d'une sphère de rayon fini, considérons la sphère de rayon nul, ou cône isotrope, défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0. \tag{18}$$

On peut, comme nous l'avons vu au n° **21**, exprimer les coordonnées d'un de ses points en fonction de deux variables u et v par les formules

$$X = u^2 - v^2, \qquad Y = i(u^2 + v^2), \qquad Z = 2uv. \tag{19}$$

A chaque point de la surface correspondent deux systèmes de valeurs u, v et $-u$, $-v$. A la différence de la sphère de rayon fini, la sphère du rayon nul peut donc être considérée en quelque sorte comme une surface *double*. On passe d'un point au point imaginaire conjugué à l'aide de la substitution

$$u \mid iv_0, \quad v \mid -iu_0,$$

où u_0, v_0 désignent les quantités imaginaires conjuguées de u et de v. Comme on a

$$\frac{X + iY}{-Z} = \frac{v}{u}, \qquad \frac{X - iY}{Z} = \frac{u}{v}, \tag{20}$$

on voit que, si u et v varient en conservant le même rapport, on

obtient tous les points situés sur une même génératrice rectiligne du cône isotrope.

Cherchons la distance de deux points quelconques M, M_1, de la surface ayant respectivement pour coordonnées curvilignes u, v et u_1, v_1.

Si l'on désigne par d_{01} cette distance, on aura

$$d_{01}^2 = (X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + (Z - Z_1)^2 = 4(uv_1 - vu_1)^2.$$

En extrayant la racine carrée, on trouve la formule fondamentale

$$d_{01} = 2(uv_1 - vu_1). \tag{21}$$

Nous voyons ici se reproduire, pour la sphère de rayon nul, cette propriété si importante des distances comptées sur une même droite. La distance MM_1 de deux points du cône isotrope est *une fonction rationnelle* et, par suite, peut être affectée d'un signe qui change quand on échange les deux points.

Voici une conséquence particulière de l'équation (21). Si l'on prend quatre points quelconques M_1, M_2, M_3, M_4 sur le cône isotrope, une propriété bien connue des déterminants donne, entre leurs distances mutuelles, la relation

$$d_{12}d_{34} + d_{13}d_{42} + d_{14}d_{23} = 0.$$

C'est la relation entre les distances mutuelles exprimée par le célèbre théorème de Ptolémée relatif au quadrilatère inscriptible. Ainsi :

Si la sphère circonscrite à un tétraèdre a son rayon nul, on a, entre les arêtes de ce tétraèdre, la relation

$$aa' \pm bb' \pm cc' = 0,$$

a, a'; b, b'; c, c' désignant les trois couples d'arêtes opposées de ce tétraèdre.

Si le tétraèdre se réduit à un quadrilatère plan inscriptible dans un cercle, il y a deux sphères de rayon nul contenant ce cercle, et l'on retrouve le théorème de Ptolémée.

La formule (21) nous permet encore d'obtenir la signification géométrique des variables u et v. Si nous faisons, en effet, coïncider

le point M_1 avec le point A qui correspond aux valeurs

$$u_1 = 0, \qquad v_1 = 1,$$

il vient

$$MA = 2u;$$

si l'on prend

$$u_1 = -1, \qquad v_1 = 0,$$

on a un point B, et la formule (21) nous donne

$$MB = 2v.$$

Ainsi, $2u$, $2v$ désignent les distances à deux points fixes du cône isotrope.

Les coordonnées rectangulaires du point A sont

$$x = -1, \qquad y = i, \qquad z = 0.$$

Celles du point B sont

$$x = 1, \qquad y = i, \qquad z = 0.$$

Ce sont les deux points d'intersection du cône isotrope avec la droite

$$z = 0, \qquad y = i.$$

29. A l'aide de l'équation (21), on peut encore obtenir les formules relatives à un déplacement quelconque autour de l'origine. Dans ce déplacement, en effet, le cône isotrope glisse sur lui-même, et la distance de deux quelconques de ses points doit demeurer invariable. Soient u, v; u', v' les coordonnées de deux points M, M' et u_1, v_1; u'_1, v'_1 celles de leurs nouvelles positions. On doit avoir

$$uv' - vu' = \pm(u_1 v'_1 - v_1 u'_1). \tag{22}$$

Donnons au point M' deux positions particulières, nous aurons deux relations qui nous permettront évidemment d'exprimer u, v en fonction linéaire de u_1, v_1.

Soient

$$\begin{cases} v = mv_1 + nu_1, \\ u = pv_1 + qu_1 \end{cases} \tag{23}$$

ces deux relations. D'après la formule (22), les constantes m, n,

p, q devront satisfaire à la condition

$$mq - np = \pm 1.$$

Mais comme le déplacement peut être réalisé d'une manière continue, il faut que l'équation précédente puisse être vérifiée par des valeurs de m, q très voisines de $+1$ ou de -1 et des valeurs de n, p très voisines de zéro. Donc, en vertu de la continuité, on aura, dans le cas d'un déplacement,

$$mq - np = +1. \tag{24}$$

Passons des coordonnées curvilignes aux coordonnées rectangulaires et posons

$$\left\{\begin{array}{lll} x = u^2 - v^2, & y = i(u^2 + v^2), & z = 2uv, \\ x_1 = u_1^2 - v_1^2, & y_1 = i(u_1^2 + v_1^2), & z_1 = 2u_1 v_1, \end{array}\right. \tag{25}$$

nous retrouvons des formules

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1, \\ y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \\ z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1, \end{array}\right. \tag{26}$$

où les neuf coefficients ont précisément les valeurs définies par les formules (9), si l'on tient compte de l'équation

$$B = 1.$$

Par suite, ces formules définissent bien un déplacement, et si l'on pose, conformément aux équations (11) du n° **26**,

$$\left\{\begin{array}{ll} m = \rho - i\nu, & n = \mu - i\lambda, \\ q = \rho + i\nu, & p = -\mu - i\lambda, \end{array}\right. \tag{27}$$

ce qui donnera ici

$$B = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1; \tag{28}$$

on reconnaîtra que λ, μ, ν, ρ sont les paramètres quaternioniens de la rotation par laquelle on passe du système des points (x, y, z) au système (x_1, y_1, z_1), et l'on aura

$$\lambda = \sin\frac{\theta}{2}\cos\alpha_1, \qquad \mu = \frac{\sin\theta}{2}\cos\beta_1, \qquad \nu = \frac{\sin\theta}{2}\cos\gamma_1, \qquad \rho = \cos\frac{\theta}{2}. \tag{29}$$

Les formules qui définissent le déplacement pourront s'écrire

$$(30)\qquad \begin{cases} v = -(\rho - i\nu)\, v_1 + (\mu - i\lambda)\, u_1, \\ u = -(\mu + i\lambda)\, v_1 + (\rho + i\nu)\, u_1, \end{cases}$$

ou, si on les résout par rapport à u_1, v_1,

$$(31)\qquad \begin{cases} u_1 = (\rho - i\nu)\, u + (\mu + i\lambda)\, v, \\ v_1 = -(\mu - i\lambda)\, u + (\rho + i\nu)\, v. \end{cases}$$

30. Examinons maintenant ce qui concerne les déplacements infiniment petits et, en particulier, la méthode du trièdre mobile.

Envisageons un trièdre mobile $Oxyz$ et soient x, y, z les coordonnées par rapport à ce trièdre (T) d'un point fixe dans l'espace.

Si nous exprimons que la vitesse de ce point est nulle, nous aurons les équations

$$\frac{dx}{dt} + qz - ry = 0, \qquad \frac{dy}{dt} + rx - pz = 0, \qquad \frac{dz}{dt} + py - qx = 0.$$

Si ce point fixe appartient au cône isotrope de sommet O, ses coordonnées seront

$$(32)\qquad x = u^2 - v^2, \qquad y = i(u^2 + v^2), \qquad z = 2uv.$$

En exprimant qu'elles vérifient les équations précédentes, on sera conduit aux deux équations

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{ir}{2}\, u - \dfrac{q + ip}{2}\, v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{ir}{2}\, v + \dfrac{q - ip}{2}\, u, \end{cases}$$

propres à déterminer u et v. C'est le système que nous avons obtenu au Chapitre précédent pour remplacer notre équation de Riccati (n° 21).

Il est facile de voir que son intégration complète nous permettra de déterminer sans ambiguïté le mouvement du trièdre mobile. Supposons, en effet, cette intégration effectuée. Nous pourrons déterminer alors sans difficulté deux solutions particulières du système par les conditions suivantes :

Pour la première

$$u = \alpha, \qquad v = \beta,$$

α se réduira à 1, et β à zéro, pour la valeur initiale de t, par exemple pour $t = 0$. De même, pour la seconde

$$u = \gamma, \qquad v = \delta,$$

γ se réduira à zéro et δ à 1 pour $t = 0$. Comme le déterminant des deux solutions

$$\alpha\delta - \beta\gamma$$

est constant, et comme sa valeur initiale est 1, on aura

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{34}$$

pour toutes les valeurs de t.

D'après cela, si l'on se donne les valeurs initiales, d'ailleurs quelconques, u' et v' de u et de v, les expressions de u et de v seront données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} u &= \alpha u' + \gamma v', \\ v &= \beta u' + \delta v', \end{aligned}\right. \tag{35}$$

qu'on peut résoudre par rapport à u', v', ce qui donne

$$\left\{\begin{aligned} u' &= \delta u - \gamma v, \\ v' &= -\beta u + \alpha v. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Ces dernières formules feront connaître le mouvement du trièdre mobile, car elles définissent le déplacement par lequel on passe de la position initiale d'un point (u', v') sur le cône isotrope à sa position finale (u, v). On obtiendra donc les paramètres quaternioniens de ce déplacement en identifiant les formules (36) aux formules (30), ce qui donnera

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \rho - i\nu, & \gamma &= \mu + i\lambda, \\ \beta &= -\mu + i\lambda, & \delta &= \rho + i\nu, \end{aligned}\right. \tag{37}$$

et de là on déduira sans peine les valeurs de λ, μ, ν, ρ

$$\lambda = -i\frac{\beta+\gamma}{2}, \qquad \mu = \frac{\gamma-\beta}{2}, \qquad \nu = i\frac{\alpha-\delta}{2}, \qquad \rho = \frac{\alpha+\delta}{2}. \tag{38}$$

Dans le cas où p, q, r sont des fonctions réelles de t, on a

$$\gamma = -\beta_0, \qquad \delta = \alpha_0;$$

α_0, β_0 désignant les quantités imaginaires conjuguées de α et de β.

En sorte que, pour avoir la solution *complète* du problème, il suffira de déterminer la solution particulière du système (33) pour laquelle les valeurs initiales de u et de v sont

$$u = 1, \qquad v = 0.$$

C'est ce que l'on pourra toujours obtenir si l'on connaît une solution particulière quelconque; car alors on pourra en faire dériver (n° 22) la solution générale.

31. La représentation d'une rotation finie par une substitution linéaire était connue de Gauss; elle a été employée occasionnellement par Riemann dans le célèbre Mémoire : *Ueber die Flächen von kleinsten Inhalte bei gegebener Begrenzung;* mais c'est surtout M. Félix Klein qui l'a utilisée et en a montré toute l'importance dans ses Mémoires insérés aux tomes IX à XII des *Mathematische Annalen*, dans ses *Vorlesungen über Ikosaeder* et dans l'Ouvrage *Ueber die Theorie des Kreisels*, qu'il a publié en collaboration avec M. A. Sommerfeld. Le lecteur désireux d'approfondir cette théorie et d'étudier ses rapports avec celles des quaternions pourra aussi consulter le travail inséré dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (t. IX, 2e série, 1905) : *Sur la sphère de rayon nul et sur la théorie du déplacement d'une figure invariable.* Ce Mémoire est un résumé des leçons que l'auteur a faites à la Sorbonne en 1900 et 1904.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

Extension de la théorie de Poinsot. — Détermination des mouvements dans lesquels il y a deux relations, données à l'avance, entre les rotations. — Détermination des courbes gauches dont la courbure et la torsion satisfont à une relation donnée. — Étude du cas où cette relation est linéaire. — Courbes à torsion constante.

---

32. Avant de continuer l'exposition de la théorie générale, nous allons faire quelques applications des propositions qui précèdent. Reprenons le système

$$(1)\qquad \frac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q, \qquad \frac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p,$$

auquel satisfont les cosinus des angles que fait une droite fixe avec les axes mobiles. On sait que, lorsqu'un corps solide se meut autour d'un point fixe sans être soumis à l'action d'aucune force, le système précédent est vérifié si l'on substitue à α, β, γ les dérivées $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$, $\frac{\partial f}{\partial r}$ d'une fonction $f(p, q, r)$, homogène et du second degré, qui représente la demi-force vive totale du corps.

Cherchons tous les mouvements jouissant d'une propriété analogue, c'est-à-dire pour lesquels le système (1) admet la solution

$$(2)\qquad \alpha = \frac{\partial f}{\partial p}, \qquad \beta = \frac{\partial f}{\partial q}, \qquad \gamma = \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Mais ici $f(p, q, r)$ ne sera plus assujettie à être homogène et du second degré. Comme α, β, γ et les dérivées de f se transforment par la même substitution, quand on effectue un changement des axes mobiles, il est évident que la propriété précédente est indépendante du choix des axes.

En écrivant que le système (1) est vérifié par les valeurs (2) de

α, β, γ, nous aurons les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial p}\right) = r\dfrac{\partial f}{\partial q} - q\dfrac{\partial f}{\partial r}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right) = p\dfrac{\partial f}{\partial r} - r\dfrac{\partial f}{\partial p}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) = q\dfrac{\partial f}{\partial p} - p\dfrac{\partial f}{\partial q}; \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$pd\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) + qd\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) + rd\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = 0.$$

On a donc, en intégrant,

$$(4)\qquad p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q} + r\frac{\partial f}{\partial r} - f = \text{const.},$$

équation à laquelle il faut joindre la suivante :

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 = 1,$$

qui exprime que α, β, γ sont des cosinus directeurs.

En portant les valeurs de p, q tirées de ces équations (4) et (5) en fonction de r dans l'une des équations (3), on aura le temps par une quadrature. Après avoir obtenu ainsi les expressions de p, q, r en fonction du temps, on achèvera, au moyen d'une seule quadrature, l'intégration du système (1) dont on connaît déjà la solution particulière fournie par les équations (2).

La solution est, on le voit, toute pareille à celle que l'on a donnée dans l'étude du mouvement d'un corps solide abandonné à lui-même; mais l'analogie est plus complète encore, si l'on suppose que la fonction f soit homogène. Alors l'équation (4) se réduit à la suivante

$$f(p, q, r) = \text{const.},$$

et l'on peut représenter le mouvement en faisant rouler sur un plan fixe la surface invariablement liée aux axes mobiles dont l'équation, par rapport à ces axes, est

$$f(x, y, z) = 1.$$

Si l'on suppose que f soit entière et du second degré, on retrouve ainsi la solution de Poinsot.

33. Comme deuxième application, proposons-nous de déterminer les mouvements dans lesquels il y a deux relations données à l'avance

$$(6) \qquad f(p, q, r) = 0, \qquad \varphi(p, q, r) = 0,$$

entre les trois rotations. Nous allons donner d'abord une méthode géométrique indiquant le degré de difficulté de ce problème. Dans la représentation de Poinsot, le mouvement est obtenu si l'on fait rouler le cône (γ), lieu de l'axe instantané de rotation dans le corps mobile, sur un cône fixe (C). Or, les deux équations précédentes, déterminant le lieu décrit dans le corps par l'extrémité de l'axe instantané, nous font connaître par cela même le cône (γ). Quant au cône (C), prenons-le arbitrairement, mais de telle manière que la section de ce cône, par la sphère de rayon 1, soit la développée sphérique d'une courbe arbitraire tracée sur cette sphère, ce qui permet d'obtenir l'arc de cette section sans aucune quadrature; puis faisons rouler le cône (γ) sur le cône (C). Les équations que nous aurons à écrire pour exprimer ce mouvement contiendront évidemment la quadrature qui donne l'arc de la courbe d'intersection du cône (γ) par la sphère de rayon 1. Pour une position quelconque du cône (γ), l'axe instantané sera la génératrice de contact de ce cône avec le cône (C), et les rapports de p, q, r seront connus. Les équations (6) nous feront donc connaître les grandeurs de ces rotations. En exprimant que le cône (γ) roule à chaque instant avec la vitesse ainsi obtenue, on aura à effectuer une nouvelle quadrature qui déterminera le temps.

Ainsi, le calcul peut être dirigé de telle manière que l'on n'ait à effectuer que deux quadratures. On arrive à des résultats équivalents par la méthode analytique suivante.

34. Supposons trois des neuf cosinus, a, b, c par exemple, exprimés en fonction des deux variables x et y par les formules (6) (n° 26). Si a, b, c sont réels, x et y seront des imaginaires de la forme

$$x = h + ki, \qquad y = -\frac{1}{h - ki}.$$

En exprimant que ces deux quantités vérifient l'équation de Riccati (11) (n° 15), on a deux relations; elles sont identiques à

celles que l'on obtient en substituant seulement la valeur de x et égalant les parties réelles et les parties imaginaires

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = \quad rk + \dfrac{q}{2}(1 + h^2 - k^2) - phk, \\ \dfrac{dk}{dt} = -rh + qhk - \dfrac{p}{2}(1 + k^2 - h^2). \end{cases}$$

Éliminons p, q, r entre les équations (6) et (7), nous serons ainsi conduit à une équation de la forme

$$F\left(h, k, \frac{dh}{dt}, \frac{dk}{dt}\right) = 0.$$

Et, si l'on prend pour k, par exemple, une fonction arbitraire de h, cette équation fera connaître le temps t par une quadrature. Nous connaissons trois des neuf cosinus, a, b, c. Une dernière quadrature nous fera connaître les six autres. Les résultats ainsi obtenus coïncident, on le voit, avec ceux que nous a fournis la méthode géométrique.

35. Nous avons vu que, si l'on considère une courbe gauche quelconque et si l'on étudie le mouvement du trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale en un point, on aura, en supposant que l'origine de ce trièdre décrit l'unité d'arc dans l'unité de temps,

$$p = \frac{1}{\tau}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{1}{\rho},$$

ρ et τ désignant les rayons de courbure et de torsion. Proposons-nous de déterminer toutes les courbes pour lesquelles il y a une relation donnée à l'avance entre la courbure et la torsion

$$f\left(\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\rho}\right) = 0.$$

Cela reviendra à déterminer le mouvement d'un trièdre dans lequel on a, entre les rotations, les deux relations

$$(8)\qquad q = 0, \qquad f(p, r) = 0.$$

En appliquant la méthode générale donnée plus haut, on aura les expressions des neuf cosinus qui déterminent la position du trièdre mobile, en fonction de l'arc de la courbe qui, ici, est égal au temps; puis, on déterminera les coordonnées rectangulaires x,

y, z du point de la courbe, sommet du trièdre, par les formules

$$\frac{dx}{ds} = a, \qquad \frac{dy}{ds} = a', \qquad \frac{dz}{ds} = a'',$$

qui donneront

$$x = \int a\,ds, \qquad y = \int a'\,ds, \qquad z = \int a''\,ds.$$

36. La méthode que nous venons d'indiquer, et qui est générale, est susceptible de simplifications dans certains cas particuliers.

Supposons, par exemple, que l'on demande les courbes dont la torsion est constante. Les formules de J.-A. Serret

$$\frac{dc}{ds} = -\frac{b}{\tau}, \qquad \frac{dc'}{ds} = -\frac{b'}{\tau}, \qquad \frac{dc''}{ds} = -\frac{b''}{\tau}$$

nous donnent b, b', b'' en fonction des dérivées de c. Si l'on porte ces valeurs dans les relations entre les neuf cosinus

$$a = b'c'' - c'b'', \qquad a' = b''c - bc'', \qquad a'' = bc' - cb',$$

on trouve

$$a = \tau\left(c'\frac{dc''}{ds} - c''\frac{dc'}{ds}\right),$$
$$a' = \tau\left(c''\frac{dc}{ds} - c\frac{dc''}{ds}\right),$$
$$a'' = \tau\left(c\frac{dc'}{ds} - c'\frac{dc}{ds}\right).$$

On aura, par suite, pour les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe, les formules

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \int a\,ds = \tau\int(c'\,dc'' - c''\,dc'),\\ y &= \int a'\,ds = \tau\int(c''\,dc - c\,dc''),\\ z &= \int a''\,ds = \tau\int(c\,dc' - c'\,dc),\end{aligned}\right.$$

c, c', c'' étant trois fonctions d'une seule variable assujetties à l'unique condition

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1.$$

Si, par exemple, on pose

$$\frac{c}{h} = \frac{c'}{k} = \frac{c''}{l} = \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}},$$

on aura

$$(9') \quad \begin{cases} x = \tau \int \dfrac{k\,dl - l\,dk}{h^2 + k^2 + l^2}, \\ y = \tau \int \dfrac{l\,dh - h\,dl}{h^2 + k^2 + l^2}, \\ z = \tau \int \dfrac{h\,dk - k\,dh}{h^2 + k^2 + l^2}. \end{cases}$$

Ces formules coïncident, aux notations près, avec celles que J.-A. Serret a données dans la 5e édition de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* de Monge, p. 566.

37. Une méthode analogue s'applique à la détermination des courbes dont le rayon de première courbure est constant. Reprenons, en effet, les formules

$$\frac{dx}{ds} = a, \qquad \frac{da}{ds} = \frac{b}{\rho}.$$

On en déduit

$$\frac{ds}{\rho} = \sqrt{da^2 + da'^2 + da''^2}$$

et, par conséquent,

$$dx = a\rho\sqrt{da^2 + da'^2 + da''^2}.$$

On aura donc, pour les trois coordonnées d'un point de la courbe cherchée,

$$(10) \quad \begin{cases} x = \rho \int a\,d\sigma, \\ y = \rho \int a'\,d\sigma, \\ z = \rho \int a''\,d\sigma, \end{cases}$$

$d\sigma$ désignant la différentielle de l'arc de la courbe sphérique décrite par le point (a, a', a''). Le centre de courbure aura pour coordonnées les valeurs suivantes :

$$(11) \quad \begin{cases} x_1 = x + b\,\rho = \rho\dfrac{da}{d\sigma} + \rho\displaystyle\int a\,d\sigma, \\ y_1 = y + b'\rho = \rho\dfrac{da'}{d\sigma} + \rho\displaystyle\int a'\,d\sigma, \\ z_1 = z + b''\rho = \rho\dfrac{da''}{d\sigma} + \rho\displaystyle\int a''\,d\sigma, \end{cases}$$

et il est aisé de vérifier, conformément aux résultats du n° 11, que le lieu de ce point est aussi une courbe dont la première courbure est constante et égale à celle de la première.

38. Enfin, si l'on cherche les courbes jouissant de la propriété signalée par J. Bertrand (n° 10) et dont les deux courbures sont liées par l'équation

$$\frac{m}{\rho} + \frac{n}{\tau} = 1, \tag{12}$$

on posera

$$\left\{\begin{aligned} ma - nc &= \alpha\sqrt{m^2+n^2}, \\ ma' - nc' &= \alpha'\sqrt{m^2+n^2}, \\ ma'' - nc'' &= \alpha''\sqrt{m^2+n^2}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

α, α', α'' étant trois fonctions évidemment assujetties à la relation

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1,$$

les formules de Serret

$$\frac{da}{ds} = \frac{b}{\rho}, \qquad \frac{dc}{ds} = -\frac{b}{\tau}$$

nous donneront, en tenant compte de la relation (12),

$$\sqrt{m^2+n^2}\,\frac{d\alpha}{ds} = b, \qquad \sqrt{m^2+n^2}\,\frac{d\alpha'}{ds} = b', \qquad \sqrt{m^2+n^2}\,\frac{d\alpha''}{ds} = b''. \tag{14}$$

Puis on aura

$$\begin{aligned} na + mc &= n(b'c'' - c'b'') + m(a'b'' - b'a'') \\ &= (m^2+n^2)\left(\alpha'\frac{d\alpha''}{ds} - \alpha''\frac{d\alpha'}{ds}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

et de même

$$\left\{\begin{aligned} na' + mc' &= (m^2+n^2)\left(\alpha''\frac{d\alpha}{ds} - \alpha\frac{d\alpha''}{ds}\right), \\ na'' + mc'' &= (m^2+n^2)\left(\alpha\frac{d\alpha'}{ds} - \alpha'\frac{d\alpha}{ds}\right). \end{aligned}\right. \tag{15'}$$

Les relations (13) et (15) nous permettent de déterminer a, a',

a''; c, c', c'' et nous donnent

$$(16)\quad \begin{cases} a = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\alpha + n\left(\alpha'\dfrac{d\alpha''}{ds} - \alpha''\dfrac{d\alpha'}{ds}\right), \\ a' = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\alpha' + n\left(\alpha''\dfrac{d\alpha}{ds} - \alpha\dfrac{d\alpha''}{ds}\right), \\ a'' = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\alpha'' + n\left(\alpha\dfrac{d\alpha'}{ds} - \alpha'\dfrac{d\alpha}{ds}\right). \end{cases}$$

Des formules (14) nous déduisons d'ailleurs

$$ds^2 = (m^2+n^2)(d\alpha^2 + d\alpha'^2 + d\alpha''^2).$$

On aura donc les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe par l'emploi des équations

$$x = \int a\,ds, \qquad y = \int a'\,ds, \qquad z = \int a''\,ds,$$

ce qui conduit au résultat définitif

$$(17)\quad \begin{cases} d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\alpha'^2 + d\alpha''^2}, \\ x = m\int \alpha\,d\sigma + n\int(\alpha'\,d\alpha'' - \alpha''\,d\alpha'), \\ y = m\int \alpha'\,d\sigma + n\int(\alpha''\,d\alpha - \alpha\,d\alpha''), \\ z = m\int \alpha''\,d\sigma - n\int(\alpha\,d\alpha' - \alpha'\,d\alpha). \end{cases}$$

Suivant que l'on fera m ou n égal à zéro, on retrouvera les formules (9) ou (10); α, α', α'' sont d'ailleurs, nous l'avons vu, trois fonctions d'une seule variable assujetties à l'unique relation

$$(18)\qquad \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1.$$

Les formules précédentes s'établiraient aussi très aisément par l'emploi de la Géométrie.

39. Des trois systèmes (9), (10), (17), le plus simple est le système (9), qui détermine les courbes dont la torsion est constante. Nous allons l'appliquer à la recherche de la courbe à torsion constante, dont l'indicatrice sphérique est une conique sphérique. On reconnaîtra aisément que, si par le centre de la

sphère de rayon 1 on mène une parallèle à la binormale, cette parallèle coupera la sphère en un point dont les coordonnées seront c, c', c'', et qui décrira une ellipse sphérique supplémentaire de l'indicatrice sphérique.

En choisissant convenablement les axes, on pourra donc obtenir pour h, k, l les expressions très simples

$$h=\sqrt{\frac{a(a-\rho)}{(a-b)(a-c)}},\qquad k=\sqrt{\frac{b(b-\rho)}{(b-a)(b-c)}},\qquad l=\sqrt{\frac{c(c-\rho)}{(c-a)(c-b)}},$$

qui conviennent à la courbe située sur le cône

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=0,$$

et, en portant ces valeurs de h, k, l dans les formules (9), on aura le système

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{\tau}{2}\sqrt{\frac{bc}{(a-b)(c-a)}}\int\frac{d\rho}{\sqrt{(b-\rho)(c-\rho)}},\\ y&=\frac{\tau}{2}\sqrt{\frac{ac}{(b-c)(a-b)}}\int\frac{d\rho}{\sqrt{(a-\rho)(c-\rho)}},\\ z&=\frac{\tau}{2}\sqrt{\frac{ab}{(a-c)(c-b)}}\int\frac{d\rho}{\sqrt{(a-\rho)(b-\rho)}},\end{aligned}\right.$$

qui définit la courbe cherchée.

Dans la première édition de cet Ouvrage, j'avais appelé l'attention sur les courbes à torsion constante et sur l'intérêt qu'il y aurait à déterminer celles qui sont *algébriques*. Cet appel a suscité un grand nombre de recherches; j'ai exposé celles qui m'ont paru le plus intéressantes pour la Géométrie dans la Note IV de la quatrième Partie de cet Ouvrage, à laquelle je renverrai le lecteur désireux de poursuivre cette étude.

CHAPITRE V.

DES DÉPLACEMENTS A PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

Différentes recherches de géométrie exigent la considération de déplacements qui dépendent, non plus d'un seul paramètre, mais de plusieurs paramètres distincts. On commence ici l'étude de ces déplacements et l'on suppose d'abord que le système mobile, dont la position dépend de n paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_n$, ait un point fixe. Introduction de ce qu'on peut appeler les rotations partielles dans l'étude du déplacement infiniment petit. Équations aux dérivées partielles linéaires qui relient les neuf cosinus aux rotations partielles. Conditions d'intégrabilité auxquelles doivent satisfaire les rotations partielles. Quand ces équations sont vérifiées, il y a un déplacement, et un seul, correspondant aux valeurs données des rotations partielles. La démonstration directe de cette proposition conduit à un théorème important, qui sera utile dans la suite.

Cas général où le système mobile n'a pas de point fixe. Introduction des translations partielles. Relations différentielles entre ces translations. Expression des composantes D_x, D_y, D_z du déplacement infiniment petit d'un point du système mobile. Si les conditions d'intégrabilité auxquelles doivent satisfaire les rotations et les translations sont vérifiées, il y a un déplacement correspondant, et un seul. Méthode par laquelle, sans sortir du trièdre mobile, on démontre cette proposition fondamentale, après avoir retrouvé les conditions d'intégrabilité.

---

40. Dans les Chapitres précédents, nous avons vu comment on rattache la théorie des courbes gauches à l'étude du mouvement d'un trièdre. D'autres recherches de géométrie et, en particulier, celles qui se rapportent aux surfaces, aux congruences, aux systèmes triples orthogonaux, aux complexes, etc., exigent la considération de systèmes mobiles dont les différentes positions dépendent de deux, ou de plus de deux paramètres distincts. Nous allons entreprendre l'étude de tels systèmes; et, pour étudier d'abord les propriétés des rotations, nous commencerons par supposer que le système mobile ait un point fixe, qui sera, comme précédemment, l'origine, à la fois, des axes fixes et des axes mobiles.

Alors les neuf cosinus qui déterminent la position des axes mobiles sont des fonctions de n variables indépendantes $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

A partir de chacune de ses positions, le système mobile peut prendre une infinité de mouvements, que l'on obtiendra en prenant pour $t_1, t_2, \ldots, t_n$ des fonctions arbitraires de t. Nous introduirons ici n systèmes différents de rotations et nous désignerons par p_i, q_i, r_i les rotations qui se rapportent au déplacement dans lequel t_i varie seule. On aura donc

$$(1) \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial t_i} = \beta r_i - \gamma q_i, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial t_i} = \gamma p_i - \alpha r_i, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial t_i} = \alpha q_i - \beta p_i,$$

α, β, γ désignant soit a, b, c, soit a', b', c', soit a'', b'', c''. Il résulte immédiatement de là que, si l'on considère un déplacement du système dans lequel les n quantités t_i sont des fonctions données de t, on aura

$$(2) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \beta \mathrm{R} - \gamma \mathrm{Q}, \qquad \frac{d\beta}{dt} = \gamma \mathrm{P} - \alpha \mathrm{R}, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \alpha \mathrm{Q} - \beta \mathrm{P},$$

P, Q, R ayant les valeurs

$$(3) \qquad \mathrm{P} = \Sigma p_i \frac{dt_i}{dt}, \qquad \mathrm{Q} = \Sigma q_i \frac{dt_i}{dt}, \qquad \mathrm{R} = \Sigma r_i \frac{dt_i}{dt}.$$

Les projections sur les axes mobiles du déplacement infiniment petit d'un point dont les coordonnées relatives sont x, y, z auront pour valeurs

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathrm{D}_x = dx + z\Sigma q_i\, dt_i - y\Sigma r_i\, dt_i, \\ \mathrm{D}_y = dy + x\Sigma r_i\, dt_i - z\Sigma p_i\, dt_i, \\ \mathrm{D}_z = dz + y\Sigma p_i\, dt_i - x\Sigma q_i\, dt_i. \end{cases}$$

Cela résulte immédiatement des formules (9) du n° 1, jointes aux équations (3).

Nous allons tout d'abord établir certaines relations aux dérivées partielles auxquelles doivent nécessairement satisfaire les rotations.

Si l'on différentie les équations (1) par rapport aux diverses variables qui y entrent, on peut évidemment obtenir en fonction de α, β, γ deux expressions différentes de $\frac{\partial^2\alpha}{\partial t_i \partial t_k}$. En égalant ces deux expressions on trouve

$$\beta\left(\frac{\partial r_i}{\partial t_k} - \frac{\partial t_k}{\partial r_i} - p_i q_k + p_k q_i\right) = \gamma\left(\frac{\partial q_i}{\partial t_k} - \frac{\partial q_k}{\partial t_i} - r_i p_k + r_k p_i\right).$$

Comme cette équation doit avoir lieu quand on y remplace β, γ soit par b, c, soit par b', c', soit par b'', c'', il faudra que les coefficients de β et de γ soient nuls séparément. Nous avons ainsi deux équations. En égalant de même les deux valeurs de $\frac{\partial^2 \beta}{\partial t_i \partial t_k}$, $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t_i \partial t_k}$ déduites du système (1), on obtiendra seulement une équation nouvelle, et l'on sera conduit au système

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial t_k} - \frac{\partial p_k}{\partial t_i} &= q_i r_k - r_i q_k, \\ \frac{\partial q_i}{\partial t_k} - \frac{\partial q_k}{\partial t_i} &= r_i p_k - p_i r_k, \\ \frac{\partial r_i}{\partial t_k} - \frac{\partial r_k}{\partial t_i} &= p_i q_k - q_i p_k, \end{aligned}\right.$$

qui joue un rôle fondamental dans la théorie. Les équations (5) sont au nombre de $\frac{3n(n-1)}{2}$.

41. Réciproquement, toutes les fois que l'on connaîtra $3n$ quantités p_i, q_i, r_i vérifiant les relations (5), il existera un mouvement dans lequel ces six quantités seront les relations partielles, telles que nous les avons définies.

Pour établir ce résultat, il suffira évidemment de montrer que l'on peut obtenir des valeurs des neuf cosinus satisfaisant aux $3n$ équations (1). Cette proposition paraîtra évidente à tous ceux qui ont étudié la théorie des équations aux dérivées partielles [1], mais il y aura avantage pour la suite à l'établir directement. Voici comment on peut raisonner.

Posons

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} A_i &= \frac{\partial \alpha}{\partial t_i} - \beta r_i + \gamma q_i, \\ B_i &= \frac{\partial \beta}{\partial t_i} - \gamma p_i + \alpha r_i, \\ C_i &= \frac{\partial \gamma}{\partial t_i} - \alpha q_i + \beta p_i. \end{aligned}\right.$$

Il est facile de voir que, toute les fois que les relations (5)

---

[1] On pourra consulter à ce sujet les théorèmes généraux relatifs aux équations aux dérivées partielles que nous avons donnés au Livre III, Chapitre Ier de nos *Leçons sur les système orthogonaux*, 2e édition.

seront vérifiées, on aura identiquement

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A_i}{\partial t_k} + q_k C_i - r_k B_i = \dfrac{\partial A_k}{\partial t_i} + q_i C_k - r_i B_k, \\ \dfrac{\partial B_i}{\partial t_k} + r_k A_i - p_k C_i = \dfrac{\partial B_k}{\partial t_i} + r_i A_k - p_i C_k, \\ \dfrac{\partial C_i}{\partial t_k} + p_k B_i - q_k A_i = \dfrac{\partial C_k}{\partial t_i} + p_i B_k - q_i A_k. \end{cases}$$

Ces relations, qu'on pourrait obtenir directement à l'aide de quelques considérations de cinématique, nous conduisent immédiatement à la proposition suivante :

Supposons connues des solutions α, β, γ *des équations de rang* i

$$(8)\qquad A_i = 0, \qquad B_i = 0, \qquad C_i = 0.$$

Portons ces solutions dans les équations de rang k. *Si les résultats de la substitution* A_k, B_k, C_k *ne sont pas nuls, ce sont encore des solutions des équations de rang* i.

En nous appuyant sur cette proposition, nous allons montrer que le système des équations (1) admet toujours une solution, *et une seule*, lorsqu'on se donne ce que nous appellerons les valeurs iniatiales des inconnues, c'est-à-dire les valeurs qu'elles prennent, par exemple, pour

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0,$$

en admettant bien entendu que les relations (5), et, par suite, les identités (7), soient vérifiées.

La proposition étant évidente pour $n = 1$, nous pouvons suivre la méthode d'induction complète, et il suffira de démontrer que, si elle est vraie pour le cas de $n - 1$ paramètres t_i, elle l'est encore lorsqu'on prend un paramètre de plus.

Admettons donc que le théorème soit démontré pour $n - 1$ paramètres et, considérant le système des équations (1) qui contient n paramètres, proposons-nous de déterminer, s'il existe, le système de solutions pour lequel α, β, γ se réduisent à des constantes données α_0, β_0, γ_0 lorsqu'on y fait, par exemple,

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0.$$

Considérons le premier groupe des équations (1)

$$(9) \qquad A_1 = 0, \qquad B_1 = 0, \qquad C_1 = 0$$

et faisons-y

$$t_2 = t_3 = \ldots = t_n = 0.$$

Les fonctions cherchées α, β, γ se réduiront à des fonctions de t_1, α', β', γ', qui devront satisfaire aux équations (9) et de plus se réduire à α_0, β_0, γ_0 pour $t_1 = 0$; α', β', γ' seront donc déterminées sans ambiguïté par cette double condition.

Intégrons maintenant toutes les autres équations du système (1)

$$(10) \qquad A_i = 0, \qquad B_i = 0, \qquad C_i = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

en y laissant $t_1, t_2, \ldots, t_n$ variables, mais nous devrons assujettir les inconnues α, β, γ à prendre les valeurs α', β', γ' pour

$$t_2 = t_3 = \ldots = t_n = 0.$$

Ces solutions existent et forment un système unique, puisque nous supposons le théorème démontré pour le cas de $n - 1$ variables. Nous allons montrer que les valeurs ainsi obtenues de α, β, γ vérifient aussi les trois équations (9).

Substituons, en effet, ces valeurs dans les trois équations (9). D'après la proposition fondamentale, les premiers membres A_1, B_1, C_1 de ces équations, mis à la place de α, β, γ dans le système (10), vérifient ce système. D'autre part, si l'on fait

$$t_2 = t_3 = \ldots = t_n = 0,$$

α, β, γ se réduisent à α', β', γ' qui annulent A_1, B_1, C_1. Ainsi, les A_1, B_1, C_1 constituent un système de solutions du système (10) pour lequel les valeurs initiales de A_1, B_1, C_1, c'est-a-dire les valeurs pour

$$t_2 = t_3 = \ldots = t_n = 0$$

sont toutes nulles, *quel que soit* t_1. Comme, d'après l'hypothèse, le système des équations (10) admet une solution, *et une seule*, correspondant à des valeurs initiales données de α, β, γ, il est clair que, si les valeurs initiales A_1, B_1, C_1 de α, β, γ sont nulles, elles demeurent nulles lorsque $t_2, t_3, \ldots, t_n$ varieront d'une manière quelconque, la solution fournie par des valeurs nulles des incon-

nues étant alors la solution unique du système. Les équations (9) seront donc vérifiées pour toutes les valeurs des variables indépendantes, et la proposition que nous avions en vue est ainsi complètement démontrée : *Il y a toujours un système, et un système unique, de valeurs de* α, β, γ *vérifiant les équations* (1) *et admettant des valeurs initiales données.*

42. Il y a donc une infinité de systèmes différents de solutions des équations proposées, et la solution la plus générale dépend, on le voit, de trois constantes abitraires. D'autre part, si α, β, γ; α_1, β_1, γ_1 désignent deux systèmes différents de solutions, les expressions

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2, \qquad \alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1, \qquad \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2$$

demeureront constantes pour toutes les valeurs des t_i; la démonstration se fait ici comme dans le cas d'une seule variable. Par suite, si nous prenons trois systèmes différents de solutions a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' dont les valeurs initiales soient les neuf cosinus qui déterminent la position du trièdre trirectangle (T_0) par rapport aux axes fixes, on aura, pour toutes les valeurs des t_i, des relations telles que les suivantes :

$$a^2+b^2+c^2=1, \qquad aa'+bb'+cc'=0;$$

et nos trois systèmes de solutions définiront, pour toutes les valeurs des t_i, la position d'un trièdre mobile pour lequel les rotations partielles seront précisément les quantités p_i, q_i, r_i et dont la position initiale sera le trièdre (T_0).

Ici encore, comme dans le cas d'une seule variable, toutes les solutions que l'on peut obtenir se déduisent de l'une d'elles par un simple changement de coordonnées. On a toujours le même déplacement, mais rapporté à des axes différents.

43. Après avoir traité le cas où le système mobile a un point fixe, il nous reste à examiner celui où le trièdre (T) se meut d'une manière quelconque dans l'espace; alors il faudra joindre aux rotations partielles un nombre égal de translations. Nous désignerons par ξ_i, η_i, ζ_i les composantes de la vitesse de l'origine des

axes mobiles relativement à ces axes, lorsque t_i varie seule. Si l'on désigne par X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées de cette origine relativement aux axes fixes, on aura

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_0}{\partial t_i} = a\,\xi_i + b\,\eta_i + c\,\zeta_i, \\ \dfrac{\partial Y_0}{\partial t_i} = a'\xi_i + b'\eta_i + c'\zeta_i, \\ \dfrac{\partial Z_0}{\partial t_i} = a''\xi_i + b''\eta_i + c''\zeta_i, \end{cases}$$

pour les valeurs $1, 2, \ldots, n$ de i. Égalons les deux valeurs des dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 X_0}{\partial t_i \partial t_k}$, $\dfrac{\partial^2 Y_0}{\partial t_i \partial t_k}$, $\dfrac{\partial^2 Z_0}{\partial t_i \partial t_k}$ que l'on peut déduire de ces formules. Après avoir remplacé les dérivées des cosinus par leurs valeurs, nous obtiendrons des équations qui, devant avoir lieu quand on y remplacera a, b, c par a', b', c', puis par a'', b'', c'', se décomposeront dans les trois suivantes :

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial t_k} - \dfrac{\partial \xi_k}{\partial t_i} = q_i\zeta_k - q_k\zeta_i - r_i\eta_k + r_k\eta_i, \\ \dfrac{\partial \eta_i}{\partial t_k} - \dfrac{\partial \eta_k}{\partial t_i} = r_i\xi_k - r_k\xi_i - p_i\xi_k + p_k\zeta_i, \\ \dfrac{\partial \zeta_i}{\partial t_k} - \dfrac{\partial \zeta_k}{\partial t_i} = p_i\eta_k - p_k\eta_i - q_i\xi_k + q_k\xi_i. \end{cases}$$

Réciproquement, lorsque les quantités ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i satisfont à ces équations en même temps qu'aux équations (5), il existera un déplacement, et un seul, dans lequel elles seront les translations et les rotations partielles. Car nous savons déjà comment on pourra déterminer les neuf cosinus; et, de plus, les équations (11), qui seront compatibles en vertu des relations (12), nous fourniront, par les quadratures de trois différentielles à n variables indépendantes, les coordonnées de l'origine des axes mobiles. Il est inutile de répéter ici le raisonnement par lequel nous avons démontré que tous les mouvements obtenus se ramènent au fond à un seul, observé par rapport à des axes différents.

On démontrera comme précédemment que, si l'on suppose que les t_i deviennent fonctions d'une même variable t, les rotations et les translations relatives au déplacement correspondant auront pour

expressions

$$(13)\quad \begin{cases} P = \Sigma p_i \dfrac{dt_i}{dt}, & Q = \Sigma q_i \dfrac{dt_i}{dt}, & R = \Sigma r_i \dfrac{dt_i}{dt}, \\ \Xi = \Sigma \xi_i \dfrac{dt_i}{dt}, & H = \Sigma \eta_i \dfrac{dt_i}{dt}, & Z = \Sigma \zeta_i \dfrac{dt_i}{dt}; \end{cases}$$

et les projections sur les axes mobiles du déplacement infiniment petit d'un point dont les coordonnées relatives aux axes mobiles sont x, y, z auront pour expression

$$(14)\quad \begin{cases} D_x = dx + \Sigma \xi_i dt_i + (\Sigma q_i dt_i) z - (\Sigma r_i dt_i) y, \\ D_y = dy + \Sigma \eta_i dt_i + (\Sigma r_i dt_i) x - (\Sigma p_i dt_i) z, \\ D_z = dz + \Sigma \zeta_i dt_i + (\Sigma p_i dt_i) y - (\Sigma q_i dt_i) x. \end{cases}$$

44. Ces dernières formules nous conduisent même à une méthode originale, inspirée des travaux d'Olinde Rodrigues, pour obtenir les conditions d'intégrabilité (5) et (12) à l'aide d'un même raisonnement.

S'il existe en effet un déplacement pour lequel ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i soient les translations et les rotations partielles, tout point fixe de l'espace aura des coordonnées relatives au trièdre (T) qui devront annuler D_x, D_y, D_z pour *toutes* les valeurs données aux différentielles dt_i. Ces coordonnées relatives devront donc satisfaire aux équations

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t_i} + \xi_i + q_i z - r_i y = 0, \\ \dfrac{\partial y}{\partial t_i} + \eta_i + r_i x - p_i z = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial t_i} + \zeta_i + p_i y - q_i x = 0; \end{cases}$$

et ces équations aux dérivées partielles devront même admettre des intégrales x, y, z qui prendront des valeurs données quelconques lorsqu'on y fera

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0.$$

En écrivant les conditions d'intégrabilité, par exemple en égalant les deux valeurs obtenues pour $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t_i \partial t_k}$, on retrouve des

équations telles que la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_i}{\partial t_k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial t_i} - q_i\zeta_k + q_k\zeta_i + r_i\eta_k - r_k\eta_i \\ + z\left(\frac{\partial q_i}{\partial t_k} - \frac{\partial q_k}{\partial t_i} - r_i p_k + r_k p_i\right) \\ - y\left(\frac{\partial r_i}{\partial t_k} - \frac{\partial r_k}{\partial t_i} + p_k q_i - p_i q_k\right) = 0,\end{aligned}$$

qui, devant avoir lieu quels que soient y, z, donnera trois des relations (5) et (12). Les autres s'obtiendront par des permutations circulaires.

Cette nouvelle méthode de démonstration se suffit à elle-même, sans qu'il soit nécessaire de faire appel à des axes fixes. Car, en vertu des conditions d'intégrabilité, les équations linéaires (15) admettront une solution générale de la forme

$$(16)\qquad \begin{cases} x = x' + ax_0 + a'y_0 + a''z_0, \\ y = y' + bx_0 + b'y_0 + b''z_0, \\ z = z' + cx_0 + c'y_0 + c''z_0, \end{cases}$$

où x_0, y_0, z_0 seront les constantes arbitraires, par exemple, les valeurs initiales de x, y, z; et il est très facile de démontrer que tous les points correspondant aux diverses valeurs de x_0, y_0, z_0 forment un solide invariable. Il suffit de remarquer que, pour deux quelconques d'entre eux, de coordonnées x, y, z et x_1, y_1, z_1, correspondant à des valeurs initiales différentes, la différentielle du carré de la distance

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

est égale à zéro, en vertu des équations différentielles (15).

Nous terminerons ce Chapitre en remarquant que les relations différentielles entre les translations seraient encore vérifiées si l'on y remplaçait les ξ_i, η_i, ζ_i par les composantes

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} + \xi_i + q_i z - r_i y, \qquad \frac{\partial y}{\partial t_i} + \eta_i + r_i x - p_i z, \qquad \frac{\partial z}{\partial t_i} + \zeta_i + p_i y - q_i x$$

de la vitesse d'un point quelconque ayant x, y, z comme coor-

données relatives au trièdre mobile. Car ces composantes de la vitesse partielle du point mobile sont précisément ce que deviennent ξ_i, η_i, ζ_i lorsque, déplaçant le trièdre (T) parallèlement à lui-même, ce qui ne change pas ses rotations, on transporte son origine au point (x, y, z).

CHAPITRE VI.

INTÉGRATION SIMULTANÉE DES SYSTÈMES LINÉAIRES RENCONTRÉS DANS LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

Considérations générales sur le système linéaire fondamental auquel satisfont les trois groupes de cosinus, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''. Il se compose de n groupes de trois équations, le groupe de rang i faisant connaître les dérivées de trois inconnues par rapport à la seule variable t_i. — Si l'on sait intégrer complètement les équations faisant partie de p groupes, la solution du problème pourra se ramener à celle d'un problème *identique* dans lequel le nombre des variables indépendantes sera diminué de p. — Si l'on connaît seulement une solution particulière des équations faisant partie de p groupes, il sera possible, sauf dans un cas exceptionnel, d'obtenir sans quadrature l'intégrale complète de ces équations et, par suite, d'appliquer la proposition précédente. Le cas exceptionnel auquel on vient de faire allusion ne peut se présenter que si les rotations partielles sont imaginaires et si la solution particulière satisfait à l'équation $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$; d'ailleurs quand il se présente, on peut, par de simples quadratures, obtenir la solution complète et générale du problème.

Remplacement des équations linéaires par un groupe d'équations simultanées de Riccati auxquelles doit satisfaire une variable unique. Étude des solutions communes à deux équations simultanées de Riccati. — Cas particulier où la somme $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ est nulle. On est ramené à un système linéaire ne contenant que deux fonctions inconnues. Une solution particulière de ce système suffit à donner, par une quadrature unique, la solution générale du problème proposé.

---

45. Après avoir reconnu l'existence de solutions communes à toutes les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} A_i &= \frac{\partial\alpha}{\partial t_i} - \beta r_i + \gamma q_i = 0,\\ B_i &= \frac{\partial\beta}{\partial t_i} - \gamma p_i + \alpha r_i = 0, \qquad (i=1,2,\ldots,n),\\ C_i &= \frac{\partial\gamma}{\partial t_i} - \alpha q_i + \beta p_i = 0,\end{aligned}\right.$$

solutions dépendant de trois constantes arbitraires, nous allons indiquer les méthodes propres à faciliter leur détermination. Nous rappellerons qu'en vertu des conditions (5) du Chapitre précédent,

les A_i, B_i, C_i satisfont aux *identités*

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A_i}{\partial t_k} - B_i r_k + C_i q_k = \dfrac{\partial A_k}{\partial t_i} - B_k r_i + C_k q_i, \\ \dfrac{\partial B_i}{\partial t_k} - B_i p_k + A_i r_k = \dfrac{\partial B_k}{\partial t_i} - C_k p_i + A_k r_i, \\ \dfrac{\partial C_i}{\partial t_k} - A_i q_k + B_i p_k = \dfrac{\partial C_k}{\partial t_i} - A_k q_i + B_k p_i, \end{cases}$$

dont nous avons déjà signalé toute l'importance.

Nous allons d'abord montrer que, si l'on sait complètement intégrer quelques-uns des systèmes (1), par exemple ceux qui correspondent aux valeurs $1, 2, \ldots, k$ de i, l'intégration complète du système sera ramenée à celle des équations restantes

$$(3)\qquad A_{k+h} = 0, \qquad B_{k+h} = 0, \qquad C_{k+h} = 0, \qquad h > 0,$$

où l'on aura donné à $t_1, t_2, \ldots, t_k$ des valeurs arbitraires quelconques, zéro par exemple.

Proposons-nous, en effet, de déterminer cette solution unique du système (1), dont nous avons démontré l'existence, et pour laquelle α, β, γ doivent se réduire à des constantes données $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ lorsque tous les t_i prennent leur valeur initiale, zéro par exemple.

Puisque nous savons intégrer, par hypothèse, les équations

$$(4)\qquad A_i = 0, \qquad B_i = 0, \qquad C_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

nous pourrons déterminer celle de leurs solutions pour laquelle α, β, γ se réduiront à des fonctions données α', β', γ' de $t_{k+1}, \ldots, t_n$ lorsqu'on y fera $t_1 = t_2 = \ldots = t_k = 0$.

Le problème se trouve donc ramené à la détermination de ces fonctions α', β', γ'.

Or, elles doivent évidemment vérifier les équations (3) où l'on aura fait

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_k = 0$$

et se réduire à $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ lorsque les variables $t_{k+1}, \ldots, t_n$ deviendront nulles à leur tour. Cette double condition les détermine sans ambiguïté.

Tout se réduit donc à l'intégration du système (3) dans les conditions indiquées.

La proposition précédente est très précieuse parce qu'elle montre

que l'intégration de tout groupe d'équations

$$A_i = 0, \qquad B_i = 0, \qquad C_i = 0,$$

compris dans le groupe général, non seulement permet de faire un pas vers la solution du problème, mais de plus permet de réduire d'une unité le nombre des variables *sans changer la structure des équations*.

Si, par exemple, on sait intégrer isolément chacun des systèmes précédents, on saura, sans nouvelle intégration, obtenir leur intégrale commune.

46. Supposons maintenant qu'au lieu de savoir intégrer le système des $3k$ équations (5), on en connaisse seulement une solution particulière

$$\alpha = \alpha_1, \qquad \beta = \beta_1, \qquad \gamma = \gamma_1.$$

En portant ces valeurs de α, β, γ dans les équations restantes, on obtiendra des fonctions A_{k+h}, B_{k+h}, C_{k+h} qui, nous venons de le voir, fourniront de nouvelles solutions particulières du système (4). Ces nouvelles solutions, jointes à celles que l'on connaît déjà, permettront, nous le savons (n° 14), d'intégrer complètement, et sans quadrature, tous les systèmes

$$A_i = 0, \qquad B_i = 0, \qquad C_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

et, par conséquent, d'obtenir l'intégrale générale du système (4). Nous serons donc ramené à l'hypothèse que nous avons envisagée plus haut.

On peut, à la vérité, faire une objection au raisonnement précédent. Les nouvelles solutions A_{k+h}, B_{k+h}, C_{k+h} peuvent ne différer des premières α, β, γ que par un facteur U_{k+h} qui dépendra seulement de $t_{k+1}, \ldots, t_n$. Alors, au regard du système (4) et de ses variables indépendantes, les nouvelles solutions ne peuvent pas être considérées comme distinctes des anciennes et, par suite, ne sauraient contribuer à la formation de l'intégrale générale du groupe des équations (4). Notre raisonnement serait donc en défaut dans ce cas particulier. Examinons s'il pourra se présenter.

On a identiquement

$$\begin{aligned}&\alpha_1 A_{k+h} + \beta_1 B_{k+h} + \gamma_1 C_{k+h}\\ &= \alpha_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_{k+h}} + \beta_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial t_{k+h}} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial t_{k+h}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_{k+h}} (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2).\end{aligned}$$

Or, comme les différents groupes d'équations (1) admettent l'intégrale

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const.},$$

on peut toujours supposer que l'on a soit

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 0,$$

soit

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1.$$

Si cette dernière relation n'avait pas lieu, on pourrait l'obtenir en multipliant α, β, γ par un facteur indépendant de $t_1, t_2, \ldots, t_k$, ce qui est permis.

Il vient donc, dans l'une ou l'autre hypothèse,

$$\alpha_1 A_{k+h} + \beta_1 B_{k+h} + \gamma_1 C_{k+h} = 0$$

ou encore

$$U_{k+h} (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) = 0.$$

Ainsi, le raisonnement précédent ne peut être infirmé que si les solutions α_1, β_1, γ_1 vérifient toutes les équations du système (3), ce qui est contraire à l'hypothèse, ou si l'on a

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 0.$$

On sait que, dans ce cas, et si les rotations p_i, q_i, r_i sont des fonctions réelles de t, on obtient non plus un système, mais deux systèmes de solutions particulières pour les équations (4) en prenant les parties réelles et les parties imaginaires de α, β, γ. On aura donc alors, et sans calcul, l'intégrale générale du système (4). L'objection que nous avons formulée n'est donc valable que si les rotations sont des fonctions imaginaires des paramètres. Nous allons néanmoins l'examiner.

On doit alors avoir, pour toutes les valeurs positives $1, 2, \ldots, n-k$, de h,

$$A_{k+h} = \alpha_1 U_{k+h}, \qquad B_{k+h} = \beta_1 U_{k+h}, \qquad C_{k+h} = \gamma_1 U_{k+h},$$

les U_{k+h} ne dépendant pas de $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Remplaçons, dans la première des identités (2) par exemple, i par $k+h$ et k par $k+h'$. Nous aurons

$$\alpha_1 \frac{\partial U_{k+h}}{\partial t_{k+h'}} + U_{k+h} U_{k+h'} = \alpha_1 \frac{\partial U_{k+h'}}{\partial t_{k+h}} + U_{k+h'} U_{k+h'}$$

ou plus simplement

$$\alpha_1 \left(\frac{\partial U_{k+h}}{\partial t_{k+h'}} - \frac{\partial U_{k+h'}}{\partial t_{k+h'}} \right) = 0.$$

Les autres identités (2) donneraient un résultat analogue où α_1 serait remplacé par β_1 et par γ_1. On a donc nécessairement

$$\frac{\partial U_{k+h}}{\partial t_{k+h'}} = \frac{\partial U_{k+h'}}{\partial t_{k+h}},$$

et les U_{k+h} seront les dérivées d'une même fonction qui ne dépendra pas de $t_1, t_2, \ldots, t_k$. On peut donc poser

$$U_{k+h} = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t_{k+h}},$$

V ne dépendant pas des variables $t_1, \ldots, t_k$, et se déterminant par une simple quadrature.

D'après cela, si l'on substitue à la solution α_1, β_1, γ_1 du système (4) la nouvelle solution $V\alpha_1$, $V\beta_1$, $V\gamma_1$ du même système, ce qui est permis, puisque V est une constante au regard des variables indépendantes de ce système, on verra aisément que les nouvelles valeurs de A_{k+h}, B_{k+h}, C_{k+h} sont toutes nulles. Ainsi, on aura obtenu un système de solutions particulières de tout le système. On sait qu'alors des quadratures permettent de déterminer l'intégrale générale de tout groupe d'équations

$$A_i = 0, \qquad B_i = 0, \qquad C_i = 0$$

et, par suite, en vertu des propositions précédentes, celle du système (1) tout entier.

En résumé on peut dire que, si l'on connaît une solution particulière d'un des systèmes

$$A_i = 0, \qquad B_i = 0, \qquad C_i = 0$$

compris dans les équations (1), ou bien on pourra intégrer com-

plètement ce système et réduire le problème à un autre qui lui sera identique, mais dans lequel le nombre des variables sera diminué d'une unité; ou bien on aura, par des quadratures, une solution particulière de tout le système (1); et d'autres quadratures permettront alors d'en obtenir l'intégrale générale.

47. On peut formuler des indications plus précises sur les opérations à effectuer, si l'on fait les changements de variables indiqués déjà aux Chapitres II et III.

Supposons d'abord que l'on recherche les systèmes de solutions pour lesquels la somme constante $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ n'est pas nulle. On pourra poser

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \\ \alpha=\dfrac{1-xy}{x-y}, \qquad \beta=i\dfrac{1+xy}{x-y}, \qquad \gamma=\dfrac{x+y}{x-y}, \end{array}\right.$$

et x, y devront vérifier les équations de Riccati

$$(6)\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t_k}=-ir_k\sigma+\frac{q_k-ip_k}{2}+\frac{q_k+ip_k}{2}\sigma^2,$$

où k prendra les n valeurs $1, 2, \ldots, n$.

Ces équations sont évidemment compatibles et devront admettre une suite infinie de solutions communes, comme celles d'où elles dérivent.

On voit que nous sommes ramené à un problème d'analyse, qui se présentera d'ailleurs dans un grand nombre de recherches géométriques et qui, dans le cas le plus simple, peut s'énoncer comme il suit : étudier l'intégration simultanée de deux équations de la forme

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\sigma}{\partial u}=a+2b\sigma+c\sigma^2, \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial v}=a_1+2b_1\sigma+c_1\sigma^2. \end{array}\right.$$

Il est aisé de montrer tout d'abord que ces équations peuvent avoir trois solutions particulières communes et que, si elles en ont trois, elles en ont une infinité. On peut, en effet, déterminer les coefficients inconnus a, b, c ou a_1, b_1, c_1 de chaque équation par la condition qu'elle admette trois solutions particulières σ_1, σ_2, σ_3,

données à l'avance. Mais alors la propriété relative au rapport anharmonique nous montre immédiatement que les deux équations auront en commun une infinité de solutions. En effet, en vertu de la première, le rapport anharmonique

$$\frac{\sigma - \sigma_2}{\sigma - \sigma_3} : \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3},$$

formé avec la solution générale σ et les trois solutions particulières, ne doit pas dépendre de u; en vertu de la seconde, il ne doit pas dépendre de v. Il sera donc à la fois suffisant et nécessaire que l'on ait

$$\frac{\sigma - \sigma_2}{\sigma - \sigma_3} : \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} = \text{const.}$$

pour que σ soit une solution commune aux deux équations. Ainsi, les deux équations peuvent avoir une infinité de solutions communes.

Nous allons chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Reprenons les équations simultanées

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} = a + 2b\,\sigma + c\,\sigma^2, \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} = a_1 + 2b_1\sigma + c_1\sigma^2, \end{cases}$$

où a, b, c, a_1, b_1, c_1 sont des fonctions données de u et de v. En égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v}$ qu'on peut déduire de ces équations, on sera conduit à la relation

$$\frac{\partial a}{\partial v} - \frac{\partial a_1}{\partial u} + 2\sigma\left(\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial b_1}{\partial u}\right) + \sigma^2\left(\frac{\partial c}{\partial v} - \frac{\partial c_1}{\partial u}\right)$$
$$+ 2(c\sigma + b)(a_1 + 2b_1\sigma + c_1\sigma^2) - 2(c_1\sigma + b_1)(a + 2b\sigma + c\sigma^2) = 0,$$

qui est du second degré par rapport à σ.

Si elle n'a pas lieu identiquement, elle fournira deux valeurs particulières de σ, qui pourront être des solutions particulières du système (8). Mais si l'on veut, comme dans le cas actuel, que les deux équations en σ aient une solution commune avec constante arbitraire, il faudra que les coefficients des différentes puissances

de σ dans l'équation précédente soient nuls, ce qui donne

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial a}{\partial v} - \frac{\partial a_1}{\partial u} + 2ba_1 - 2ab_1 = 0,\\ &\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial b_1}{\partial u} + ca_1 - ac_1 = 0,\\ &\frac{\partial c}{\partial v} - \frac{\partial c_1}{\partial u} + 2cb_1 - 2bc_1 = 0.\end{aligned}\right.$$

Ainsi, les deux équations (8) auront *au plus* deux solutions particulières communes, à moins que les relations précédentes ne soient vérifiées, auquel cas elles auront une solution commune contenant une constante arbitraire.

Pour le démontrer, désignons par σ une solution quelconque de la première de ces équations, et posons

$$(10)\qquad \theta = \frac{\partial \sigma}{\partial v} - a_1 - 2b_1\sigma - c_1\sigma^2.$$

On a, d'ailleurs,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} - a - 2b\sigma - c\sigma^2 = 0.$$

Différentions l'équation précédente par rapport à v, l'équation (10) par rapport à u, et retranchons les deux équations ainsi obtenues. Nous aurons, en tenant compte des identités (9), aussi bien que des deux équations précédentes,

$$(11)\qquad \frac{\partial \theta}{\partial u} = 2(c\sigma + b)\theta,$$

ce qui donne, par l'intégration,

$$(12)\qquad \theta = \theta_0 e^{2\int_{u_0}^{u}(c\sigma + b)\,du},$$

θ_0 désignant la valeur de θ pour $u = u_0$. Si donc θ est nulle pour $u = u_0$, elle le sera pour toutes les valeurs de u.

Ce point étant établi, faisons $u = u_0$ dans la seconde des équations (8), et déterminons la fonction σ' de v qui satisfait à cette équation et se réduit à σ_0 pour $v = v_0$. On aura donc

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial v} - a_1 + 2b_1\sigma' + c_1\sigma'^2,$$

pour $u = u_0$.

Considérons ensuite la première des équations (8), et déterminons la fonction σ qui satisfait à cette équation et se réduit à σ' pour $u = u_0$. D'après ce que nous venons de démontrer, cette fonction σ satisfera aux deux équations; car la valeur de la fonction que nous avons désignée par θ, relative à la solution ainsi déterminée, est nulle pour $u = u_0$, et, par conséquent, elle restera nulle pour toutes les valeurs de u. La fonction σ qui satisfait aux deux équations contient, d'ailleurs, la constante arbitraire σ_0.

Toutes les opérations que nous venons d'indiquer sont possibles, et n'exigent aucune quadrature, quand on sait intégrer séparément chacune des équations (8). Ainsi, l'on saura déterminer, sans intégration, la solution commune aux deux équations quand on aura obtenu l'intégrale de chacune d'elles.

48. Nous allons maintenant démontrer quelques propositions qui rendent plus facile l'intégration simultanée des équations (8).

Supposons d'abord que l'on connaisse une solution commune de ces deux équations $\sigma = x$. En posant

$$\sigma = x + \frac{1}{\omega},$$

on sera ramené à deux équations de la forme

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = P\,\omega + Q,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = P_1\,\omega + Q_1,$$

et la valeur générale de ω s'obtiendra par la formule

$$\omega = e^{\int (P\,du + P_1\,dv)} \int e^{-\int (P\,du + P_1\,dv)} (Q\,du + Q_1\,dv), \tag{13}$$

qui ne contient, comme on s'en assure aisément, que des différentielles exactes.

Il est inutile de s'arrêter au cas où l'on aurait deux ou trois solutions communes des deux équations de Riccati; la méthode que nous avons suivie au n° 17 s'appliquera sans modification; mais il convient d'examiner l'hypothèse où l'on aurait, pour l'une des équations, une solution particulière *ne satisfaisant pas à l'autre*.

Aux résultats déjà établis, on peut alors ajouter le suivant : *On peut déterminer, sans aucune quadrature, l'intégrale générale de celle des équations dont on connaît une solution particulière.*

Soit, par exemple, x une valeur de σ satisfaisant à la première équation, et non à la seconde. Posons

$$\sigma = x + \frac{1}{\omega}.$$

Si nous portons cette valeur de σ dans la première équation (8), elle deviendra

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = -2(b + cx)\omega - c.$$

Introduisons la fonction θ, définie par l'équation (10) où l'on remplace σ par x, et qui, d'après la formule (11), vérifie l'équation

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = 2(b + cx)\theta.$$

L'équation à laquelle satisfait ω pourra être mise sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(\omega\theta)}{\partial u} + c\theta = 0. \tag{14}$$

Or, un calcul facile conduit à l'identité

$$c\theta = \frac{\partial}{\partial v}(cx + b) - \frac{\partial}{\partial u}(c_1 x + b_1) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \log\theta}{\partial v} - c_1 x - b_1\right).$$

En substituant la valeur de $c\theta$ dans l'équation (14), nous trouvons

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\omega\theta + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\theta}{\partial v} - c_1 x - b_1\right) = 0,$$

et, en intégrant, nous trouvons

$$\omega\theta = \frac{\theta}{\sigma - x} = c_1 x + b_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\theta}{dv} + C, \tag{15}$$

C désignant la constante arbitraire, qui peut être une fonction de v. La formule qui fait connaître l'intégrale générale de la première équation ne contient, comme nous l'avons annoncé, aucun signe de quadrature.

La proposition établie en dernier lieu, jointe à celles qui pré-

cèdent, nous permet de conclure que, si l'on connaît, pour chacune des deux équations (8), une solution particulière ne satisfaisant pas à l'autre, il sera possible d'obtenir sans aucune quadrature les solutions générales de ces équations, *et par conséquent aussi leurs solutions communes.*

49. Nous montrerons, en terminant, comment on peut, en s'appuyant sur ce dernier résultat, former différentes équations différentielles dont l'intégration entraînerait celle du système (8), sans quadrature.

Ajoutons les équations (8), après les avoir multipliées par du et dv respectivement. Nous aurons

$$d\sigma - (a\,du + a_1\,dv) - 2(b\,du + b_1\,dv)\sigma - (c\,du + c_1\,dv)\sigma^2 = 0.$$

Envisageons maintenant les deux équations différentielles que nous formerons en remplaçant σ successivement par deux fonctions σ_1, σ_2, *choisies comme on le voudra*,

$$(16)\quad \begin{cases} d\sigma_1 - a\,du - a_1\,dv - 2(b\,du + b_1\,dv)\sigma_1 - (c\,du + c_1\,dv)\sigma_1^2 = 0, \\ d\sigma_2 - a\,du - a_1\,dv - 2(b\,du + b_1\,dv)\sigma_2 - (c\,du + c_1\,dv)\sigma_2^2 = 0. \end{cases}$$

Supposons qu'on sache intégrer chacune de ces deux équations différentielles. Je dis qu'on saura alors intégrer, sans aucune quadrature, le système (8).

Soit, en effet,

$$\varphi(u, v) = \alpha$$

l'intégrale de la première équation (16) et

$$\psi(u, v) = \beta$$

celle de la seconde équation. Faisons un changement de variables et substituons α, β à u et v. On aura, d'après la définition même de α et de β,

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial\beta} = a\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + a_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + 2\left(b\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + b_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta}\right)\sigma_1 + \left(c\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + c_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta}\right)\sigma_1^2, \\ \dfrac{\partial\sigma_2}{\partial\alpha} = a\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + a_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} + 2\left(b\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + b_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right)\sigma_2 + \left(c\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + c_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right)\sigma_2^2. \end{cases}$$

Quant au système (8), il prendra la forme

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\sigma}{\partial\beta} = a\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + a_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + 2\left(b\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + b_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta}\right)\sigma + \left(c\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + c_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta}\right)\sigma^2. \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial\alpha} = a\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + a_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} + 2\left(b\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + b_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right)\sigma + \left(c\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + c_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right)\sigma^2. \end{cases}$$

Les équations (17) expriment que σ_1, σ_2 sont, respectivement, solutions particulières de la première et de la seconde équation (18); par conséquent, d'après ce que nous avons démontré, on pourra intégrer complètement le système (18), équivalent au système (8).

50. Les propositions que nous venons d'établir pour deux équations simultanées de Riccati s'étendent d'elles-mêmes au groupe des n équations (6), et nous pouvons énoncer les propositions suivantes, que les raisonnements précédents nous dispensent de démontrer :

Si l'on connaît une solution commune x des équations simultanées, en posant

$$\sigma = x + \frac{1}{\omega},$$

on sera conduit à n équations linéaires en ω dont l'intégration complète et simultanée exigera deux quadratures portant sur des différentielles de n variables.

Si l'on connaît une solution particulière de k d'entre elles seulement, par exemple des k premières, on pourra, sans aucune quadrature, obtenir l'intégrale complète de ces k équations et le problème sera ramené à l'intégration des équations restantes, où l'on pourra donner une valeur arbitraire aux inconnues $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

51. Des conclusions analogues s'appliquent au système des équations linéaires simultanées qui déterminent les solutions du système (1) pour lesquelles on a

$$(19)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

Si l'on pose, comme au n° 28,

$$\alpha = u^2 - v^2, \qquad \beta = i(u^2 + v^2), \qquad \gamma = 2uv,$$

les variables u et v seront déterminées par les équations linéaires simultanées

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t_k} = \dfrac{ir_k}{2} u - \dfrac{q_k + ip_k}{2} v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t_k} = -\dfrac{ir_k}{2} v + \dfrac{q_k - ip_k}{2} u \end{cases}$$

auxquelles le lecteur pourra appliquer les méthodes précédentes. En se rappelant les résultats donnés au n° 22, on reconnaîtra notamment que, si l'on a des solutions des équations (1) vérifiant la relation (19) et donnant, par conséquent, une solution particulière des équations (20), une simple quadrature, portant sur une différentielle de n variables, fournira leur intégrale générale.

CHAPITRE VII.

APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AUX DÉPLACEMENTS QUI DÉPENDENT DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

Les déplacements à deux variables indépendantes jouent un rôle particulièrement important dans la théorie des surfaces. Il convient de les étudier complètement. — Application des formules générales. — Étude des mouvements infiniment petits. Notion de la vis due à Ball. Il y a deux déplacements réels ou imaginaires, qui se réduisent à des rotations. — Théorème de Schönemann et Mannheim qui permet de généraliser la notion du centre instantané et de construire les normales aux surfaces trajectoires de tous les points.

Étude de tous les déplacements infiniment petits qui peuvent se produire à partir d'une position donnée. Simplification des formules par un choix convenable des axes et des variables indépendantes. Les axes de tous les mouvements hélicoïdaux engendrent un conoïde que Plücker a le premier étudié. Expression du pas des différentes vis. Construction géométrique des formules. Propriétés du conoïde de Plücker : il est la seule surface réglée pour laquelle les protections d'un point de l'espace sur les génératrices rectilignes soient une courbe plane. Démonstration de cette proposition découverte par M. P. Appell. — Étude des relations qui existent entre le conoïde Plücker et le complexe des droites qui sont perpendiculaires à ses génératrices.

Étude spéciale du cas particulier, envisagé par Ribaucour, où deux des déplacements infiniment petits sont des rotations autour d'axes concourants. — Dans ce cas, tous les déplacements se réduisent à des rotations autour d'axes passant par un même point et situés dans le même plan. Le mouvement peut être obtenu par le roulement d'une surface sur une autre surface qui est *applicable* sur la première. — Il y a alors un centre instantané de rotation, et les normales à toutes les surfaces trajectoires passent par un même point.

---

52. Nous allons maintenant étudier d'une manière plus complète les déplacements à deux variables qui jouent un rôle particulièrement important dans la théorie des surfaces. Pour simplifier les notations, nous désignerons ici par u et v les deux variables indépendantes. Les translations et les rotations

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad p, \quad q, \quad r,$$
$$\xi_1, \quad \eta_1, \quad \zeta_1, \quad p_1, \quad q_1, \quad r_1$$

se rapporteront respectivement au cas où u et v varient seules. En sorte que les formules (14) (n° 43) qui donnent le déplacement infiniment petit deviendront ici

$$(1)\quad \begin{cases} D_x = dx + (\xi + qz - ry)\,du + (\xi_1 + q_1 z - r_1 y)\,dv, \\ D_y = dy + (\eta + rx - pz)\,du + (\eta_1 + r_1 x - p_1 z)\,dv, \\ D_z = dz + (\zeta + py - qx)\,du + (\zeta_1 + p_1 y - q_1 x)\,dv. \end{cases}$$

On aura, entre les rotations et les translations, les relations différentielles

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = qr_1 - rq_1, \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = rp_1 = pr_1, \\ \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = pq_1 - qp_1, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = q\zeta_1 - \zeta q_1 - r\eta_1 + \eta r_1, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = r\xi_1 - \xi r_1 - p\zeta_1 + \zeta p_1, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} - \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u} = p\eta_1 - \eta p_1 - q\xi_1 + \xi q_1, \end{cases}$$

dont nous ferons constamment usage.

A chaque valeur de $\dfrac{du}{dv}$ correspond un déplacement infiniment petit, qui est en général un mouvement hélicoïdal. L'axe de ce mouvement est défini par les équations

$$(4)\quad \begin{aligned} &\frac{(\xi + qz - ry)\,du + (\xi_1 + q_1 z - r_1 y)\,dv}{p\,du + p_1\,dv} \\ &= \frac{(\eta + rx - pz)\,du + (\eta_1 + r_1 x - p_1 z)\,dv}{q\,du + q_1\,dv} \\ &= \frac{(\zeta + py - qx)\,du + (\zeta_1 + p_1 y - q_1 x)\,dv}{r\,du + r_1\,dv} = \mathfrak{M}, \end{aligned}$$

où l'on a

$$\mathfrak{M} = \frac{(p\,du + p_1\,dv)(\xi\,du + \xi_1\,dv) + (q\,du + q_1\,dv)(\eta\,du + \eta_1\,dv) + (r\,du + r_1\,dv)(\zeta\,du + \zeta_1\,dv)}{(p\,du + p_1\,dv)^2 + (q\,du + q_1\,dv)^2 + (r\,du + r_1\,dv)^2}.$$

Nous avons ainsi une infinité d'axes et de mouvements dont nous allons étudier les propriétés.

Rappelons que si l'on introduit la notion de vis due à Ball, les équations (4) définissent l'axe de la vis qui porte le mouvement hélicoïdal. L'équation (5) définit le *pas* de la vis, c'est-à-dire le pas *réduit* de tous les éléments d'hélice décrits par les différents points du corps. En d'autres termes, $\mathfrak{M}$ est le rapport de la translation suivant l'axe du mouvement hélicoïdal à la rotation autour de cet axe. Suivant que ce rapport est positif ou négatif, la vis est *dextrorsum* ou *sinistrorsum*. S'il est nul, le mouvement se réduit à une rotation, dont l'axe est défini par les formules (4).

Si l'on écrit les équations d'une droite sous la forme pluckérienne

$$(6)\qquad \begin{cases} a_1 + bz - cy = 0, \\ b_1 + cx - az = 0, \\ c_1 + ay - bx = 0, \end{cases}$$

avec la condition nécessaire

$$(7)\qquad aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0,$$

on voit qu'ici les six coordonnées a, b, c, a_1, b_1, c_1 de l'axe de la vis seront

$$(8)\qquad \begin{cases} a = p\,du + p_1\,d\varphi, \qquad b = q\,du + q_1\,d\varphi, \qquad c = r\,du + r_1\,d\varphi, \\ a_1 = \xi\,du + \xi_1\,d\varphi - \mathfrak{M}(p\,du + p_1\,d\varphi), \\ b_1 = \eta\,du + \eta_1\,d\varphi - \mathfrak{M}(q\,du + q_1\,d\varphi), \\ c_1 = \zeta\,du + \zeta_1\,d\varphi - \mathfrak{M}(r\,du + r_1\,d\varphi), \end{cases}$$

$\mathfrak{M}$ ayant la valeur définie par l'équation (5).

53. Cette valeur de $\mathfrak{M}$ se présente sous la forme du quotient de deux formes quadratiques de différentielles, qui sont évidemment indépendantes du choix des axes et du choix des variables indépendantes. L'une, le dénominateur, divisée par dt^2, donnerait évidemment la vitesse de rotation dans le mouvement infiniment petit correspondant. Elle est *définie positive*. Quand au numérateur, nous ne pouvons rien affirmer à son sujet, dans le cas des mouvements réels. Si on l'égale à zéro, on obtient en général deux valeurs distinctes de $\frac{da}{d\varphi}$ qui annulent $\mathfrak{M}$ et pour lesquelles le mouvement se réduit à une rotation infiniment petite.

Il y a donc, en général, deux déplacements, réels ou imaginaires, qui se réduisent à des rotations.

Les valeurs de $\frac{du}{dv}$ qui correspondent à ces déplacements sont déterminées par l'équation

$$(9)\quad (p\,du + p_1\,dv)(\xi\,du + \xi_1\,dv) + (q\,du + q_1\,dv)(\eta\,du + \eta_1\,dv) + (r\,du + r_1\,dv)(\zeta\,du + \zeta_1\,dv) = 0,$$

et l'axe de rotation sera défini par les formules

$$(10)\quad \begin{cases} \xi\,du + \xi_1\,dv + (q\,du + q_1\,dv)z - (r\,du + r_1\,dv)y = 0, \\ \eta\,du + \eta_1\,dv + (r\,du + r_1\,dv)x - (p\,du + p_1\,dv)z = 0, \\ \zeta\,du + \zeta_1\,dv + (q\,du + p_1\,dv)y - (q\,du + q_1\,dv)x = 0, \end{cases}$$

où l'on remplacera $\frac{du}{dv}$ par la racine de l'équation (5) correspondant au déplacement considéré.

Le résultat précédent a une conséquence importante. Dans le cas qui nous occupe, tous les points du système invariable décrivent évidemment des surfaces. Puisque deux des mouvements se réduisent à des rotations autour de deux droites, que nous appellerons D, Δ, *la normale à la surface décrite par un point quelconque du système invariable devra rencontrer chacune de ces droites;* car cette normale, étant perpendiculaire à tous les déplacements du point considéré, doit l'être en particulier à ceux que prend le point dans les rotations et, par conséquent, doit rencontrer nécessairement les axes de ces rotations.

Ce beau théorème a été donné en 1855 par Schönemann, dans un Article présenté par Steiner à l'Académie de Berlin (*Monatsberichte*, 1855). Il a été retrouvé 11 ans après, par M. Mannheim (*Journal de Liouville*, t. XI, 2e série) qui, sans connaître les recherches de son prédécesseur, l'a soumis à une étude approfondie, Il donne évidemment une généralisation de la propriété relative au centre instantané dans l'étude des mouvements plans et permet de construire les plans tangents aux surfaces décrites par les différents points d'un système invariable, dès que l'on connaît les plans tangents aux surfaces décrites par quatre points particuliers. Soient en effet A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points dont on connaît les surfaces trajectoires : les deux droites D, Δ devront rencontrer les normales à ces surfaces aux quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 et seront,

en général, déterminées par cette condition. Une fois connues les droites D, Δ le problème sera résolu pour un point quelconque.

On reconnaîtra de même que, si une surface invariablement liée au corps mobile est entraînée dans son mouvement, elle touchera son enveloppe aux points pour lesquels sa normale rencontre D, Δ; que, si une courbe est entraînée dans le mouvement du solide invariable, elle touchera les nappes de la surface focale de la congruence engendrée par son déplacement aux points où l'une de ses normales va rencontrer les deux droites D, Δ, dont l'ensemble, on le voit, joue bien le rôle du *centre instantané*.

Quelque élégantes qu'elles soient, les constructions géométriques précédentes ont le défaut de ne pouvoir s'appliquer si les deux droites D, Δ deviennent imaginaires ou si elles se confondent. Elles ont, dans tous les cas, l'inconvénient d'exiger la détermination des deux rotations, ce qui entraîne la résolution d'une équation quadratique, alors que la détermination du plan tangent des surfaces trajectoires doit s'obtenir par des opérations purement linéaires. Nous laisserons au lecteur le soin d'approfondir ce sujet et nous allons poursuivre l'étude des relations entre les mouvements hélicoïdaux qui correspondent aux diverses valeurs de $\frac{du}{dv}$.

54. Reprenons les deux formes quadratiques de différentielles

$$(11)\quad \begin{cases} \Theta_d = (\xi\,du + \xi_1\,dv)(p\,du + p_1\,dv) \\ \qquad + (\eta\,du + \eta_1\,dv)(q\,du + q_1\,dv) + (\zeta\,du + \zeta_1\,dv)(r\,du + r_1\,dv), \\ \Omega_d = (p\,du + p_1\,dv)^2 + (q\,du + q_1\,dv)^2 + (r\,du + r_1\,dv)^2, \end{cases}$$

qui figurent dans l'expression de $\mathfrak{M}$. Puisque la seconde est définie positive, il sera possible, on le sait, de les ramener à deux sommes ne contenant que les carrés de deux fonctions linéaires, réelles et distinctes,

$$h\,du + k\,dv, \qquad h_1\,du + k_1\,dv.$$

Un changement de variables pouvant ramener ces deux fonctions linéaires à la forme plus simple

$$\lambda\,du', \quad \mu\,dv',$$

on voit qu'il sera toujours permis de supposer que les deux formes (11) aient été, l'une et l'autre, débarrassées du terme

en $du\,dv$. On aura alors

$$(12)\qquad \begin{cases} pp_1 + qq_1 + rr_1 = 0, \\ p\xi_1 + \xi p_1 + q\eta_1 + \eta q_1 + \zeta r_1 + r\zeta_1 = 0. \end{cases}$$

Toutes les fois que deux mouvements $(\xi, \eta, \zeta, p, q, r)$ $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, p_1, q_1, r_1)$ satisfont aux relations précédentes, il est facile de voir, en employant les formules (8) qui donnent les coordonnées de leurs axes, *que ces axes se rencontrent et sont rectangulaires*. Nous dirons alors avec J. Petersen qu'ils sont en *ortho-involution*. Ainsi, ici les deux mouvements composants qui correspondent à des valeurs nulles de du ou de dv sont en ortho-involution. Pour chaque système particulier de valeurs de u et de v, on peut poursuivre la simplification. Par exemple, en multipliant u et v par des constantes convenablement choisies, on peut faire en sorte que l'on ait

$$(13)\qquad p^2 + q^2 + r^2 = 2, \qquad p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = 2.$$

Si l'on pose alors

$$(14)\qquad p\xi + q\eta + r\zeta = 2\alpha, \qquad p_1\xi_1 + q_1\eta_1 + r_1\zeta_1 = 2\beta,$$

la valeur de $\mathfrak{M}$ deviendra

$$(15)\qquad \mathfrak{M} = \frac{\alpha\, du^2 + \beta\, dv^2}{du^2 + dv^2},$$

et l'on voit qu'elle variera entre les limites extrêmes α et β. Le maximum et le minimum de $\mathfrak{M}$ correspondent donc à ces mouvements qui sont en ortho-involution et que l'on obtient en annulant soit du, soit dv. Nous avons vu que leurs axes se coupent à angle droit. Prenons les bissectrices de ces deux droites pour axes des x et des y. Cette hypothèse entraîne les simplifications suivantes.

L'axe de la vis qui correspond à l'hypothèse où u varie seule a pour coordonnées pluckériennes

$$p, \quad q, \quad r, \quad \xi - \alpha p, \quad \eta - \alpha q, \quad \zeta - \alpha r.$$

Ses équations seront donc

$$\begin{aligned} \xi - \alpha p + qz - ry &= 0, \\ \eta - \alpha q + rx - pz &= 0, \\ \zeta - \alpha r + py - qx &= 0. \end{aligned}$$

Pour qu'elles représentent la droite

$$z = 0, \qquad y = x,$$

il faut qu'on ait

$$r = 0, \qquad \xi = \alpha p, \qquad \eta = \alpha q, \qquad p = q, \qquad \zeta = 0.$$

Par suite, en tenant compte de la relation (13), on pourra prendre

$$p = 1, \qquad q = 1, \qquad r = 0, \qquad \xi = \alpha, \qquad \eta = \alpha, \qquad \zeta = 0.$$

Un calcul analogue donnera, pour le second axe,

$$p_1 = 1, \qquad q_1 = -1, \qquad r_1 = 0, \qquad \xi_1 = \beta, \qquad \eta_1 = -\beta, \qquad \zeta_1 = 0.$$

Avec ces différentes valeurs, les équations (4) qui définissent l'axe du mouvement hélicoïdal deviendront

$$(16) \qquad \begin{cases} (\alpha - \beta)\, du\, dv - z(du^2 + dv^2) = 0, \\ (x - y)\, du - (x + y)\, dv = 0. \end{cases}$$

Ces formules si simples, jointes à l'équation (15), permettent une discussion complète.

53. Les axes des mouvements hélicoïdaux rencontrent tous une même droite, l'axe des z, et lui sont normaux.

Pour définir la surface conoïde qu'ils engendrent, posons

$$(17) \qquad \alpha - \beta = 2h, \qquad \alpha + \beta = 2g;$$

on aura

$$(18) \qquad z = h\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad \mathfrak{M} = g + \frac{2hxy}{x^2 + y^2}.$$

Le conoïde lieu des axes a été appelé *cylindroïde* par les géomètres anglais, nous verrons pourquoi; il porte aussi le nom de *conoïde de Plücker*, du nom du grand géomètre qui l'a étudié le premier et en a donné les principales propriétés. Son étude présente un vif intérêt.

Avant de la commencer, nous expliquerons pourquoi la valeur de $\mathfrak{M}$ contient une constante g qui ne figure pas dans l'équation du conoïde.

Si, dans les formules (4) et (5), on remplace ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1

respectivement par $\xi - kp$, $\eta - kq$, $\zeta - kr$, $\xi_1 - kp_1$, $\eta_1 - kq_1$, $\zeta_1 - kr_1$, sans rien changer aux rotations, les équations de l'axe du mouvement hélicoïdal qui correspond à un système donné de valeurs de du et de dv ne sont pas changées; mais $\mathfrak{M}$ doit être remplacé par $\mathfrak{M} - k$. Ainsi, on peut conserver les axes de tous les mouvements hélicoïdaux en diminuant d'une quantité arbitraire, choisie à volonté, les pas de toutes les vis auxquelles ils servent de support. Nous ferons plus loin usage de cette remarque; elle explique dès à présent pourquoi l'expression de $\mathfrak{M}$ contient une constante qui ne figure pas dans l'équation du conoïde.

56. La forme de cette surface est facile à étudier.

Le conoïde s'étend entre les deux plans

$$z = h, \qquad z = -h.$$

Il admet deux plans de symétrie : le plan des xz et le plan des yz. Il admet aussi deux axes de symétrie : les deux bissectrices des axes des x et des y, qui sont d'ailleurs deux de ses génératrices. L'axe des z est une ligne double du conoïde; car il est coupé suivant deux génératrices réelles par tout plan parallèle au plan des xy, mené à une distance de ce plan inférieure à h en valeur absolue.

Comme le conoïde est du troisième degré, tout plan passant par une génératrice rectiligne le coupe en outre suivant une conique. Par suite, il contient une double infinité de coniques. Cette propriété le rapproche de la surface de Steiner.

Comme le plan de l'infini coupe la surface suivant les trois droites

$$z = 0, \qquad y = \pm xi,$$

les coniques situées sur la surface doivent se projeter suivant un cercle, qui passera à l'origine; car toutes les coniques rencontrent nécessairement la ligne double formée par l'axe des z.

Réciproquement, tout cylindre ayant pour base un tel cercle et représenté par l'équation

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y = 0 \tag{19}$$

coupe le conoïde suivant une conique.

Multiplions, en effet, l'équation précédente par z. En tenant compte de l'équation du conoïde, nous aurons

$$h(x^2 - y^2) + 2\alpha xz + 2\beta yz = 0. \tag{20}$$

Une combinaison linéaire de ces deux dernières équations nous donne

$$(\alpha x + \beta y)[h(\alpha x - \beta y) + (\alpha^2 + \beta^2)z + h(\alpha^2 - \beta^2)] = 0.$$

On peut négliger le premier facteur, qui correspond à deux droites fixes situées à l'infini. Le second facteur nous donne l'équation

$$h(\alpha x - \beta y) + (\alpha^2 - \beta^2)z + h(\alpha^2 - \beta^2) = 0; \tag{21}$$

elle représente un plan, qui passe par la génératrice du conoïde définie par les équations

$$\alpha x - \beta y = 0, \qquad (\alpha^2 + \beta^2)z + h(\alpha^2 - \beta^2) = 0.$$

Ce plan coupe le cylindre (19) suivant une des coniques situées sur le conoïde.

Ces coniques, en nombre doublement infini, qui se trouvent sur la surface, peuvent servir de directrices à ses génératrices rectilignes. Par exemple, le conoïde peut être engendré, et d'une infinité de manières, par une droite qui, rencontrant normalement une des génératrices rectilignes d'un cylindre droit, s'appuie sur une section plane de ce cylindre. Le lecteur vérifiera aisément que ce mode de génération n'a pas un degré trop grand de généralité et donne toujours la surface de Plücker.

On peut aussi, évidemment, obtenir d'autres modes de génération, non plus avec des droites, mais avec des coniques variables. Nous allons voir que l'on peut même choisir des coniques qui demeurent invariables de forme dans leur déplacement. Cela nous conduira à signaler une propriété curieuse de tous les conoïdes droits.

57. Considérons un tel conoïde, ayant pour axe l'axe des z, et coupons-le par le cylindre (C) qui contient également cet axe et est défini, par exemple, par l'équation (19). Nous obtiendrons ainsi une section (S). Nous allons montrer que tous les

cylindres (C) de même rayon couperont le conoïde suivant des courbes qui seront toutes égales à (S).

On peut, en effet, imaginer que l'on obtienne tous ces cylindres en faisant *rouler* l'un d'eux sur le cylindre (C′) de rayon double

$$x^2 + y^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2),$$

qui a pour axe l'axe des z. On sait que, dans ce mouvement, tous les points du cylindre (C) décrivent des rayons de (C′), c'est-à-dire des normales de (C′) qui viennent rencontrer normalement aussi l'axe des z. Celles de ces normales qui aboutissent aux points de la courbe (S), pour une position particulière de (C), sont précisément les génératrices du conoïde. Ainsi, quand le cylindre (C) roule intérieurement sur (C′), la courbe (S) engendre le conoïde proposé, ou tout au moins la portion de ce conoïde qui est intérieure à (C′).

On voit donc que, si l'on coupe un conoïde droit par un cylindre de révolution contenant son axe, la courbe de section (S) peut, sans changer de forme, engendrer par son déplacement le conoïde proposé. Un point déterminé de (S) se meut sur une génératrice déterminée du conoïde; de sorte que le déplacement de (S) s'exécute parallèlement au plan directeur du conoïde.

Dans le cas d'un hélicoïde gauche à plan directeur, les courbes (S) sont des hélices qui sont des courbes d'égale pente de la surface et dont le pas est la moitié de celui des hélices qui coupent à angle droit toutes les génératrices rectilignes de la surface.

Dans le cas du conoïde de Plücker, les courbes (S) sont, nous l'avons vu, des coniques. Le plan de chacune de ces coniques contient une génératrice du conoïde qui coupe l'axe des z au même point que la conique. On voit donc que le roulement du cylindre (C) amènera le plan de la conique variable à passer par les diverses génératrices rectilignes de la surface. On pourra donc, pour obtenir tous les modes de génération par une conique invariable de forme, supposer que, dans sa position initiale, le plan de cette conique passe, par exemple, par la génératrice la plus haute

$$z = h, \qquad y = 0.$$

L'ellipse tangente à cette génératrice au point A, où elle coupe

l'axe des z, a son petit axe dans le plan des xy; et les extrémités B, B′ de ce petit axe sont placées symétriquement par rapport au plan des yz sur les deux génératrices du conoïde

$$z = 0, \qquad y = \pm x,$$

qui se trouvent dans ce plan. On est ainsi conduit à la génération suivante du conoïde :

Soient A, A′ les deux points de l'axe du conoïde par lesquels passent ses deux génératrices extrêmes, soient OB, OC les deux génératrices, nécessairement rectangulaires, qui sont dans le plan médian du conoïde. Construisons une conique quelconque ayant les extrémités de son petit axe sur OB, OC à la même distance de O et l'extrémité de son grand axe en A. On engendre le conoïde en déplaçant cette conique de telle manière que les extrémités de son petit axe restent sur OB, OC respectivement et qu'elle ne cesse de rencontrer l'axe AA′ du conoïde ou encore, ce qui semblerait au premier abord impossible à réaliser, de telle manière que l'extrémité de son grand axe décrive la parallèle menée par A à la bissectrice extérieure de l'angle BOC.

On voit que toutes les coniques tracées sur le conoïde auront même distance focale.

58. La propriété générale des conoïdes droits que nous avons signalée nous conduit, par son interprétation, à une propriété nouvelle et *caractéristique* du conoïde de Plücher. Nous avons vu que tous les cylindres définis par l'équation

$$xx_0 + yy_0 = x^2 + y^2, \tag{22}$$

où les paramètres x_0, y_0 satisfont à la condition

$$x_0^2 + y_0^2 = \text{const.},$$

coupent le conoïde droit suivant des courbes (S) toutes égales. Il est très aisé de donner une construction géométrique des courbes (S). En effet, l'équation (22) exprime que le plan normal à la génératrice du conoïde au point (x, y, z) va passer par un point fixe de coordonnées (x_0, y_0), la troisième coordonnée étant arbitraire. Cela nous conduit donc à énoncer la proposition suivante :

Si l'on abaisse d'un point fixe des perpendiculaires sur les génératrices du conoïde, les pieds de ces perpendiculaires engendrent une courbe (S) qui demeure invariable de forme quand le point fixe reste à une distance invariable de l'axe du conoïde. Cette courbe se projette sur le plan directeur suivant un cercle.

Appliquée au conoïde de Plücker, cette proposition nous montre que *les projections d'un point fixe quelconque de l'espace sur les génératrices rectilignes sont des courbes planes.*

Dans un Article inséré au Tome XXVIII du *Bulletin de la Société mathématique de France*, p. 261, M. Appell a démontré que cette unique propriété caractérise le cylindroïde : *Toute surface réglée pour laquelle le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur les génératrices est une courbe plane est nécessairement un cylindre ou un conoïde de Plücker.*

Après M. Appell, MM. R. Bricard, A. Demoulin sont revenus sur le même sujet dans le Tome XXIX du *Bulletin de la Société mathématique de France*. Nous allons indiquer rapidement la démonstration de M. Bricard.

Si l'on prend les symétriques d'une figure quelconque (F) par rapport aux génératrices rectilignes d'une surface réglée, on a évidemment une figure (F′) toujours égale à elle-même, mais qui se déplace d'une manière continue quand on emploie toutes les génératrices de la surface réglée. Les courbes décrites par les différents points de cette figure mobile sont évidemment les lieux des points symétriques d'un point fixe de l'espace par rapport à toutes les génératrices de la surface réglée. Or, celle de ces courbes qui dérive ainsi d'un point A de (F) est évidemment homothétique à la courbe lieu des projections de A sur les génératrices de la surface réglée. La question que nous avons à résoudre se ramène donc d'abord à celle-ci :

Y a-t-il un déplacement dans lequel tous les points de la figure invariable décrivent des courbes planes?

Cette question a été résolue depuis longtemps. On sait qu'en écartant le cas banal où le déplacement de la figure aurait lieu parallèlement à un plan fixe, le seul déplacement répondant à la question est défini par la proposition suivante :

Le déplacement est obtenu par le mouvement d'un cylindre de

révolution (C) qui roule intérieurement sur un cylindre de rayon double (C′) et qui glisse en outre le long de la génératrice de contact, de telle manière qu'un des points qui lui sont invariablement liés demeure dans un plan fixe [1].

M. Bricard s'appuie sur cette proposition, et il remarque en outre que, le déplacement de la figure (F′) ayant été obtenu par symétrie, *le mouvement inverse du précédent doit être identique au mouvement direct*, ce qui exige que les cylindres (C) et (C′) soient de rayon nul et se réduisent à des droites coïncidentes.

Ainsi, le mouvement de la figure (F′) ne peut être qu'un mouvement hélicoïdal autour d'un axe *fixe* Oz.

Cela nous suffit. Comme on passe d'une position de (F′) à toute autre par deux symétries autour de deux génératrices de la surface réglée, comme un mouvement hélicoïdal ne peut être remplacé par deux symétries que si les axes de ces symétries rencontrent à angle droit l'axe du mouvement, on voit que la surface cherchée ne peut être qu'un conoïde droit.

La démonstration s'achève aisément. Puisque les courbes (S) que nous avons définies plus haut sont des courbes planes dont la projection sur le plan directeur est un cercle rencontrant l'axe, ce sont nécessairement des ellipses qui rencontrent l'axe; et le conoïde cherché est engendré par une droite qui coupe à angle droit une génératrice rectiligne d'un cylindre de révolution et s'appuie sur une section plane de cette surface. C'est la génération que nous avons donnée plus haut pour le conoïde de Plücker.

Si nous avions envisagé le cas banal où le mouvement de (F′) se fait parallèlement à un plan fixe, nous aurions obtenu comme nouvelle solution un cylindre quelconque. Cette association du conoïde avec le cylindre dans la solution du problème explique le nom de cylindroïde qui lui a été donné.

59. Nous donnerons encore une nouvelle et curieuse génération du conoïde de Plücker. Mais, avant de la faire connaître, nous allons montrer comment on traduira par des constructions géométriques les formules données plus haut. Reprenons l'équation du

---

[1] *Voir* une Note de l'auteur dans les *Leçons de Cinématique*, de M. Gabriel Kœnigs, p. 352.

conoïde et l'expression du pas de la vis

$$(23) \qquad z = h\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad \mathfrak{M} = g + \frac{2hxy}{x^2 + y^2}.$$

Si l'on introduit l'angle ω que fait une génératrice rectiligne avec la génératrice la plus haute

$$z = h, \qquad y = 0,$$

il faudra poser

$$(24) \qquad y = x \operatorname{tang} \omega,$$

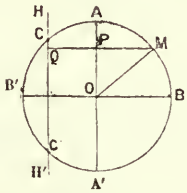
et l'on aura

$$(25) \qquad z = h \cos 2\omega,$$

$$(26) \qquad \mathfrak{M} = g + h \sin 2\omega.$$

Décrivons un cercle de centre O et de rayon h (*fig.* 1). On peut supposer que A soit le point le plus haut et A′ le point le plus

Fig. 1.



bas de l'axe du conoïde. Alors, si l'on prend l'angle AOM égal à 2ω et si l'on abaisse de M la perpendiculaire MP sur AA′, OP sera la valeur de z donnée par la formule (25); et, pour avoir la valeur de $\mathfrak{M}$, il faudra mener une parallèle HH′ à AA′ à la distance g de AA′, à gauche si g est positive, à droite dans le cas contraire. Le pas $\mathfrak{M}$ sera représenté par la longueur MQ. Si HH′ coupe le cercle en deux points C, C′, $\mathfrak{M}$ deviendra nul pour ces deux points et il y aura deux mouvements hélicoïdaux qui se réduiront à des rotations. Ces mouvements seront imaginaires si HH′ ne rencontre pas le cercle.

Les mouvements pour lesquels le pas est le même correspondent à deux points placés symétriquement par rapport à BB′. Les valeurs de ω relatives à ces deux points sont complémentaires; elles définissent sur la surface deux génératrices que nous avons appelées

associées, et qui sont symétriques l'une de l'autre par rapport aux axes de symétrie de la surface. Ces axes de symétrie sont associés à eux-mêmes; ils correspondent aux points B, B′, c'est-à-dire aux deux mouvements pour lesquels le pas est maximum ou minimum.

S'il y a des rotations réelles, il y aura des vis *dextrorsum* et des vis *sinistrorsum*. Si, au contraire, les deux rotations sont imaginaires, toutes les vis seront *dextrorsum* ou *sinistrorsum* suivant que g sera positif ou négatif.

Nous avons vu que, sans changer la distribution des axes de ces vis, on peut diminuer ou augmenter tous leurs pas d'une même quantité quelconque. On pourra donc toujours annuler les pas de vis, nécessairement égaux, qui correspondent à deux génératrices associées *quelconques* (G), (G′). Dans l'ensemble des mouvements ainsi transformés, ces deux génératrices deviendront des axes de rotation, et chacun des nouveaux mouvements hélicoïdaux résultera de la composition de deux rotations convenablement choisies autour de ces droites. En d'autres termes, (G), (G′) deviendront des droites conjuguées dans chacun des nouveaux mouvements hélicoïdaux.

Or, on sait, et il est aisé de démontrer, que deux droites conjuguées (G), (G′) appartiennent à un paraboloïde équilatère dont les deux axes de symétrie sont l'axe même du mouvement hélicoïdal et la plus courte distance des deux droites. Abaissons, en effet, de tous les points de l'une des droites (G) des perpendiculaires sur l'axe du mouvement hélicoïdal. Ces droites, étant perpendiculaires à l'axe, seront, par cela même, normales au déplacement de tous leurs points. D'autre part, comme elles rencontrent la droite (G), elles rencontreront aussi sa conjuguée (G′). Ce sont elles qui engendrent notre paraboloïde équilatère, contenant (G), (G′) et l'axe (A) du conoïde, perpendiculaire commune à (G) et à (G′).

Ainsi, nous connaissons trois droites des divers paraboloïdes équilatères qui correspondent aux divers mouvements hélicoïdaux, et l'une de ces droites (A) est l'un des axes de symétrie de ces paraboloïdes. Pour avoir ces paraboloïdes et leur second axe de symétrie, il n'y a qu'à effectuer la construction suivante :

On joindra par une droite (B) un point quelconque de (G) à un point quelconque de (G′). Le paraboloïde qui contiendra cette

droite en même temps que (G), (G′) et (A) sera équilatère et aura pour second axe de symétrie la perpendiculaire commune à (A) et à (B). Nous sommes donc conduits à cette génération nouvelle et très élégante du conoïde de Plücker :

Étant données deux droites (D), (Δ), *dont la perpendiculaire commune est la droite* (E), *les plus courtes distances de* (E) *et des droites qui rencontrent* (D), (Δ) *engendrent un conoïde de Plücker qui contient* (D), (Δ) *et a pour axe* (E). Ce conoïde contient aussi les deux bissectrices du couple (D), (Δ), c'est-à-dire les deux axes par rapport auxquels ces deux droites sont placées symétriquement.

Par son indétermination même, cette construction donne naissance à plusieurs autres. On a, par exemple, le théorème suivant :

Les perpendiculaires à des droites concourantes d'un plan et à une droite fixe de l'espace engendrent un conoïde de Plücker.

60. Nous avons vu que les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point A de l'espace sur les génératrices du conoïde décrivent une conique. Les perpendiculaires elles-mêmes engendrent donc un cône du second degré, ce qui nous conduit à la proposition suivante :

Le complexe (K) *des droites qui rencontrent orthogonalement les génératrices rectilignes du conoïde est du second degré.*

Nous allons dire quelques mots de ce complexe qui dérive si simplement du conoïde. En partant de sa définition, on trouvera aisément son équation, qui est

$$ab_1 - ba_1 + h(a^2 - b^2) = 0, \tag{27}$$

a, b, c, a_1, b_1, c_1 désignant les coordonnées pluckériennes de la ligne droite (n° 52). On peut le définir aussi comme le complexe des droites qui rencontrent deux génératrices associées du conoïde. En effet, soit (d) une droite qui rencontre deux génératrices associées (G), (G′), il résulte de la génération même que nous venons de donner au numéro précédent que la perpendiculaire

commune à (d) et à l'axe du conoïde sera une génératrice (G'') du conoïde. La droite (d) est donc perpendiculaire à cette génératrice. La réciproque s'établit de la même manière; toute droite (d) normale à une génératrice (G'') et rencontrant une autre génératrice (G) devra couper aussi la génératrice associée (G').

A cette double définition du complexe on peut en adjoindre plusieurs autres. Mais auparavant il faut indiquer quelle est sa *surface des singularités*, c'est-à-dire la surface lieu des points pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans.

Cette surface des singularités, qui est en général du quatrième ordre, se décompose ici. Elle comprend le plan de l'infini et le conoïde de Plücker. En effet, pour chaque point du conoïde, le cône du complexe se décompose de la manière suivante : Si (G) est la génératrice qui passe en ce point A, toutes les perpendiculaires à (G) en A engendrent un plan (P); de même toutes les droites passant par A et rencontrant la génératrice (G') associée à (G) engendrent un plan (P'). D'après la double définition du complexe (K), le cône du complexe relatif au point A se décompose dans les plans (P), (P'); cela suffit à montrer que le conoïde de Plücker fait partie de la surface des singularités du complexe.

Supposons que le point A soit sur l'une des droites qui sont dans le plan médian et sont des axes de symétrie du conoïde. Désignons par (B), par exemple, celle sur laquelle se trouve A. Comme elle est *associée* à elle-même, le plan (P') se réduira ici au plan tangent du conoïde en A. Ainsi, toutes les droites qui sont tangentes au conoïde en un point de l'un de ses deux axes de symétrie font partie du complexe (K); et par suite elles sont perpendiculaires à celle des génératrices rectilignes du conoïde qui passe par le point où elles coupent de nouveau cette surface.

On peut déduire de là une conséquence importante. Soit A un point quelconque de l'un des axes de symétrie et (G) une génératrice quelconque du conoïde. Si de A on abaisse une perpendiculaire sur (G), cette perpendiculaire (p) sera dans le plan tangent au conoïde en A. Soit (G') la génératrice associée à (G). On peut passer de (G) à (G') par un renversement (rotation à 180°) autour de (p), renversement qui laisse (G) invariable, puis par un renversement autour de l'axe de symétrie (B) qui contient le point A, renversement qui amène (G) en (G'). Or, deux renversements

autour de deux droites qui se coupent équivalent à une rotation égale au double de leur angle autour de la perpendiculaire commune à ces deux droites. En appliquant ici ce résultat général, on voit que :

Deux génératrices associées (G), (G′) *du conoïde peuvent être amenées à coïncider par une rotation qui se fait autour de l'une quelconque des normales au conoïde dont le pied se trouve sur l'un des deux axes de symétrie.*

La question des axes de rotation par lesquels on peut amener à coïncider l'une avec l'autre deux droites (D), (Δ) a été bien étudiée. On sait que ces axes de rotation forment les deux séries de génératrices rectilignes d'un paraboloïde équilatère (Π) qui contient les deux axes de symétrie du couple (D), (Δ) et dont les plans tangents sont les plans perpendiculaires sur les milieux des segments AB qui joignent un point quelconque A de (D) à un point quelconque B de (Δ). Si l'on prend un autre couple de points tel que $AA' = BB'$, les plans perpendiculaires sur le milieu de AB et sur le milieu de A′B′ se coupent suivant une génératrice rectiligne de (Π).

On trouvera ici très aisément l'équation du paraboloïde (Π). Elle est la suivante

$$4hz = y^2 - x^2. \tag{28}$$

Ce paraboloïde coupe à angle droit le conoïde en chaque point des deux axes de symétrie.

Lorsqu'on passe du couple de génératrices associées à tout autre couple, le paraboloïde (Π) n'a pas changé; seule variera la grandeur de la rotation par laquelle on amène (G) en (G′).

Les considérations précédentes nous amènent à deux générations nouvelles du complexe (K). Comme chacune de ses droites rencontre deux génératrices associées et que le milieu du segment compris entre ces génératrices est dans le plan des deux axes de symétrie, on peut dire que

Le complexe (K) *est le lieu des droites telles que le plan qui leur est perpendiculaire au point où elles rencontrent le plan des axes de symétrie soit tangent au paraboloïde* (Π).

D'autre part, d'après le théorème de Monge, le plan des axes de symétrie est le lieu des points d'où l'on peut mener au paraboloïde (II) trois plans tangents rectangulaires. D'après cela, soient (d) une droite du complexe (K) et m le point où elle coupe le plan des xy. Comme le plan perpendiculaire à (d) en m est un plan tangent au paraboloïde (II), les deux plans tangents à ce paraboloïde menés par la droite (d) devront être rectangulaires.

Ainsi, le complexe (K) *est le lieu des droites par lesquelles on peut mener deux plans tangents rectangulaires au paraboloïde* (II).

Cette propriété rapproche le conoïde de Plücker de la surface des ondes qui a la même propriété quand on substitue au paraboloïde (II) un ellipsoïde convenablement choisi ([1]).

Nous signalerons encore les propriétés suivantes :

Le complexe (K) *est à lui-même son propre polaire réciproque par rapport à* (II).

Les génératrices rectilignes des paraboloïdes homofocaux à (II) *qui passent par le sommet de ces paraboloïdes engendrent le conoïde de Plücker.*

Les plus courtes distances entre une droite fixe et les génératrices rectilignes d'un conoïde de Plücker engendrent un autre conoïde de Plücker.

Ce dernier et élégant théorème est dû à J. Petersen ([2]).

61. Après avoir étudié le cas général, nous envisagerons d'une manière particulière celui où l'on sait *a priori* que, parmi les divers déplacements, il en existe deux qui se réduisent à des rotations autour de deux droites distinctes et concourantes. En se plaçant dans cette hypothèse, Ribaucour a obtenu un élégant théorème ([3]) que nous allons démontrer.

([1]) *Voir* une Note de l'auteur dans le Tome II du *Cours de Mécanique de Despeyrous*, p. 606.

([2]) J. Petersen, *Nouveau principe pour études de géométrie des droites* (*Bulletin de l'Académie royale de Copenhague pour* 1898).

([3]) Ribaucour, *Sur la déformation des surfaces* (*Comptes rendus*, t. LXX, p. 330).

Il est aisé de reconnaître que, dans le cas qui nous occupe, l'équation (9) doit être une identité. Désignons, en effet, par $\frac{du}{dv}$, $\frac{\delta u}{\delta v}$ deux valeurs de $\frac{du}{dv}$ relatives aux rotations considérées; on aura nécessairement

$$(p\,du + p_1\,dv)(\xi\,du + \xi_1\,dv) + \ldots = 0,$$
$$(p\,\delta u + p_1\,\delta v)(\xi\,\delta u + \xi_1\,\delta v) + \ldots = 0.$$

Les axes de ces rotations sont définis par les formules (10). La condition pour que ces axes se coupent s'écrit de la manière très symétrique

$$(p\,du + p_1\,dv)(\xi\,\delta u + \xi_1\,\delta v) + (p\,\delta u + p_1\,\delta v)(\xi\,du + \xi_1\,dv) + \ldots = 0.$$

Les trois équations que nous venons d'obtenir peuvent se ramener au type suivant :

$$(29)\qquad \begin{cases} A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0, \\ A\,\delta u^2 + 2B\,\delta u\,\delta v + C\,\delta v^2 = 0, \\ A\,du\,\delta u + B(du\,\delta v + dv\,\delta u) + C\,dv\,\delta v = 0, \end{cases}$$

où A, B, C ont pour valeurs

$$A = p\,\xi + \ldots,$$
$$2B = p_1\xi + p\xi_1 + \ldots,$$
$$C = p_1\xi_1 + \ldots.$$

Si l'on considère les trois équations (29) comme déterminant les inconnues A, B, C, leur déterminant sera $(du\,\delta v - dv\,\delta u)^3$, et, par hypothèse, il ne sera pas nul. On aura donc

$$A = B = C = 0,$$

et, par conséquent, l'équation (9) sera identiquement satisfaite.

On arrive aux mêmes conclusions par un raisonnement beaucoup plus simple. Si les deux droites D, Δ se coupent, leur point d'intersection aura une vitesse nulle dans tous les déplacements. On devra donc avoir, si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées de ce point relativement aux axes mobiles,

$$(30)\qquad \begin{cases} \xi + qz' - ry' = 0, & \xi_1 + q_1z' - r_1y' = 0, \\ \eta + rx' - pz' = 0, & \eta_1 + r_1x' - p_1z' = 0, \\ \zeta + py' - q'x' = 0, & \zeta_1 + p_1y' - q_1x' = 0, \end{cases}$$

et il n'est pas difficile de déduire de là les équations

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0.$$

Voici maintenant la conséquence qui constitue le théorème de Ribaucour.

Supposons que, pour toutes les valeurs de u et de v, il y ait des valeurs de x', y', z' satisfaisant aux équations (30). Le point (x', y', z'), considéré comme appartenant au système mobile, décrira une surface (s) que nous regarderons comme faisant partie de ce système. Si l'on rapporte le même point aux axes fixes, il décrira une surface (S). Donnons à u et à v des accroissements du, dv; le point se déplacera sur la surface (S) et décrira un arc infiniment petit dont les projections sur les axes mobiles, données par les formules (4), seront, *en tenant compte des équations* (30),

$$dx', \quad dy', \quad dz'.$$

Or, ce sont là les projections sur les mêmes axes du chemin décrit par le point considéré sur la surface (s). Ces deux chemins ayant toujours même direction et même grandeur, on voit que les deux surfaces (s) et (S), non seulement sont tangentes, mais encore roulent l'une sur l'autre, de telle manière que les chemins parcourus par le point de contact sur les deux surfaces aient toujours la même longueur et la même direction.

En d'autres termes, les deux surfaces se correspondent point par point, de telle manière que deux courbes correspondantes aient la même longueur. On dit alors qu'elles sont *applicables l'une sur l'autre.*

Nous pouvons ajouter les propriétés suivantes :

Tirons des équations (30) les valeurs de $\xi, \ldots, \xi_1, \ldots$ et portons-les dans les équations (3). Après un calcul facile, nous obtiendrons les relations

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} & q\frac{\partial z'}{\partial v} - r\frac{\partial y'}{\partial v} - q_1\frac{\partial z'}{\partial u} + r_1\frac{\partial y'}{\partial u} = 0, \\ & r\frac{dx'}{\partial v} - p\frac{\partial z'}{\partial v} - r_1\frac{\partial x'}{\partial u} + p_1\frac{\partial z'}{\partial u} = 0, \\ & p\frac{\partial y'}{\partial v} - q\frac{\partial x'}{\partial v} - p_1\frac{\partial y'}{\partial u} + q_1\frac{\partial z'}{\partial u} = 0, \end{aligned} \right.$$

qui conduisent à une conséquence importante. Multiplions-les

respectivement par $\frac{\partial x'}{\partial v}$, $\frac{\partial y'}{\partial v}$, $\frac{\partial z'}{\partial v}$ et ajoutons-les. Nous aurons

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ \frac{\partial x'}{\partial u} & \frac{\partial y'}{\partial u} & \frac{\partial z'}{\partial u} \\ \frac{\partial x'}{\partial v} & \frac{\partial y'}{\partial v} & \frac{\partial z'}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

On pourra donc poser, λ et μ_1 étant deux fonctions convenablement choisies,

$$(32) \qquad \begin{cases} p_1 = -\mu_1 \frac{\partial x'}{\partial u} + \lambda \frac{\partial x'}{\partial v}, \\ q_1 = -\mu_1 \frac{\partial y'}{\partial u} + \lambda \frac{\partial y'}{\partial v}, \\ r_1 = -\mu_1 \frac{\partial z'}{\partial u} + \lambda \frac{\partial z'}{\partial v}. \end{cases}$$

On aurait de même

$$p = \lambda_1 \frac{\partial x'}{\partial u} + \mu \frac{\partial x'}{\partial v},$$

et les équations analogues en q, r. Si l'on substitue, d'ailleurs, ces valeurs des rotations dans les équations (31), on obtient la condition complémentaire

$$(33) \qquad \lambda_1 = -\lambda,$$

en sorte que l'on a, pour p, q, r, les valeurs suivantes :

$$(34) \qquad \begin{cases} p = -\lambda \frac{\partial x'}{\partial u} + \mu \frac{\partial x'}{\partial v}, \\ q = -\lambda \frac{\partial y'}{\partial u} + \mu \frac{\partial y'}{\partial v}, \\ r = -\lambda \frac{\partial z'}{\partial u} + \mu \frac{\partial z'}{\partial v}, \end{cases}$$

qui, jointes aux équations (32), remplacent les formules (3) et (31).

L'interprétation géométrique des équations (32) et (34) est évidente. Les dérivées de x', y', z' par rapport à u et par rapport à v étant proportionnelles aux cosinus directeurs de deux tangentes à la surface lieu du centre instantané, les deux rotations dont les composantes sont p, q, r et p_1, q_1, r_1 sont dans le plan tangent à

cette surface. Il en sera de même, évidemment, de la rotation qui correspond à une variation simultanée quelconque de u et de v; cela résulte des formules générales qui donnent les composantes de cette rotation. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

S'il arrive, pour chaque position du système mobile, que deux des mouvements infiniment petits, par lesquels on amène le système dans une position infiniment voisine, se réduisent à deux rotations autour d'axes concourant en un certain point, tout autre mouvement infiniment petit du système se réduira à une rotation autour d'un axe passant par le même point, que l'on peut appeler centre instantané de rotation. *Les deux surfaces lieux du centre instantané, dans le système mobile et dans l'espace, seront applicables l'une sur l'autre; elles seront toujours en contact, de telle manière que tout mouvement du système mobile se réduira au roulement de l'une des surfaces sur l'autre, l'axe instantané de la rotation passant à chaque instant par le point de contact des deux surfaces et se trouvant dans leur plan tangent commun.*

Il nous reste à donner l'interprétation géométrique de l'équation (33). Elle exprime, on le reconnaîtra aisément, que la relation entre la direction de la courbe suivie par le pôle instantané et celle de l'axe de rotation correspondant est *réciproque;* c'est-à-dire que, si, après avoir considéré un déplacement infiniment petit pour lequel l'axe de la rotation instantanée a une certaine direction, on envisage le déplacement dans lequel cette direction devient celle de la route suivie par le centre instantané, l'axe de rotation dans ce nouveau déplacement aura même direction que la route du centre dans le premier. On pourra ici constituer une théorie toute semblable à celle des tangentes conjuguées et de l'indicatrice de Dupin; on trouvera également deux séries de lignes, analogues aux lignes asymptotiques, qui sont caractérisées par cette propriété que, lorsque le roulement des deux surfaces l'une sur l'autre s'effectue de telle manière que le centre instantané décrive l'une de ces courbes, la rotation est à chaque instant dirigée suivant la tangente à la courbe. Par conséquent, les deux courbes correspondantes, qui sont alors les routes du centre sur les deux surfaces,

ont, à chaque instant, même courbure et même plan osculateur. Nous laissons au lecteur le soin de développer ces indications.

Réciproquement, toutes les fois que l'on connaîtra deux surfaces (S), (s), applicables l'une sur l'autre, si l'on place la surface (s) de telle manière que l'un de ses points coïncide avec le point homologue de (S) et que les courbes homologues des deux surfaces qui passent en ce point y soient tangentes, ce qui pourra en général être réalisé de deux manières différentes, toutes les positions que l'on obtiendra ainsi pour la surface (s) dépendront de deux paramètres, et le déplacement à deux variables défini par ces diverses positions jouira de toutes les propriétés que nous venons de signaler.

Considérons, par exemple, toutes les surfaces (s) symétriques de (S) par rapport à ses plans tangents; elles constituent évidemment toutes les positions d'une surface (s) roulant sur (S). On pourra appliquer à ce mouvement toutes les propositions précédentes. Les surfaces trajectoires des différents points du système mobile sont homothétiques aux podaires des différents points de l'espace par rapport à (S), le rapport de similitude étant 2.

CHAPITRE VIII.

PREMIÈRES NOTIONS SUR LES COORDONNÉES CURVILIGNES.

Définition du système le plus général de coordonnées curvilignes. — Méthode de Gauss. — Élément linéaire d'une surface. — Coordonnées orthogonales. — Les surfaces de révolution rapportées à leurs méridiens et à leurs parallèles. — Rappel de la définition et des propriétés élémentaires de deux surfaces remarquables de révolution : la caténoïde et la surface pseudosphérique. — Surfaces de révolution qui partagent avec cette dernière la propriété d'avoir le produit de leurs rayons de courbure constant. — Des surfaces réglées et de leur élément linéaire. — Détermination des trajectoires orthogonales de leurs génératrices. — Élément linéaire des surfaces développables. — Les surfaces développables sont applicables sur le plan, et cela de telle manière que leurs génératrices rectilignes correspondent nécessairement à des droites du plan. — Réciproquement, toute surface applicable sur le plan est une surface développable. — Démonstration directe donnée par Ossian Bonnet de cette importante proposition.

---

62. Dans le premier Chapitre, nous avons reconnu que l'on pouvait rattacher la théorie des courbes gauches à l'étude du mouvement d'un trièdre; de même les propositions relatives aux déplacements à deux variables trouvent une application importante dans la théorie des surfaces. Mais, avant de développer cette application, nous donnerons des notions préliminaires sur les systèmes de coordonnées curvilignes que Gauss a, le premier, employés d'une manière systématique dans le Mémoire fondamental *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, publié en 1828 dans le Tome IV des *Nouveaux Mémoires de la Société de Gœttingue*.

Il y a, comme on sait, deux moyens de définir une surface. On peut la déterminer par son équation, c'est-à-dire par la relation qui existe entre les coordonnées de l'un quelconque de ses points; mais on peut aussi supposer que ces trois coordonnées aient été exprimées au moyen de deux variables indépendantes, que nous appellerons u et v. Cette seconde manière de définir la surface est

même plus générale que la première; car, si l'on prend pour u et v deux des trois coordonnées rectangulaires, l'expression de la troisième sera précisément l'équation de la surface résolue par rapport à cette coordonnée.

Un système de coordonnées curvilignes peut être représenté géométriquement. Il suffit de tracer sur la surface les deux familles de courbes, lieux des points pour lesquels l'une ou l'autre des variables u, v demeure constante. Mais il importe de remarquer que le système de coordonnées n'est pas complètement défini, si l'on donne seulement les deux familles de courbes coordonnées. On pourra évidemment, sans changer ces courbes, remplacer u et v par les variables u_1, v_1, qui seront des fonctions quelconques des premières

$$u_1 = \varphi(u), \qquad v_1 = \psi(v).$$

C'est une remarque dont on fait souvent usage, et qui permet quelquefois de grandes simplifications.

63. La méthode de Gauss repose essentiellement sur l'expression de l'arc d'une courbe quelconque tracée sur la surface.

Supposons les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de la surface exprimées en fonction des deux variables u et v. L'expression d'un arc de courbe tracé sur la surface sera donnée par la formule

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2, \tag{1}$$

où l'on a

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{E} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ \mathrm{F} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ \mathrm{G} &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Nous appellerons, pour abréger, ds l'élément linéaire. Nous le mettrons aussi sous la forme

$$ds^2 = \mathrm{A}^2\,du^2 + 2\mathrm{AC}\cos\alpha\,du\,dv + \mathrm{C}^2\,dv^2; \tag{3}$$

et l'on aura, par conséquent,

$$\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{E}}, \qquad \mathrm{C} = \sqrt{\mathrm{G}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{E}}\sqrt{\mathrm{G}}}. \tag{4}$$

Les formules (2) montrent que $A\,du$ est l'arc de la courbe $v = \text{const.}$, $C\,dv$ l'arc de la courbe $du = \text{const.}$ Enfin α est l'angle sous lequel se coupent ces deux courbes au point considéré. On aura donc

$$F = 0$$

toutes les fois que l'on emploiera des coordonnées curvilignes rectangulaires. Il résulte également des formules (2) que l'élément superficiel de la surface aura pour expression

$$AC \sin\alpha\, du\, dv = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Avant d'aller plus loin, nous allons donner quelques exemples de ce mode de représentation.

64. Considérons d'abord les surfaces de révolution, et supposons que l'on ait pris pour axe des z l'axe de la surface. Si l'on appelle r la distance d'un point du méridien à l'axe, l'équation de la surface sera

$$z = f(r).$$

Introduisons l'angle v que fait, avec le plan des xz, le méridien passant par le point considéré; nous aurons, pour les coordonnées x, y, les expressions

$$x = r\cos v, \qquad y = r\sin v,$$

et de là nous déduirons, pour l'élément linéaire, la formule

$$ds^2 = dr^2(1 + f'^2) + r^2\, dv^2. \tag{5}$$

Ici, les courbes $r = \text{const.}$ sont les parallèles; les courbes $v = \text{const.}$ sont les méridiens. Si l'on pose

$$dr\sqrt{1 + f'^2} = du,$$

r deviendra une fonction de u, et l'équation (5) prendra la forme

$$ds^2 = du^2 + \varphi(u)\, dv^2. \tag{6}$$

La signification de u est évidente : c'est l'arc du méridien compté à partir d'un parallèle fixe.

On peut mettre cette expression de l'élément sous une forme

un peu différente. Posons

$$\frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} = du_1 = \frac{dr\sqrt{1+f'^2}}{r},$$

$\varphi(u)$ deviendra une fonction $F(u_1)$ de u_1, et l'équation (6) nous donnera

$$ds^2 = F(u_1)(du_1^2 + dv^2).$$

65. Toutes les fois que l'élément linéaire d'une surface peut être ramené à la forme

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

on dit que les courbes coordonnées forment un réseau *isotherme* ou *isométrique*. La première dénomination est empruntée à la théorie de la chaleur; la seconde, qui est due à M. Bonnet, s'explique par les remarques suivantes.

Imaginons que l'on trace sur la surface toutes les courbes coordonnées correspondant à des valeurs des paramètres α, β croissant suivant des progressions arithmétiques de raison infiniment petite

$$\alpha, \quad \alpha + d\alpha, \quad \alpha + 2\,d\alpha, \quad \ldots,$$
$$\beta, \quad \beta + d\beta, \quad \beta + 2\,d\beta, \quad \ldots;$$

on aura ainsi décomposé la surface en une série de rectangles infiniment petits, dont les côtés seront égaux si l'on a pris $d\alpha = d\beta$. On dit alors que la *surface est divisée en carrés infiniment petits*. Cela n'est pas, sans doute, rigoureusement exact; mais les rectangles curvilignes formés par les lignes coordonnées considérées ont le rapport de leurs côtés adjacents d'autant plus voisin de l'unité que la raison $d\alpha$ a été choisie plus petite.

Dans le cas des surfaces de révolution, on voit que les méridiens et les parallèles constituent un système isotherme.

66. Considérons, en particulier, la surface de révolution engendrée par la révolution d'une chaînette autour de sa base. On a ici

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right),$$

et l'on trouvera sans difficulté

$$u = \sqrt{r^2 - a^2}.$$

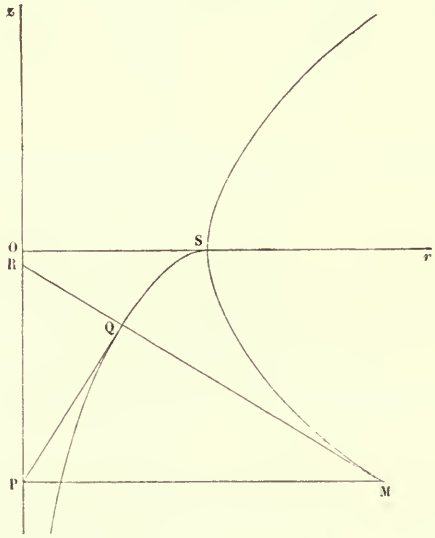
La formule (6) nous donnera, par conséquent, pour l'élément linéaire de la surface,

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2. \tag{7}$$

Cette surface très remarquable a reçu le nom d'*alysséide* ou de *caténoïde*. Comme la chaînette est la seule courbe dont le rayon de courbure soit égal et de signe contraire à la normale, la caténoïde est la seule surface de révolution pour laquelle les rayons de courbure principaux soient en chaque point égaux et de signes contraires. On a donné le nom de *surfaces minima* à toutes celles dont les rayons de courbure sont liés par cette relation. La caténoïde est donc la seule surface minima de révolution.

On sait que, si l'on considère une chaînette dont la base soit Oz (*fig.* 2) et si, du pied P de l'ordonnée du point M, on abaisse une

Fig. 2.



perpendiculaire PQ sur la tangente en M, l'arc de la chaînette, compté à partir du sommet S, sera égal au segment de droite MQ;

par conséquent, le point Q décrira une des développantes de la chaînette.

Comme PQ est constant et égal au paramètre a de la chaînette, le lieu du point Q sera la *courbe aux tangentes égales* ou *tractrice*. En désignant par φ l'angle PMQ, l'arc décrit par le point Q, lorsque φ augmente de $d\varphi$, a pour valeur

$$d\sigma = \mathrm{MQ}\, d\varphi = a \cot\varphi\, d\varphi.$$

Comme, d'ailleurs, la perpendiculaire abaissée de Q sur Oz a pour expression

$$r = a \sin\varphi,$$

on voit que l'élément linéaire de la surface engendrée par la révolution autour de Oz de la courbe aux tangentes égales sera donné par la formule

$$ds^2 = d\sigma^2 + r^2\, dv^2 = a^2(\cot^2\varphi\, d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, dv^2).$$

Posons

$$\cot\varphi\, d\varphi = du,$$

ce qui donne

$$\sin\varphi = e^u,$$

et nous aurons

$$ds^2 = a^2(du^2 + e^{2u}\, dv^2). \tag{8}$$

Remarquons, d'ailleurs, que, dans le triangle rectangle RPM, on a

$$\mathrm{MQ}.\mathrm{QR} = a^2.$$

Les centres de courbure principaux de la surface sont évidemment les points M et R; donc les rayons de courbure principaux satisfont à la relation

$$\mathrm{RR}' = -a^2.$$

Mais cette propriété ne caractérise nullement la surface, il est aisé de le démontrer.

Proposons-nous, en effet, de déterminer toutes les surfaces de révolution dont les rayons de courbure sont liés par la relation précédente. Par un calcul sur lequel nous ne reviendrons pas ici,

on trouve que les variables z et r doivent satisfaire à la relation différentielle

$$dz = \pm \sqrt{\frac{b^2 - r^2}{r^2 + a^2 - b^2}}\, dr, \tag{9}$$

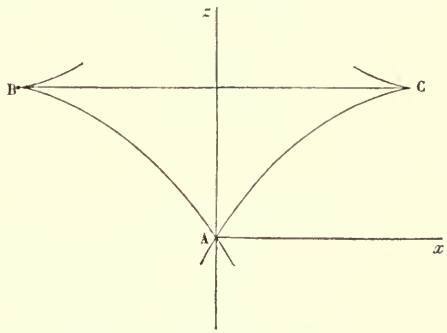
b désignant une constante arbitraire qui peut prendre toutes les valeurs possibles. L'élément linéaire de la surface est donné par la formule

$$ds^2 = \frac{a^2\, dr^2}{r^2 + a^2 - b^2} + r^2\, d\varphi^2.$$

Supposons d'abord que b soit égal à a. On retrouve alors la surface dont le méridien est la courbe aux tangentes égales. Nous lui donnerons le nom de surface *pseudosphérique*.

Si b est plus petit que a, le rayon r peut prendre toutes les valeurs inférieures à b et l'on obtient une surface qui, comme la précédente, a encore un parallèle de rebroussement BC (*fig.* 3);

Fig. 3.



mais tous les méridiens vont *couper* l'axe de la surface en un même point A, sous un angle fini dont la tangente a pour valeur

$$\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}.$$

Si l'on pose alors

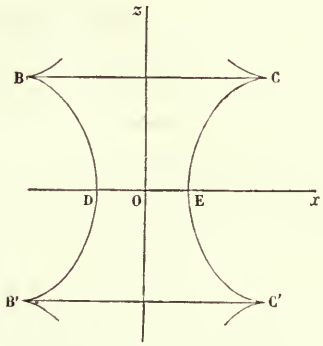
$$r = \sqrt{a^2 - b^2}\, \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \qquad v = \frac{av'}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

on obtient, pour l'élément linéaire, l'expression

$$ds^2 = a^2 \left[du^2 + \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)^2 dv'^2 \right]. \tag{10}$$

Si b est, au contraire, plus grand que a, r a un minimum qui est $\sqrt{b^2 - a^2}$, et les méridiens ne rencontrent plus l'axe. La sur-

Fig. 4.



face admet alors deux parallèles de rebroussement et un cercle de gorge DE (*fig.* 4).

Si l'on pose

$$r = \sqrt{b^2 - a^2}\,\frac{e^u + e^{-u}}{2}, \qquad v = \frac{av'}{\sqrt{b^2 - a^2}},$$

l'élément linéaire devient

$$ds^2 = a^2\left[du^2 + \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 dv'^2\right]. \tag{11}$$

67. Après les surfaces de révolution, nous examinerons le groupe si important formé par les surfaces réglées. Elles peuvent être définies par les trois équations

$$\left\{\begin{aligned} x &= a_1 u + b_1, \\ y &= a_2 u + b_2, \\ z &= a_3 u + b_3, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

où a, b, ... doivent être considérées comme des fonctions d'un paramètre v. Si l'on suppose

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,$$

u désignera la longueur portée sur chaque génératrice rectiligne de la surface à partir de la courbe définie par les équations

$$x = b_1, \qquad y = b_2, \qquad z = b_3. \tag{13}$$

On déduira les formules (12) l'expression suivante de l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + 2\mathrm{D}\,du\,dv + (\mathrm{A}u^2 + 2\mathrm{B}u + \mathrm{C})\,dv^2, \tag{14}$$

où A, B, C, D sont les fonctions de v définies par les relations

$$\mathrm{A} = a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2, \qquad \mathrm{C} = b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2,$$
$$\mathrm{B} = a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3', \qquad \mathrm{D} = a_1b_1' + a_2b_2' + a_3b_3'.$$

Si l'on suppose que la courbe $u = 0$, définie par les équations (13), ait été choisie parmi les trajectoires orthogonales des génératrices, on aura

$$\mathrm{D} = 0,$$

et l'élément linéaire prendra la forme plus simple

$$ds^2 = du^2 + (\mathrm{A}u^2 + 2\mathrm{B}u + \mathrm{C})\,dv^2. \tag{15}$$

Dans ce cas, le système de coordonnées sera formé des génératrices rectilignes $v =$ const. et de leurs trajectoires orthogonales.

Pour ramener l'élément linéaire général, donné par la formule (14), à la forme (15), il suffira de substituer à u la variable suivante :

$$u' = u + \int \mathrm{D}\,dv.$$

On reconnaît ainsi que, dans toutes les surfaces réglées, les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes sont déterminées par une simple quadrature.

68. Considérons, par exemple, la surface formée par les normales principales de l'hélice ou *hélicoïde gauche à plan directeur*. Elle est définie par les trois équations

$$\left\{\begin{aligned} z &= av, \\ x &= u\cos v, \\ y &= u\sin v; \end{aligned}\right. \tag{16}$$

d'où l'on déduit

$$ds^2 = (a^2 + u^2)\,dv^2 + du^2. \tag{17}$$

La comparaison des formules (7) et (17) nous montre que, si l'on fait correspondre sur l'hélicoïde et sur la caténoïde les points pour

lesquels les valeurs de u et de v sont les mêmes, les arcs de deux courbes correspondantes seront rigoureusement égaux. On dit dans ce cas, nous l'avons déja remarqué, que *les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre.* Il est clair, en effet, que si l'on considère une surface comme un tissu flexible et inextensible, et si l'on admet la possibilité de déformer cette surface sans déchirure ni duplicature, la longueur de toute courbe tracée sur la surface sera demeurée invariable dans la déformation. Sans examiner la question de savoir s'il est possible d'amener la première surface à coïncider avec la seconde par une suite continue de déformations, on dit que deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre quand elles satisfont à la définition géométrique que nous venons de donner. Le problème de la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée est un des plus intéressants, mais aussi un des plus difficiles, que l'on rencontre dans l'application de l'Analyse à la Géométrie. Dans le cas qui nous occupe, l'hélicoïde est applicable sur la caténoïde; les génératrices rectilignes de la première surface correspondent aux méridiens de la seconde et les hélices aux parallèles, et nous verrons que les deux surfaces peuvent être amenées à coïncider, l'une avec l'autre, par une déformation *continue.*

69. Revenons aux surfaces réglées. Il est aisé, lorsqu'on a seulement l'expression (15) de l'élément linéaire, de distinguer les surfaces gauches des surfaces développables.

En effet, on a identiquement

$$Au^2 + 2Bu + C = (a'_1 u + b'_1)^2 + (a'_2 u + b'_2)^2 + (a'_3 u + b'_3)^2.$$

On voit donc que le trinome premier membre sera une somme de carrés et l'on aura

$$B^2 - AC < 0,$$

tant que les équations

$$\frac{a'_1}{b'_1} = \frac{a'_2}{b'_2} = \frac{a'_3}{b'_3} \tag{18}$$

ne seront par satisfaites. Or ces dernières équations caractérisent les surfaces développables.

En effet, les équations (12) nous donnent

$$dx = a_1\,du + (a'_1 u + b'_1)\,dv,$$
$$dy = a_2\,du + (a'_2 u + b'_2)\,dv,$$
$$dz = a_3\,du + (a'_3 u + b'_3)\,dv.$$

Exprimons qu'il existe un point de la génératrice qui décrit une courbe tangente à cette génératrice; il faudra qu'en prenant pour u une fonction convenable de v, on ait

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{a_3},$$

ce qui donne, en remplaçant dx, dy, dz par leurs valeurs,

$$\frac{a'_1 u + b'_1}{a_1} = \frac{a'_2 u + b'_2}{a_2} = \frac{a'_3 u + b'_3}{a_3}.$$

Si l'on tient compte de l'équation $D = 0$, on trouvera que la valeur commune des trois rapports précédents doit être égale à zéro.

On devra donc avoir

$$-u = \frac{b'_1}{a'_1} = \frac{b'_2}{a'_2} = \frac{b'_3}{a'_3};$$

et, par conséquent, les équations (18) expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que la surface soit développable.

Enfin, en substituant à v une fonction convenable de v, on pourra réduire le coefficient A à l'unité. Nous avons donc, comme forme réduite de l'élément,

$$ds^2 = du^2 + [(u-\alpha)^2 + \beta^2]\,dv^2 \tag{19}$$

dans le cas des surfaces gauches, et

$$ds^2 = du^2 + (u-\alpha)^2\,dv^2 \tag{20}$$

dans celui des surfaces développables, α et β désignant des fonctions de v [1].

---

[1] Cette théorie laisse toutefois de côté les surfaces réglées imaginaires pour lesquelles on a

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0,$$

et qui sont engendrées par des droites recontrant le cercle imaginaire de l'infini.

70. De la forme de l'élément linéaire des surfaces des développables, on déduit facilement qu'elles sont applicables sur le plan.

Reprenons, en effet, la formule (20) et décomposons le second membre en deux facteurs

$$du + i(u - \alpha)\,dv,$$
$$du - i(u - \alpha)\,dv.$$

Si l'on multiplie ces facteurs respectivement par e^{iv}, e^{-iv}, ils deviennent des différentielles exactes, et l'on peut poser

$$(21)\qquad \begin{cases} e^{iv}[du + i(u - \alpha)\,dv] = dx + i\,dy, \\ e^{-iv}[du - i(u - \alpha)\,dv] = dx - i\,dy. \end{cases}$$

On a, en intégrant,

$$(22)\qquad \begin{cases} x + iy = u\,e^{iv} - i\int \alpha\,e^{iv}\,dv, \\ x - iy = u\,e^{-iv} + i\int \alpha\,e^{-iv}\,dv. \end{cases}$$

D'ailleurs, en multipliant membre à membre les formules (21), on obtient, pour l'élément linéaire de la surface développable, l'expression

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

qui démontre la propriété annoncée.

Les formules (22) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(23)\qquad \begin{cases} x = u\cos v + \int \alpha \sin v\,dv, \\ y = u\sin v - \int \alpha\cos v\,dv. \end{cases}$$

On voit qu'aux génératrices rectilignes de la surface, définies par la relation $v = \text{const.}$, correspondent des droites du plan; par conséquent, les trajectoires orthogonales des génératrices ont pour transformées les courbes parallèles, trajectoires orthogonales des droites du plan qui correspondent aux génératrices rectilignes. A l'arête de rebroussement, $u = \alpha$, de la développable correspond l'enveloppe de toutes les droites du plan. Tous ces résultats, que nous ne nous arrêtons pas à vérifier, sont bien d'accord avec les opérations mécaniques par lesquelles on réalise le développement de cette classe si importante de surfaces.

71. Nous venons d'indiquer un moyen d'appliquer la surface développable sur un plan. Il est naturel de se demander s'il n'y en a pas d'autre, et si, par exemple, on ne pourrait pas réaliser cette application de la surface en faisant correspondre aux génératrices rectilignes de la surface des lignes courbes du plan. Le raisonnement suivant donne la réponse à cette question.

Supposons que l'on ait, de deux manières différentes, appliqué la développable sur le plan, c'est-à-dire qu'on ait mis son élément linéaire sous les deux formes

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad ds'^2 = dx'^2 + dy'^2;$$

on en déduira

$$dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2. \tag{24}$$

Il est aisé de résoudre cette équation de la manière la plus générale; on peut, en effet, la remplacer par l'un ou l'autre des systèmes

$$\left\{\begin{aligned} dx' &= \cos\alpha\, dx - \sin\alpha\, dy, \\ dy' &= \sin\alpha\, dx + \cos\alpha\, dy, \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} dx' &= \cos\alpha\, dx + \sin\alpha\, dy, \\ dy' &= \sin\alpha\, dx - \cos\alpha\, dy, \end{aligned} \tag{25}$$

où α est une inconnue auxiliaire, et qui se déduisent l'un de l'autre par le changement de y en $-y$. Considérons, par exemple, le premier. En écrivant que les seconds membres des équations sont des différentielles exactes, nous obtenons les relations

$$\sin\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial y} = \cos\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x}, \qquad \cos\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial y} = -\sin\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x},$$

qui donnent

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0;$$

α est donc constante. En intégrant les formules (25) et désignant par x_0, y_0 deux nouvelles constantes, on aura

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0. \end{aligned}$$

Ce sont les formules de la transformation des coordonnées. Par suite, x, y et x', y' peuvent être considérées comme les coordonnées d'un même point du plan, rapporté à des axes différents; et les deux représentations de la surface développable ne doivent pas être regardées comme réellement distinctes.

72. Une autre question très intéressante se présente ici. Nous venons de voir que l'enveloppe d'un plan mobile est applicable sur le plan. La réciproque est-elle vraie, et toute surface applicable sur le plan est-elle l'enveloppe d'un plan mobile? Cette proposition a toujours été admise par Monge et les autres géomètres de son époque, comme le prouve le nom même de *surface développable* donné dès le début à l'enveloppe d'un plan mobile (¹). Elle est un corollaire immédiat des propositions générales que nous aurons à développer dans la suite; mais nous pouvons, dès à présent, en donner une démonstration directe et très simple, due à M. O. Bonnet (²).

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la surface cherchée, applicable sur un plan, et soient α, β celles du point correspondant sur le plan. On doit avoir

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\alpha^2 + d\beta^2, \tag{26}$$

ce qui donne les trois équations

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 = 1, \\ &\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 = 1, \\ &\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Différentions les deux premières de ces équations; nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = 0, \\ &\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} + \frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} = 0, \\ &\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0, \\ &\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Différentions maintenant la dernière des équations (27); en tenant

(¹) *Voir*, en particulier, le Chapitre sur les surfaces développables dans l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* de Monge.

(²) *Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. VII, p. 61.

compte des précédentes, nous trouverons

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} + \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\dfrac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} + \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \beta}\dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial y}{\partial \beta}\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial z}{\partial \beta}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = 0. \end{cases}$$

En comparant les équations (28) et (29), nous voyons que l'on doit avoir

$$(A)\qquad \frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta}} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha\,\partial \beta}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta}},$$

$$(B)\qquad \frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha\,\partial \beta}}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial \beta^2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}}.$$

Le système (A) nous apprend que $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$, sont fonctions d'une même variable, le système (B) établit qu'il en est de même pour $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, $\frac{\partial y}{\partial \beta}$, $\frac{\partial z}{\partial \beta}$. Mais, par suite de la dernière équation (27) ou de l'une des équations (29), les deux variables dont dépendent ces deux groupes de dérivées sont fonctions l'une de l'autre et, par conséquent, les six dérivées de x, y, z sont fonctions d'une même variable, que nous désignerons par t.

Cela posé si l'on désigne par p et q les dérivées de z considérée comme fonction de x et de y, p et q seront déterminées par les équations

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = p\frac{\partial x}{\partial \alpha} + q\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \beta} = p\frac{\partial x}{\partial \beta} + q\frac{\partial y}{\partial \beta},$$

qui montrent que p et q sont fonctions de t; donc p est fonction de q, ce qui caractérise, on le sait, les surfaces enveloppes d'un plan mobile.

Le nom de *développables* donné à ces surfaces est ainsi pleinement justifié.

CHAPITRE IX.

SURFACES DÉFINIES PAR DES PROPRIÉTÉS CINÉMATIQUES.

Propriété cinématique commune aux surfaces de révolution, aux cylindres et aux hélicoïdes. — Ces différentes surfaces peuvent être déplacées d'une manière continue sans cesser de coïncider avec elles-mêmes.

Définition des hélicoïdes les plus généraux. — Leur élément linéaire lorsqu'on forme un système de coordonnées curvilignes avec les hélices tracés sur la surface et leurs trajectoires orthogonales. — Théorème de Bour : La forme de l'élément linéaire ainsi obtenu convient à une double infinité d'hélicoïdes parmi lesquels se trouvent des surfaces de révolution en nombre simplement infini. — Étude des surfaces de révolution qui sont toutes applicables les unes sur les autres. — Si l'on considère les points qui se correspondent sur toutes ces surfaces, le produit des rayons de courbure principaux de la surface est le même en tous ces points; la tangente au méridien, prolongée jusqu'à l'axe, a la même longueur pour toutes les surfaces. — Application à la sphère et à la surface pseudosphérique.

Des surfaces les plus générales qui peuvent être engendrées par le mouvement d'une courbe invariable de forme. — Leur élément linéaire. — Application aux surfaces réglées. — Cas où le mouvement de la courbe invariable se réduit à une translation. — Surfaces de translation, leur étude directe. — Définition due à Lie des surfaces de translation. — Elles peuvent être considérées comme lieux des milieux de toutes les cordes qui joignent un point d'une courbe (C) à un point d'une autre courbe (C′). — Cette nouvelle définition montre bien qu'elles peuvent être engendrées de deux manières différentes par la translation d'une courbe invariable. — Propriété géométrique tout à fait générale des surfaces de translation : Les deux courbes dont la translation peut engendrer la surface déterminent sur cette surface un système de coordonnées curvilignes *conjuguées*, c'est-à-dire un système tel que les tangentes aux deux lignes coordonnées qui se croisent en chaque point de la surface sont conjuguées suivant la définition de Dupin. — Pour établir cette proposition, à laquelle la Géométrie conduirait aisément, on donne un théorème général, sur lequel on aura à revenir, relatif aux systèmes de coordonnées curvilignes qui sont formées de courbes conjuguées. — On revient aux surfaces les plus générales engendrées par le mouvement d'une courbe invariable pour examiner le cas spécial où cette courbe est plane et où les vitesses de tous ses points sont normales au plan qui la contient. — Élément linéaire de la surface. — Cas spécial où le plan de la courbe roule sur un cylindre. — Surfaces moulures cylindriques. — Bour a montré qu'il existe une infinité de telles surfaces applicables les unes sur les autres.

Extension de la méthode cinématique précédente au cas où la courbe qui engendre la surface varie en même temps de forme et de position. — Surfaces engendrées par un cercle. — Détermination des trajectoires orthogonales de tous les cercles de la surface. — Elle se ramène à l'intégration d'une équation de Riccati. —

Étude du mouvement d'un système qui se déplace en variant de grandeur, mais en restant semblable à lui-même. — Loi de variation des vitesses de ses différents points. — Surfaces spirales de Maurice Lévy. — Leur élément linéaire. — Extension du théorème de Bour. — Il y a une double infinité de surfaces spirales applicables sur une surface spirale donnée.

---

73. Les surfaces de révolution jouissent d'une propriété cinématique importante. Elle ne cessent pas de glisser sur elles-mêmes lorsqu'on leur imprime un mouvement de rotation autour de l'axe. Cette propriété qu'elles possèdent, de pouvoir être déplacées d'une manière continue sans cesser de coïncider avec elles-mêmes, appartient aussi aux cylindres et à une classe plus étendue de surfaces, les hélicoïdes, qui comprennent comme cas limites et les cylindres, et les surfaces de révolution.

Considérons, en effet, un système solide animé d'un mouvement hélicoïdal. Nous savons que tous les points de ce système décrivent des hélices de même axe et de même pas; chacune de ces hélices est animée d'un mouvement dans lequel elle ne cesse de glisser sur sa position primitive. Si donc on associe toutes les hélices rencontrant une courbe donnée (C), elles formeront une surface qui pourrait être engendrée par le mouvement hélicoïdal de la courbe (C), et qui possédera évidemment la propriété de glisser sur elle-même dans le mouvement. Cette surface est un *hélicoïde général*. Nous allons donner les équations qui la déterminent et chercher son élément linéaire.

Les hélices décrites dans le mouvement hélicoïdal permanent sont définies par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi_1, \\ y = \rho\sin\varphi_1, \\ z = z_0 + h\varphi_1, \end{cases}$$

où h désigne le *pas réduit*, c'est-à-dire le pas commun des hélices divisé par 2π. Si l'on prend pour z_0 une fonction quelconque de ρ, les coordonnées x, y, z deviendront des fonctions des deux variables ρ et φ_1; les formules précédentes définiront la surface hélicoïde la plus générale. Faisons

$$z_0 = \varphi(\rho),$$

et calculons l'élément linéaire de l'hélicoïde. Nous trouverons

$$ds^2 = (1 + \varphi'^2)\, d\rho^2 + 2h\varphi'\, d\rho\, dv_1 + (\rho^2 + h^2)\, dv_1^2.$$

En transformant le second membre, on obtient

$$(2) \qquad ds^2 = \left(1 + \frac{\rho^2\varphi'^2}{\rho^2 + h^2}\right) d\rho^2 + (\rho^2 + h^2)\left(dv_1 + \frac{h\varphi'\, d\rho}{\rho^2 + h^2}\right)^2.$$

Si l'on introduit les deux nouvelles variables u, v définies par les quadratures suivantes :

$$(3) \qquad \begin{cases} du = d\rho\sqrt{1 + \dfrac{\rho^2\varphi'^2}{\rho^2 + h^2}}, \\ dv = dv_1 + \dfrac{h\varphi'\, d\rho}{\rho^2 + h^2}, \end{cases}$$

$\rho^2 + h^2$ deviendra une fonction de u que nous désignerons par U^2, et l'élément linéaire sera ramené à la forme

$$(4) \qquad ds^2 = du^2 + U^2\, dv^2.$$

Les courbes $u =$ const. sont les hélices tracées sur la surface, et, par suite, les courbes $v =$ const. sont les trajectoires orthogonales de ces hélices. On reconnaît ainsi que ces trajectoires se déterminent par une simple quadrature.

74. La forme (4) de l'élément linéaire est identique à celle que nous avons déjà obtenue pour les surfaces de révolution (n° 64). On sait, d'ailleurs, que ces dernières surfaces peuvent être considérées comme des formes limites des hélicoïdes généraux, correspondantes au cas où le pas commun des hélices devient nul. On peut donc prévoir que les hélicoïdes sont applicables sur des surfaces de révolution. Ce beau théorème est dû à Bour, qui l'a établi dans son *Mémoire sur la déformation des surfaces* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIXe Cahier, p. 82). Pour le démontrer, nous ferons voir que la forme (4) de l'élément linéaire, donnée *a priori*, convient à une infinité d'hélicoïdes, parmi lesquelles se trouvent toujours des surfaces de révolution.

Les formules (1), où l'on considère z_0 comme une fonction de ρ, définissent l'hélicoïde le plus général et la formule (2) fait connaître l'élément linéaire de cette surface. Pour le rendre identique

à l'élément linéaire donné par l'équation (4), *il suffira* évidemment de poser

$$\left(1+\frac{\rho^2\varphi'^2}{\rho^2+h^2}\right)d\rho^2=du^2,$$

$$(\rho^2+h^2)\left(dv_1+\frac{h\varphi'\,d\rho}{\rho^2+h^2}\right)^2=\mathrm{U}^2\,dv^2$$

ou, en extrayant les racines carrées,

$$(5)\qquad \begin{cases} du=\pm\sqrt{d\rho^2+\dfrac{\rho^2\,d\varphi^2}{\rho^2+h^2}}, \\ dv_1+\dfrac{h\,d\varphi}{\rho^2+h^2}=\dfrac{\pm\,\mathrm{U}}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\,dv. \end{cases}$$

La première de ces formules montre que ρ est une fonction de u. Pour que la seconde puisse avoir lieu, il faut évidemment que le rapport $\dfrac{\pm\,\mathrm{U}}{\sqrt{\rho^2+h^2}}$ soit égal à une constante que nous désignerons par $\dfrac{1}{m}$. On aura donc

$$(6)\qquad \begin{cases} \sqrt{\rho^2+h^2}=\pm\,m\,\mathrm{U}, \\ dv_1+\dfrac{h\,d\varphi}{\rho^2+h^2}=\dfrac{dv}{m}. \end{cases}$$

Les formules (5) et (6) nous conduisent, par des éliminations faciles, aux valeurs suivantes de ρ, $d\varphi$, dv_1 :

$$(7)\qquad \begin{cases} d\varphi=\dfrac{m^2\,\mathrm{U}\,du}{m^2\,\mathrm{U}^2-h^2}\sqrt{\mathrm{U}^2(1-m^2\,\mathrm{U}'^2)-\dfrac{h^2}{m^2}}, \\ dv_1=\dfrac{dv}{m}-\dfrac{h\,d\varphi}{m^2\,\mathrm{U}^2}=\dfrac{dv}{m}-\dfrac{h\,du}{\mathrm{U}(m^2\,\mathrm{U}^2-h^2)}\sqrt{\mathrm{U}^2(1-m^2\,\mathrm{U}'^2)-\dfrac{h^2}{m^2}}, \\ \rho=\sqrt{m^2\,\mathrm{U}^2-h^2}. \end{cases}$$

Toutes les quantités qui figurent dans les formules (1) sont ainsi exprimées en fonction de u et de v; la question proposée est donc complètement résolue.

75. Les hélicoïdes que nous venons de déterminer dépendent de deux paramètres arbitraires h et m. Il est aisé de s'assurer qu'ils ne sont pas superposables. Considérons, en particulier, le cas où l'on a

$$\mathrm{U}^2=u^2+a^2.$$

et supposons $m = 1$. Les formules précédentes deviendront

$$\rho = \sqrt{u^2 + a^2 - h^2},$$

$$d\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{u^2 + a^2 - h^2}\sqrt{u^2 + a^2}\,du,$$

$$dv_1 = dv - \frac{h\,d\varphi}{u^2 + a^2}.$$

Si l'on donne à h toutes les valeurs comprises entre zéro et a, on aura une série continue d'hélicoïdes, tous applicables les uns sur les autres. Ils présenteront toutes les formes intermédiaires entre la caténoïde et l'hélicoïde gauche à plan directeur, qui sont les termes extrêmes de cette série et qui correspondent respectivement aux valeurs zéro et a de l'arbitraire h.

76. Revenons aux formules générales (7). Si l'on y fait $h = 0$, on obtient des surfaces de révolution, toutes applicables les unes sur les autres, aussi bien que sur les hélicoïdes généraux définis par ces équations. Elles sont déterminées par le système très simple

$$(8)\qquad \begin{cases} x = a\mathrm{U}\cos\dfrac{v}{a}, \\ y = a\mathrm{U}\sin\dfrac{v}{a}, \\ z = \displaystyle\int\sqrt{1 - a^2\mathrm{U}'^2}\,du, \end{cases}$$

où a est mis à la place de m.

Quand on fait varier le paramètre u, on obtient une suite continue de surfaces; nous signalerons, sans les démontrer, les propriétés suivantes que nous rattacherons plus tard à des théorèmes généraux.

Si l'on considère sur toutes ces surfaces les points qui correspondent à une même valeur de u : 1° le produit des rayons de courbure principaux en ces points sera le même pour toutes les surfaces; 2° la tangente au méridien, prolongée jusqu'à sa rencontre avec l'axe, aura aussi la même longueur pour tous les points considérés. Nous indiquerons plus loin une application de cette dernière propriété, et nous allons étudier deux exemples particuliers.

77. Faisons d'abord

$$U = \sin u,$$

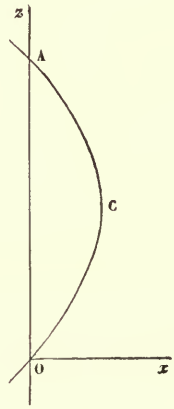
ce qui donnera les surfaces de révolution applicables sur la sphère.

Les formules (8) deviendront ici

$$(9)\qquad \begin{cases} x = a \sin u \cos \dfrac{v}{a}, \\ y = a \sin u \sin \dfrac{v}{a}, \\ z = \displaystyle\int \sqrt{1 - a^2 \cos^2 u}\, du. \end{cases}$$

Supposons d'abord $a^2 < 1$; u pourra prendre toutes les valeurs possibles sans que l'expression de z cesse d'être réelle. La portion OCA du méridien qui correspond à toutes les valeurs de u comprises entre zéro et π aura la forme indiquée (*fig.* 5).

Fig. 5.



Les angles que fait en O et en A le méridien avec l'axe sont finis et ne deviennent droits que lorsque a est égal à 1. Alors le méridien devient un demi-cercle et il engendre la sphère.

Les variables u et v, qui déterminent un point à la surface de la sphère, ont une signification très simple; elles sont la *colatitude* et la *longitude* de ce point. D'après cette remarque, nous pouvons déterminer aisément les limites et la forme de la portion de sphère

qui est exactement applicable sur toute la surface engendrée par la révolution complète de la branche OCA du méridien.

En effet, les formules (9) relatives à une valeur quelconque de a nous montrent que l'angle v_1 fait par le méridien qui passe au point (u, v) de la surface avec un méridien fixe a pour valeur

$$v_1 = \frac{v}{a}. \tag{10}$$

Par conséquent, lorsque v_1 aura varié de 0 à 2π, v aura crû de $2a\pi$. Ainsi, la surface engendrée par la révolution complète de l'arc ACO est applicable sur le fuseau de la sphère compris entre deux plans méridiens faisant l'angle $2a\pi$. On voit que, pour des valeurs très petites de a, ce fuseau deviendra infiniment étroit.

Si a^2 est supérieur à l'unité, le méridien change complètement de forme, car u ne peut prendre que les valeurs satisfaisant à l'inégalité

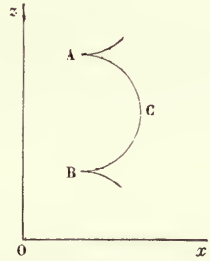
$$\cos^2 u < \frac{1}{a^2}.$$

Soit λ_0 l'angle aigu défini par la formule

$$\cos \lambda_0 = \frac{1}{a}.$$

Il faudra faire varier u entre λ_0 et $\pi - \lambda_0$. Le méridien aura la forme représentée (*fig.* 6). La surface engendrée par ce méridien

Fig. 6.



sera applicable sur la zone de la sphère comprise entre les deux cercles de colatitude λ_0 et $\pi - \lambda_0$. Mais, de plus, la formule (10) nous montre qu'il suffira de faire tourner le méridien ACB d'un angle égal à $\frac{2\pi}{a}$ pour obtenir toute la portion de la surface, appli-

cable point par point sur la zone sphérique que nous venons de définir.

Si a grandit, cette zone diminue indéfiniment et se réduit à une bande infiniment étroite longeant l'équateur de la sphère.

La discussion détaillée que nous venons de faire avait pour but de mettre en évidence un fait intéressant. Considérons un morceau, de forme d'ailleurs quelconque, de la surface de la sphère. Quand la sphère se déforme de manière à coïncider successivement avec les diverses surfaces définies par les formules (9), cette portion de la surface sphérique que nous avons choisie se déplacera et se déformera d'une manière continue en demeurant applicable sur sa position initiale. Mais ce mouvement ne pourra être continué indéfiniment sans qu'il se produise une déchirure; car nous avons vu que, si le paramètre a augmente à partir de 1 et croît indéfiniment, la seule portion de la sphère qui puisse être appliquée sur les surfaces qui correspondent à ces valeurs croissantes de a se réduit à une zone, d'aire aussi petite qu'on le veut, entourant l'équateur. Par conséquent, si l'on considère une portion finie de la sphère, le mouvement de déformation de cette portion cessera d'être possible dès que a aura atteint une limite supérieure, qui dépend évidemment de la forme de cette portion.

78. Du moins, dans l'exemple que nous venons d'étudier, toutes les surfaces définies par les formules (9), et pour lesquelles a^2 est inférieur ou égal à l'unité, jouissent de la propriété de représenter complètement l'élément linéaire, c'est-à-dire qu'elles ont des points réels, correspondant à toutes les valeurs réelles de u et de v. Il n'en est plus de même dans l'exemple suivant.

Supposons que, dans les formules générales, on fasse

$$U = e^u,$$

l'élément linéaire aura pour expression

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}\,dv^2, \tag{11}$$

et les équations (8) nous donneront ici

$$x = a\,e^u \cos\frac{v}{a}, \qquad y = a\,e^u \sin\frac{v}{a}, \qquad z = \int \sqrt{1 - a^2 e^{2u}}\,du. \tag{12}$$

Ces formules définissent des surfaces qui sont toutes égales; car, si l'on pose

$$a\,e^u = \sin\varphi, \qquad v = av_1, \tag{13}$$

elles deviennent

$$\left\{\begin{aligned} x &= \sin\varphi\cos v_1, \\ y &= \sin\varphi\sin v_1, \\ z &= \cos\varphi + \log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

et ne contiennent plus a. Nous avons donc une seule surface, qui est applicable d'une infinité de manières sur elle-même, et les formules qui réalisent cette application sont

$$a\,e^u = a\,e^{u'}, \qquad v = av',$$

u', v' désignant les coordonnées du point qui correspond au point (u, v). Ce résultat est d'ailleurs évident, d'après la forme même de l'élément linéaire (11). Il suit de là, et des propriétés que nous avons signalées plus haut (n° 76) : 1° que le méridien ne peut être que la *courbe aux tangentes égales* ou *tractrice;* 2° que le produit des rayons de courbure principaux est le même en tous les points de la surface. On reconnaît les propriétés de la surface pseudosphérique que nous avons déjà étudiée directement; et, en comparant l'expression de l'élément linéaire à celle qui a été donnée (n° 65), on voit que le produit des rayons de courbure de la surface est égal à -1.

Il y a ici un fait important à signaler. Pour que les valeurs de x, y, z données par les formules (12) soient réelles, il faut que l'angle φ soit réel, c'est-à-dire que l'on ait

$$a^2 e^{2u} < 1.$$

Quelle que soit la valeur donnée du paramètre a, il y aura donc toujours des valeurs suffisamment grandes de u, associées à des valeurs quelconques de v, *auxquelles ne correspondra aucun point de la surface.* Par conséquent, s'il est vrai que la pseudosphère soit applicable sur elle-même d'une infinité de manières, aucune des solutions que l'on choisira ne pourra donner une représentation géométrique complète de l'élément linéaire.

79. Les surfaces que nous venons d'étudier se rapprochent par une propriété commune. Elles peuvent être considérées toutes comme engendrées par une courbe invariable de forme qui se meut d'après une loi donnée. Proposons-nous maintenant d'étudier les surfaces les plus générales satisfaisant à cette définition.

Considérons une courbe (C) et un système d'axes mobiles invariablement lié à la courbe. Supposons que la position de la courbe et des axes mobiles dépende d'un paramètre v qui jouera le rôle du temps, et soient ξ, η, ζ; p, q, r les translations et les rotations du système mobile. Ces six quantités seront fonctions de v. Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe par rapport aux axes mobiles; x, y, z seront des fonctions données d'un paramètre u.

Si les axes mobiles se déplacent, et que le point M se déplace en même temps d'une manière quelconque sur la courbe, les projections de l'arc infiniment petit décrit par le point seront

$$(15)\qquad \begin{cases} dx + (\xi + qz - ry)\,dv, \\ dy + (\eta + rx - pz)\,dv, \\ dz + (\zeta + py - qx)\,dv. \end{cases}$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{dx}{du} = x', \qquad \frac{dy}{du} = y', \qquad \frac{dz}{du} = z';$$

le carré de l'élément linéaire de la surface engendrée par la courbe aura pour expression la somme des carrés des trois projections, c'est-à-dire

$$(16)\qquad \begin{aligned} ds^2 = {} & (x'^2 + y'^2 + z'^2)\,du^2 \\ & + 2\left(x'\xi + y'\eta + z'\zeta + \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ p & q & r \end{vmatrix}\right) du\,dv \\ & + [(\xi + qz - ry)^2 + (\eta + rx - pz)^2 + (\zeta + py - qx)^2]\,dv^2. \end{aligned}$$

80. Il suffirait d'introduire dans cette formule des hypothèses spéciales, convenablement choisies, pour retrouver tous les résultats précédents.

Supposons, par exemple, que l'on veuille obtenir l'élément linéaire des surfaces réglées. On prendra pour axe des z du trièdre

mobile la génératrice rectiligne de la surface, et l'on fera décrire à l'origine du trièdre une trajectoire orthogonale des génératrices. Cela donne les conditions

$$x = y = 0, \qquad z = u, \qquad \zeta = 0,$$

et, par suite, la formule (16) se réduira à la suivante :

$$ds^2 = du^2 + [(\xi + qu)^2 + (\eta - pu)^2]\, dv^2. \tag{17}$$

Si l'on veut exprimer que la surface est développable, il faudra considérer les projections (15) de l'arc décrit par un point quelconque de la surface. Elles deviennent ici

$$(\xi + qu)\, dv, \quad (\eta - pu)\, dv, \quad du.$$

Le plan tangent au point $z = u$ aura donc pour équation, par rapport aux axes mobiles,

$$\frac{x}{y} = \frac{\xi + qu}{\eta - pu}.$$

Pour qu'il soit le même en tous les points d'une génératrice, il faudra que l'on ait

$$\frac{\xi}{\eta} = -\frac{q}{p},$$

c'est-à-dire que le coefficient de dv^2 dans la formule (17) soit un carré parfait. C'est le résultat déjà établi (n° 69).

81. Considérons maintenant le cas nouveau où le mouvement de la courbe mobile (C) se réduit à une translation. Il faut alors, dans la formule (16), faire

$$p = q = r = 0,$$

et l'on a, par conséquent,

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & (x'^2 + y'^2 + z'^2)\, du^2 \\ & + 2(x'\xi + y'\eta + z'\zeta)\, du\, dv + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, dv^2. \end{aligned} \tag{18}$$

On parvient à un résultat identique par la méthode directe suivante.

Soient

$$x = U, \qquad y = U_1, \qquad z = U_2,$$

les équations qui déterminent la courbe par rapport aux axes mobiles, U, U_1, U_2 désignant des fonctions d'un même paramètre u. Supposons que les axes fixes aient été choisis parallèles aux axes mobiles, et désignons par V, V_1, V_2 les coordonnées de l'origine des axes mobiles par rapport aux axes fixes; V, V_1, V_2 seront des fonctions d'un paramètre v. Les coordonnées d'un point quelconque de la surface cherchée, par rapport aux axes fixes, auront évidemment les expressions suivantes :

$$(19)\qquad \begin{cases} X = U + V, \\ Y = U_1 + V_1, \\ Z = U_2 + V_2. \end{cases}$$

La symétrie de ces formules nous montre immédiatement que la surface peut être engendrée de deux manières différentes par la translation d'une courbe invariable, et que les courbes coordonnées de chacun des deux systèmes (u) et (v) se déduisent de l'une d'elles par un simple mouvement de translation.

82. On peut encore interpréter les formules (19) de la manière suivante. Considérons les deux courbes définies par les équations

$$x = 2U, \qquad y = 2U_1, \qquad z = 2U_2,$$

et

$$x = 2V, \qquad y = 2V_1, \qquad z = 2V_2.$$

Le lieu des milieux de toutes les cordes qui joignent un point de la première à un point de la seconde est la surface considérée. Cette définition, due à Sophus Lie, met bien en évidence le double mode de génération de la surface. Il suffit d'associer toutes les cordes passant, soit par un point de la première courbe, soit par un point de la seconde, pour retrouver les deux systèmes de génératrices invariables.

Supposons, pour fixer les idées, que les fonctions U, V soient réelles et que l'on ait pris, pour les paramètres u et v, les arcs des deux courbes

$$x = U, \qquad y = U_1, \qquad z = U_2,$$
$$x = V, \qquad y = V_1, \qquad z = V_2;$$

l'élément linéaire de la surface prendra la forme

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2(U'V' + U'_1V'_1 + U'_2V'_2)\,du\,dv.$$

Si donc on pose

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad \alpha = u + v,$$

$$v = \frac{\alpha - \beta}{2}, \qquad \beta = u - v,$$

l'expression de l'élément linéaire deviendra

$$(20) \quad ds^2 = \frac{1 + U'V' + U'_1V'_1 + U'_2V'_2}{2} d\alpha^2 + \frac{1 - U'V' - U'_1V'_1 - U'_2V'_2}{2} d\beta^2.$$

Cette formule met en évidence un système de coordonnées rectangulaires sur la surface, car l'élément linéaire est ramené à la forme

$$(21) \qquad ds^2 = A^2 d\alpha^2 + C^2 d\beta^2,$$

et même avec la condition

$$A^2 + C^2 = 1.$$

83. Nous avons à signaler encore une propriété géométrique tout à fait générale des surfaces que nous considérons. Mais, pour la démontrer, nous devons commencer par rappeler un théorème relatif aux tangentes conjuguées.

Nous dirons que deux familles de lignes tracées sur une surface sont *conjuguées*, lorsque les tangentes aux lignes des deux familles qui passent en un point quelconque de la surface sont conjuguées (d'après la définition de Dupin). Voici comment on peut exprimer cette relation.

Soient u et v les paramètres des deux familles de courbes, et supposons que l'on connaisse les expressions des coordonnées rectilignes x, y, z d'un point quelconque de la surface en fonction de u et de v. Si l'on désigne par X, Y, Z, les coordonnées courantes, l'équation du plan tangent à la surface au point $M(x, y, z)$ sera

$$(22) \qquad Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

p et q désignant, suivant l'usage, les dérivées de z par rapport à x et à y. Supposons que l'on se déplace sur la ligne $v = \text{const.}$ L'intersection du plan tangent avec sa position infiniment voisine sera définie, d'après la théorie des enveloppes, par l'équation (22),

jointe à celle que l'on obtient en la différentiant par rapport à u, c'est-à-dire

$$-\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial u}(X - x) + \frac{\partial q}{\partial u}(Y - y) - p\frac{\partial x}{\partial u} - q\frac{\partial y}{\partial u},$$

ou, en supprimant les termes qui se détruisent,

$$\frac{\partial p}{\partial u}(X - x) + \frac{\partial q}{\partial u}(Y - y) = 0. \tag{23}$$

Pour exprimer que les courbes (u) et (v) sont conjuguées, il faudra écrire que les équations (22), (23) sont vérifiées quand on y remplace $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ par $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$. Cela donne les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v}, \\ &\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

La première est toujours satisfaite, car elle exprime ce fait évident que la tangente à la courbe $u =$ const. se trouve dans le plan tangent. Quant à la seconde, elle est identique à la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v}\right) - p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - q\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - q\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} = 0. \tag{25}$$

Si l'on remarque maintenant que p et q sont déterminées par les équations

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v}, \tag{26}$$

on pourra éliminer p et q entre les équations (25) et (26), et l'on sera conduit à l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0, \tag{27}$$

qui est symétrique par rapport aux trois coordonnées. Cette relation, qui est d'ailleurs nécessaire, est aussi suffisante ; car elle exprime qu'il y a des valeurs de p et de q satisfaisant aux équations (25) et (26), et, d'après les formules (26), p et q seront les dérivées de z, considérée comme fonction de x et de y.

84. On peut formuler la condition trouvée d'une manière différente. L'équation (27) est évidemment le résultat de l'élimination de A et de B entre les trois équations

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - A\frac{\partial x}{\partial u} - B\frac{\partial x}{\partial v} = 0,\\ &\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} - A\frac{\partial y}{\partial u} - B\frac{\partial y}{\partial v} = 0,\\ &\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - A\frac{\partial z}{\partial u} - B\frac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{aligned}\right.$$

Nous obtenons ainsi la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes (u) *et* (v) *soient conjuguées est que les expressions des trois coordonnées rectangulaires en fonction de* u *et de* v *satisfassent à une même équation linéaire*

$$(29)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = A\frac{\partial \theta}{\partial u} + B\frac{\partial \theta}{\partial v},$$

où A, B *désignent des fonctions quelconques de* u *et de* v.

Cette proposition, sur laquelle nous aurons à revenir pour la compléter et la généraliser, joue un rôle très important dans la théorie des surfaces.

Si nous l'appliquons aux surfaces qui nous occupent, nous voyons immédiatement que les trois coordonnées satisfont à l'équation

$$(30)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

et, par conséquent, les deux systèmes de courbes invariables qui engendrent ici la surface sont des lignes conjuguées. Au reste, la Géométrie permet aussi d'obtenir très simplement ce résultat.

Considérons, en effet, les deux familles de courbes (u) et (v).

Dans la translation d'une courbe (u), chaque point M de cette courbe décrit une courbe (v). D'autre part, la tangente en M à la courbe (u) conserve, dans la translation, une direction invariable. Il suit de là que la développable circonscrite à la surface en tous les points de la courbe (v) décrite par le point M sera le cylindre engendré par la tangente en M à la courbe (u). Cette simple remarque suffit à démontrer que les deux familles de courbes (u) et (v) forment un système conjugué; et l'on voit de plus que *les développables circonscrites à la surface en tous les points de l'une de ces courbes sont des cylindres, engendrés par les tangentes aux courbes de l'autre famille, tangentes menées au point où ces courbes rencontrent la courbe considérée* [1].

85. Enfin, nous traiterons le cas où la courbe mobile (C), qui engendre la surface est plane, et où les vitesses de tous ses points sont normales au plan qui la contient. Nous supposerons que l'on ait pris le plan de la courbe pour plan des xy du trièdre mobile. On doit alors, dans les formules (15) et (16), introduire les hypothèses

$$z = 0, \qquad \xi = \eta = r = 0. \tag{31}$$

Si l'on admet, de plus, que l'on a choisi pour u l'arc de la courbe (C), on aura encore

$$x'^2 + y'^2 = 1,$$

et l'expression de l'élément linéaire deviendra

$$ds^2 = du^2 + (\zeta + py - qx)^2\, dv^2. \tag{32}$$

Quant aux projections de l'arc décrit par un point quelconque M de la surface, elles seront, d'après les formules (15),

$$dx, \quad dy, \quad (\zeta + py - qx)\, dv.$$

La normale à la surface sera dans le plan de la courbe, et ce plan roulera sur une certaine surface développable.

---

[1] S. Lie, *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen* (*Mathematische Annalen*, t. XIV, p. 332-337).

On reconnaît les surfaces étudiées par Monge d'une manière détaillée [1].

Les lignes de courbure de l'un des systèmes sont les diverses positions de la courbe mobile; celles du second système sont les trajectoires des différents points de cette courbe.

86. Considérons, en particulier, le cas où le plan de la courbe mobile roule sur un cylindre. On obtient alors une *surface moulure*. Si nous supposons que l'axe des x du trièdre mobile ait été pris parallèle aux génératrices du cylindre, la rotation du système se fera autour d'une parallèle à l'axe des x, et l'on aura

$$q = 0.$$

L'élément linéaire donné par la formule (32) prendra la forme

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{\zeta}{p} + y\right)^2 p^2\, dv^2,$$

ou, en changeant les notations,

$$ds^2 = du^2 + (\mathrm{U} - \mathrm{V})^2\, dv^2, \tag{33}$$

U et V désignant des fonctions qui dépendent respectivement de u et de v.

On peut donner des surfaces moulures une autre définition, à quelques égards plus simple que la précédente.

Quand le plan de la courbe (C) roule sur le cylindre, les trajectoires de ses différents points sont évidemment des courbes planes dont le plan est parallèle à la section droite du cylindre, et, de plus, ces trajectoires sont à chaque instant normales au plan de la courbe (C). Il est évident, d'après cela, que leurs projections sur le plan de la section droite du cylindre constitueront une famille de courbes planes parallèles admettant pour développée commune la section droite du cylindre. De là résulte la génération suivante des surfaces moulures :

On donne, dans un plan, une famille de courbes parallèles.

---

[1] Monge, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, 5e édition, p. 322. *De la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable quelconque.*

Si l'on imprime à chacune de ces courbes une translation finie, normale au plan et variant suivant une loi donnée, quand on passe d'une courbe à l'autre, les positions nouvelles de toutes ces courbes forment la surface moulure.

87. En s'appuyant sur cette définition, on peut montrer que la forme (33) de l'élément linéaire convient toujours à une infinité de surfaces moulures.

En effet, écrivons l'expression de ds^2 sous la forme

$$ds^2 = dU^2 + (U - V)^2\, dv^2 + (1 - U'^2)\, du^2.$$

Les deux premiers termes pris isolément constituent l'élément linéaire d'une surface développable, et nous avons vu (n° 70) qu'en posant

$$(34)\qquad \begin{cases} x = U\cos v + \int V \sin v\, dv, \\ y = U\sin v - \int V\cos v\, dv, \end{cases}$$

on aurait

$$dx^2 + dy^2 = dU^2 + (U - V)^2\, dv^2.$$

La surface définie par les formules (34), jointes à la suivante :

$$(34')\qquad z = \int \sqrt{1 - U'^2}\, du,$$

aura donc l'élément linéaire exprimé par la formule (33).

Si l'on remarque que cet élément linéaire ne change pas de forme quand on y remplace v par av, on reconnaît la possibilité d'introduire une constante arbitraire dans les formules précédentes et l'on trouve, en recommençant le calcul,

$$(35)\qquad \begin{cases} x = aU\cos\dfrac{v}{a} + \displaystyle\int V\sin\frac{v}{a}\, dv, \\ y = aU\sin\dfrac{v}{a} + \displaystyle\int V\cos\frac{v}{a}\, dv, \\ z = \displaystyle\int \sqrt{1 - a^2 U'^2}\, du. \end{cases}$$

Ces formules définissent une famille de surfaces moulures, toutes applicables les unes sur les autres [1].

---

[1] Bour, *Théorie de la déformation des surfaces* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIXe Cahier, p. 89).

88. La méthode cinématique que nous venons d'appliquer à de nombreux exemples s'étend au cas où l'on considère une courbe qui varie de forme en même temps qu'elle est entraînée dans le mouvement des axes mobiles. Il suffira, en effet, dans les formules (15) qui donnent les projections du déplacement sur les axes mobiles, de regarder x, y, z, non plus comme des fonctions d'une seule variable u, mais comme des fonctions de u et de v.

Proposons-nous, par exemple, d'appliquer cette méthode aux surfaces engendrées par le mouvement d'un cercle. On peut supposer qu'on ait choisi pour le trièdre mobile celui qui admet pour axe des z l'axe du cercle et pour axes des x et des y deux diamètres rectangulaires du cercle choisis comme on voudra, ce qui laisse subsister une certaine indétermination. Alors, les coordonnées d'un point du cercle seront

$$x = \mathrm{R}\cos u, \qquad y = \mathrm{R}\sin u, \qquad z = 0,$$

le rayon R étant une fonction de v. Les formules (15) nous donneront, pour les projections du déplacement d'un point de la surface engendrée par le cercle, les expressions

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_x &= \xi\, dv + \cos u\, d\mathrm{R} - \mathrm{R}\sin u\,(du + r\, dv),\\
\mathrm{D}_y &= \eta\, dv + \sin u\, d\mathrm{R} + \mathrm{R}\cos u\,(du + r\, dv),\\
\mathrm{D}_z &= [\zeta + \mathrm{R}(p\sin u - q\cos u)]\, dv.
\end{aligned}$$

Ces formules donnent immédiatement l'élément linéaire de la surface. Elles permettent aussi d'obtenir l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des cercles de la surface. En exprimant que la trajectoire est normale au cercle, on aura la condition

$$-\sin u\, \mathrm{D}_x + \cos u\, \mathrm{D}_y = 0,$$

ou, en remplaçant D_x, D_y par leurs valeurs,

$$\frac{du}{dv} + r = \frac{\xi}{\mathrm{R}}\sin u - \frac{\eta}{\mathrm{R}}\cos u.$$

Telle est l'équation qui déterminera u en fonction de v. Si l'on substitue à u l'inconnue

$$\sigma = \operatorname{tang}\frac{u}{2},$$

on sera conduit à une équation générale de Riccati

$$\frac{d\sigma}{dv} = -\frac{r}{2}(1+\sigma^2) + \frac{\xi}{R}\sigma - \frac{\eta}{2R}(1-\sigma^2).$$

La connaissance d'une seule trajectoire orthogonale permettra donc de déterminer toutes les autres par de simples quadratures [1].

89. En terminant ce Chapitre, où nous avons étudié surtout des surfaces jouissant de propriétés cinématiques, nous allons donner la définition d'une classe de surfaces qui se rapprochent à ce point de vue des précédentes, et qui ont d'abord été étudiées par Maurice Lévy [2].

Considérons un système qui se déplace, mais qui varie en même temps de grandeur en restant semblable à lui-même, et proposons-nous de chercher la loi des vitesses de tous ses points à un instant quelconque. Soient P_0, P_1 deux positions infiniment voisines de ce système. Construisons la figure P'_1 homothétique à P_1, en prenant l'origine des coordonnées pour centre d'homothétie, le rapport d'homothétie étant tel que P'_1 soit égal à P_0. On peut passer de P_0 à P_1 : 1° par un déplacement infiniment petit qui amène P_0 en P'_1; 2° par une transformation homothétique ayant l'origine pour centre d'homothétie et transformant P'_1 en P_1. Il suit de là que les vitesses de tous les points du système sont les résultantes de celles qui se produiraient dans le déplacement et de celles qui sont dues à la transformation homothétique. Les premières ont des expressions bien connues

$$\alpha + qz - ry, \quad \beta + rx - pz, \quad \gamma + py - qx.$$

Quant à celles qui sont dues à la transformation homothétique, comme elles ont pour effet de réduire les coordonnées dans le même rapport, elles ont pour expression

$$hx, \quad hy, \quad hz.$$

---

(1) Les surfaces à génératrice circulaire ont été étudiées par M. Demartres (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, p. 123).

(2) Maurice Lévy, *Sur le développement des surfaces dont l'élément linéaire est exprimable par une fonction homogène* (*Comptes rendus*, t. LXXXVII, p. 788).

En résumé, les composantes des vitesses d'un point du système dans le mouvement considéré auront pour valeurs

$$(36)\qquad \begin{cases} V_x = \alpha + hx + qz - ry, \\ V_y = \beta + hy + rx - pz, \\ V_z = \gamma + hz + py - qx. \end{cases}$$

Si nous désignons par k le rapport de similitude du système mobile pris dans sa position actuelle au même système pris dans une position déterminée, on aura évidemment

$$(37)\qquad h = \frac{1}{k}\frac{dk}{dt}.$$

Tant que ce paramètre h n'est pas nul, c'est-à-dire tant que le système varie de grandeur, on peut transporter l'origine des coordonnées en un point tel que les termes α, β, γ disparaissent des formules (36). L'interprétation de ces formules met alors en évidence le résultat suivant : les vitesses sont les mêmes que si le corps tournait autour d'une droite et éprouvait en même temps une transformation homothétique par rapport à un point de cette droite. Si l'on choisit pour nouvel axe des z cet axe de rotation, les formules (36) se simplifient et se réduisent à la forme suivante :

$$(38)\qquad \begin{cases} V_x = hx - ry, \\ V_y = hy + rx, \\ V_z = hz. \end{cases}$$

90. Étudions le cas où l'axe de rotation et le centre d'homothétie demeurent fixes dans toute la suite du mouvement, les paramètres h et r restant constants. Alors, les positions successives d'un point déterminé du système mobile seront définies par les équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = hx - ry, \qquad \frac{dy}{dt} = hy + rx, \qquad \frac{dz}{dt} = hz.$$

On aura donc, en intégrant,

$$(39)\qquad \begin{cases} z = z_0 e^{ht}, \\ x = r_0 e^{ht}\cos(\omega_0 + rt), \\ y = r_0 e^{ht}\sin(\omega_0 + rt). \end{cases}$$

Chaque point du système décrira une courbe tracée sur un cône de révolution

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \text{const.},$$

ayant pour sommet l'origine et pour axe l'axe de rotation; la projection de la trajectoire sur le plan des xy sera une spirale logarithmique ayant pour pôle l'origine des coordonnées. Si l'on considère la spirale gauche décrite par le point comme appartenant au système mobile et variant de grandeur avec lui, elle glissera sur elle-même pendant toute la durée du mouvement, absolument comme les hélices décrites par les différents points d'un système invariable dans le mouvement hélicoïdal.

Par suite, les surfaces qui admettent pour génératrices les courbes définies par les formules (39) sont évidemment les analogues, dans la théorie qui nous occupe, des surfaces hélicoïdales et des surfaces de révolution.

Prenons pour r_0, ω_0, z_0 des fonctions quelconques d'un paramètre θ. Les formules (39), qui donnent les expressions de x, y, z en fonction de t et de θ, définiront la surface que nous nous proposons d'étudier. Cherchant son élément linéaire, nous trouverons un résultat de la forme

$$ds^2 = e^{2ht}(\mathrm{A}\,dt^2 + 2\mathrm{B}\,dt\,d\theta + \mathrm{C}\,d\theta^2), \tag{40}$$

où A, B, C sont des fonctions de θ définies par les équations

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= r_0^2 h^2 + r^2 r_0^2 + h^2 z_0^2, \\ \mathrm{B} &= h z_0 z_0' + h r_0 r_0' + r r_0^2 \omega_0', \\ \mathrm{C} &= r_0^2 \omega_0'^2 + z_0'^2 + r_0'^2. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Nous allons transformer cette expression de l'élément linéaire. Posons

$$dt + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\,d\theta = \frac{1}{h}\,d\varphi,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$t + \int \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\,d\theta = \frac{\varphi}{h}.$$

L'élément linéaire deviendra

$$ds^2 = e^{2\varphi}(\mathrm{A}'\,d\varphi^2 + \mathrm{C}'\,d\theta^2),$$

A' et C' étant encore des fonctions de θ. Enfin, substituons à θ la variable u définie par la relation

$$u = \int \sqrt{C'}\, d\theta;$$

A' deviendra une fonction U^2 de u, et nous aurons pour la forme définitive de l'élément linéaire

$$ds^2 = e^{2v}(du^2 + U^2\, dv^2). \tag{42}$$

Nous appellerons *surfaces spirales* les surfaces que nous venons de définir. Elles se rapprochent de la spirale logarithmique par une propriété essentielle qui résulte de leur définition : comme cette courbe, elles peuvent être agrandies dans un rapport quelconque sans cesser d'être superposables à elles-mêmes.

Maurice Lévy a montré que le théorème de Bour s'étend à ces surfaces, qu'il y en a une infinité qui admettent le même élément linéaire et sont, par conséquent, applicables les unes sur les autres. On établit cette proposition par le calcul suivant.

En remplaçant u par une fonction de u, on peut substituer à la forme (42) de l'élément linéaire la suivante :

$$ds^2 = U^2 e^{2v}(du^2 + dv^2), \tag{43}$$

qui nous conduira à des calculs plus simples.

Définissons une surface spirale par les équations

$$\left\{\begin{aligned} X &= r e^v \cos(\omega + hv), \\ Y &= r e^v \sin(\omega + hv), \\ Z &= z e^v, \end{aligned}\right. \tag{44}$$

où h désigne une constante et où z, r, ω sont des fonctions de u. En exprimant que l'élément linéaire de cette surface est donné par la formule (43), on sera conduit aux trois relations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} U^2 &= r^2(1 + h^2) + z^2, \\ 0 &= zz' + rr' + hr^2\omega', \\ U^2 &= r^2\omega'^2 + z'^2 + r'^2, \end{aligned}\right. \tag{45}$$

qui détermineront, pour chaque valeur de la constante h, les fonctions inconnues z, r, ω. On peut aisément éliminer r et ω.

On déduit, en effet, des deux premières équations (45),

$$(46) \qquad r^2 = \frac{U^2 - z^2}{h^2 + 1}, \qquad r^2\omega' = -\frac{h z z' + \frac{1}{h} U U'}{h^2 + 1}.$$

En portant les valeurs de r, r' et de ω' dans la troisième équation, il restera pour z l'équation différentielle très simple

$$(47) \qquad z^2 + z'^2 = U^2 - \frac{U'^2}{h^2},$$

en sorte que la détermination des surfaces spirales qui admettent l'élément linéaire donné (43) sera ramenée à l'intégration de cette équation

Pour tout ce qui concerne cette intégration, nous renverrons le lecteur à la Note VI de la quatrième Partie de notre Ouvrage (1re édition).

CHAPITRE X.

SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE SURFACES DE TRANSLATION.

On se propose, dans ce Chapitre, de déterminer toutes les surfaces qui peuvent, de deux ou de plusieurs manières, être considérées comme des surfaces de translation. Cette question, qui a été posée et résolue par Sophus Lie, a été aussi l'objet des recherches d'Henri Poincaré. On va en donner une solution nouvelle qui n'exige aucune connaissance de la théorie des fonctions abéliennes.

Énoncé précis du problème à résoudre. — A chaque solution du problème convenablement formulé correspondent trois surfaces distinctes, qui peuvent être regardées, de deux ou plusieurs manières, comme des surfaces de translation. — Résultat de la recherche : Les parallèles menées par un point fixe aux tangentes de l'une quelconque des courbes (C_i) dont la translation engendre la surface sont les génératrices d'un cône algébrique du quatrième ordre. — Détermination effective de ces courbes. — Démonstration directe du théorème d'Abel pour le problème particulier étudié. — Cas où le cône du quatrième ordre se décompose. — S'il se décompose en deux cônes du second ordre, l'une des surfaces correspondantes peut être regardée d'une infinité de manières comme une surface de translation. — Équation en coordonnées cartésiennes de cette surface.

---

91. Dans le Chapitre précédent, nous avons fait connaître la définition et certaines propriétés élémentaires des surfaces de translation. Nous nous proposons maintenant de déterminer toutes les surfaces qui peuvent, de deux ou de plusieurs manières, être considérées comme des surfaces de translation, c'est-à-dire être représentées de deux ou de plusieurs manières par un système d'équations de la forme

$$(1)\quad x = f(t) + f_1(t_1), \qquad y = \varphi(t) + \varphi_1(t^1), \qquad z = \psi(t) + \psi_1(t_1).$$

Dans un Mémoire intitulé : *Bestimmung aller Flächen die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden*, et inséré, en 1882, aux *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, Lie s'est proposé et a résolu cette belle et difficile question. Henri Poincaré est revenu sur ce sujet à deux reprises différentes, d'abord dans un Mémoire intitulé : *Remarques*

diverses sur les fonctions abéliennes, inséré, en 1895, au Tome I (5e série) du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Camille Jordan, puis dans le Mémoire *Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes*, inséré, en 1901, au Tome XXIX du *Bulletin de la Société mathématique de France*.

Nous allons donner du même problème une solution nouvelle qui n'exige aucune connaissance de la théorie des fonctions abéliennes et se recommande par une grande simplicité.

92. On peut évidemment le formuler comme il suit :

Déterminer quatre systèmes de trois fonctions d'une même variable X_i, Y_i, Z_i *tels que les trois équations*

$$(2)\qquad \sum_1^4 X_i = 0, \qquad \sum_1^4 Y_i = 0, \qquad \sum_1^4 Z_i = 0$$

se réduisent à deux distinctes et laissent, par suite, subsister comme arbitraires deux des quatre variables dont dépendent les douze fonctions.

A chaque solution des équations (2) correspondent même, il est bon de le remarquer, trois solutions du problème, qui seront respectivement fournies par les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} x = X_1 + X_2 = -X_3 - X_4, \\ y = Y_1 + Y_2 = -Y_3 - Y_4, \\ z = Z_1 + Z_2 = -Z_3 - Z_4; \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} x = X_1 + X_3 = -X_2 - X_4, \\ y = Y_1 + Y_3 = -Y_2 - Y_4, \\ z = Z_1 + Z_3 = -Z_2 - Z_4; \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} x = X_1 + X_4 = -X_2 - X_3, \\ y = Y_1 + Y_4 = -Y_2 - Y_3, \\ z = Z_1 + Z_4 = -Z_2 - Z_3. \end{cases}$$

Pour résoudre les équations (2), dans les conditions qui ont été indiquées, différentions-les et posons

$$(6)\qquad \frac{dY_i}{dX_i} = x_i, \qquad \frac{dZ_i}{dX_i} = y_i.$$

Nous pourrons admettre dans la suite que x_i n'est pas une constante. Il est toujours permis, en effet, de remplacer les équations (2) par les suivantes :

$$(7) \qquad \Sigma X'_i = 0, \qquad \Sigma Y'_i = 0, \qquad \Sigma Z'_i = 0,$$

où l'on a

$$(8) \qquad \begin{cases} X'_i = A\,X_i + B\,Y_i + C\,Z_i, \\ Y'_i = A'X_i + B'Y_i + C'Z_i, \\ Z'_i = A''X_i + B''Y_i + C''Z_i, \end{cases}$$

les A, B, C, A', ..., C'' étant des constantes quelconques. Les nouvelles valeurs x'_i, y'_i, de x_i, y_i sont alors

$$(9) \qquad x'_i = \frac{A' + B'x_i + C'y_i}{A + Bx_i + Cp_i}, \qquad y'_i = \frac{A'' + B''x_i + C''y_i}{A + Bx_i + Cy_i}.$$

On peut donc effectuer sur les variables x_i, y_i la transformation homographique la plus générale. Cela revient à effectuer sur les surfaces définies par les équations (3), (4), (5) la substitution homographique la plus générale qui conserve le plan de l'infini. Ces remarques, dont nous aurons à faire usage, nous montrent, dès à présent, qu'on pourra toujours obtenir une valeur variable x'_i de x_i, à moins que x_i et y_i ne soient constants tous les deux, auquel cas la courbe (C_i) décrite par le point (X_i, Y_i, Z_i) serait une droite et ne pourrait qu'engendrer un cylindre par sa translation. Pour cette surface cylindrique, le problème que nous avons à résoudre ne se pose même pas.

93. Nous pouvons donc, dans ce qui va suivre, regarder x_i comme variable et admettre que X_i, Y_i, Z_i sont des fonctions de x_i. Alors la différentiation des équations (2) nous donnera les suivantes :

$$(10) \qquad \Sigma\, dX_i = 0, \qquad \Sigma\, x_i\, dX_i = 0, \qquad \Sigma\, y_i\, dX_i = 0,$$

y_i étant comme les X_i, Y_i, Z_i une fonction de x_i.

Pour que ces trois équations se réduisent à deux, il faut qu'on retrouve la troisième en ajoutant les deux premières après les avoir multipliées par des quantités convenablement choisies p et q, c'est-à-dire qu'on ait

$$(11) \qquad p + qx_i = y_i;$$

car il suffit de choisir p et q de telle manière que les coefficients de dX_1, dX_2, par exemple, soient nuls; ceux de dX_3, dX_4 devront l'être aussi.

Au reste, les équations (11) ont une origine géométrique évidente. Elles expriment que les tangentes aux quatre courbes (C_i) décrites par les points (X_i, Y_i, Z_i) sont parallèles au plan tangent de l'une quelconque des trois surfaces représentées par les équations (3), (4), (5), plan tangent qui est défini par l'équation

$$dZ = p\,dX + q\,dY. \tag{12}$$

Nous avons ainsi la signification géométrique de p et de q.

94. Il est aisé de voir que les surfaces cherchées ne sauraient être développables; car si q était fonction de p, tous les x_i, et par suite tous les X_i, Y_i, Z_i, seraient fonctions d'une même variable; p et q sont donc deux variables indépendantes et les équations (11) peuvent être considérées comme déterminant les x_i en fonction de ces deux variables. Si l'on pose

$$y_i = f_i(x_i), \tag{13}$$

la différentiation des équations (11) nous donnera

$$(f'_i - q)\,dx_i = dp + x_i\,dq. \tag{14}$$

Il suit de là que x_i satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial x_i}{\partial q} = x_i \frac{\partial x_i}{\partial p}, \tag{15}$$

qui joue un rôle essentiel dans notre analyse.

Comme X_i est une fonction de x_i, on en déduit d'abord qu'on aura

$$\frac{\partial X_i}{\partial q} = x_i \frac{\partial X_i}{\partial p}, \tag{16}$$

ce qui donnera

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial p}(dp + x_i\,dq). \tag{17}$$

Substituons ces valeurs des dX_i dans les deux premières équations (10), la troisième n'ayant pas à intervenir puisqu'elle est une

conséquence des deux autres. Nous aurons quatre équations qui se réduiront aux trois suivantes :

$$(18)\qquad \sum \frac{\partial X_i}{\partial p} = 0, \qquad \sum x_i \frac{\partial X_i}{\partial p} = 0, \qquad \sum x_i^2 \frac{\partial X_i}{\partial p} = 0,$$

auxquelles il faudra joindre les équations (16).

95. Si l'on tient compte de ces relations (16), la première des équations (18) peut évidemment se mettre sous la forme

$$\sum \frac{\dfrac{\partial X_i}{\partial q} - h\dfrac{\partial X_i}{\partial p}}{x_i - h} = 0,$$

où nous supposerons que h soit une constante quelconque.

Posons

$$(19)\qquad \theta = \sum \frac{1}{x_i - h}\frac{\partial X_i}{\partial p}$$

et différentions la relation précédente par rapport à p. Nous aurons

$$h\frac{\partial \theta}{\partial p} = \sum \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{x_i - h}\frac{\partial X_i}{\partial q}\right) = \sum \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{x_i - h}\frac{\partial X_i}{\partial p}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial q}.$$

Ainsi θ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(20)\qquad \frac{\partial \theta}{\partial q} = h\frac{\partial \theta}{\partial p}$$

et, par conséquent, on a

$$\theta = F(h, p + qh).$$

96. Il reste à déterminer cette fonction de deux variables.

Remarquons que d'après les relations (18), le développement de θ suivant les puissances négatives de h commencera au terme en $\frac{1}{h^4}$. Par conséquent, nous pouvons poser

$$(21)\qquad \theta = \sum \frac{1}{x_i - h}\frac{\partial X_i}{\partial p} = \frac{1}{F(h, p + qh)},$$

F étant une fonction qui sera, quels que soient p et q, un *polynome du quatrième degré en h.*

Pour qu'il en soit ainsi, il sera nécessaire et suffisant que sa

dérivée cinquième par rapport à h soit nulle; en introduisant, pour plus de netteté, la fonction

$$p' = p + qh,$$

on sera conduit ainsi à la relation

$$q^5 \frac{\partial^5 F}{\partial p'^5} + 5q^4 \frac{\partial^5 F}{\partial p'^4 \partial h} + 10q^3 \frac{\partial^5 F}{\partial p'^3 \partial h^2} + 10q^2 \frac{\partial^5 F}{\partial p'^2 \partial h^3} + 5q \frac{\partial^5 F}{\partial p' \partial h^4} + \frac{\partial^5 F}{\partial h^5} = 0,$$

qui devra avoir lieu quel que soit q. Il faudra, pour cela, que les six dérivées de F par rapport à p' et à h soient nulles et, par conséquent, que F soit un polynome quelconque du quatrième degré par rapport à h et à p'. On aura donc

$$F = F(h, p + qh),$$

le second membre étant un polynome quelconque du quatrième degré par rapport aux variables h et $p + qh$.

Ce résultat nous suffit. Car si, dans l'équation (21), on fait $x_i = h$, on a nécessairement

$$F(x_i, p + qx_i) = F(x_i, y_i) = 0. \tag{22}$$

Ainsi, *x_i et y_i sont liés par l'équation la plus générale du quatrième degré.*

Si l'on remplace x_i, y_i par leurs valeurs (6), l'équation précédente prend la forme

$$F\left(\frac{dY_i}{dX_i}, \frac{dZ_i}{dX_i}\right) = 0 \tag{22 bis}$$

et nous conduit immédiatement au résultat fondamental de Lie.

Les parallèles menées par un point fixe aux tangentes de l'une quelconque des courbes (C_i) *sont les génératrices d'un cône algébrique du quatrième ordre.*

97. Pour achever la solution du problème, il ne reste plus qu'à déterminer les fonctions X_i, Y_i, Z_i. On y parvient comme il suit :

Si, dans l'équation (21), on multiplie les deux membres par $x_i - h$, on voit immédiatement que $\frac{\partial X_i}{\partial p}$ est la vraie valeur de

$$\frac{x_i - h}{F(h, p + qh)}$$

lorsque h tend vers x_i. On a donc, en prenant le rapport des dérivées relativement à h et faisant $h = x_i$,

$$\frac{\partial X_i}{\partial p} = \frac{-1}{\dfrac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial x_i} + q\dfrac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial y_i}}.$$

Si donc on tient compte de la relation (16), il vient

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial p}dp + \frac{\partial X_i}{\partial q}dq = \frac{\partial X_i}{\partial p}(dp + x_i\,dq),$$

ou encore

$$(23) \qquad dX_i = -\frac{dp + x_i\,dq}{\dfrac{\partial F}{\partial x_i} + q\dfrac{\partial F}{\partial y_i}}.$$

En différentiant, d'autre part, la relation

$$y_i = p + qx_i,$$

on trouve

$$dy_i - q\,dx_i = dp + x_i\,dq.$$

L'équation (23) peut donc s'écrire

$$dX_i = \frac{q\,dx_i - dy_i}{\dfrac{\partial F}{\partial x_i} + q\dfrac{\partial F}{\partial y_i}}.$$

Le second membre est indépendant de q, et l'on a enfin

$$(24) \qquad dX_i = \frac{dx_i}{\dfrac{\partial F}{\partial y_i}} = \frac{-dy_i}{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}.$$

Si l'on tient compte des relations (6), on aura, de même,

$$(25) \qquad dY_i = \frac{x_i\,dx_i}{\dfrac{\partial F}{\partial y_i}}, \qquad dZ_i = \frac{y_i\,dx_i}{\dfrac{\partial F}{\partial y_i}}.$$

Ainsi, les X_i, Y_i, Z_i sont les trois intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe du quatrième ordre représentée par l'équation (22).

98. Remarquons, d'ailleurs, qu'en reprenant notre démonstration en sens inverse, on établira pour cette courbe le théorème d'Abel, dont nous n'avons pas, par conséquent, à faire état.

Considérons, en effet, la courbe

$$F(x, y) = 0, \tag{26}$$

et coupons-la par la droite

$$y = p + qx; \tag{27}$$

nous aurons une équation du quatrième ordre en x

$$F(x, p + qx) = \theta(x) = 0, \tag{28}$$

qui déterminera les points d'intersection de la courbe et de la droite. Si l'on désigne ses quatre racines par x_1, x_2, x_3, x_4, on aura les identités

$$\sum \frac{1}{\theta'(x_i)} = 0, \qquad \sum \frac{x_i}{\theta'(x_i)} = 0, \qquad \sum \frac{x_i^2}{\theta'(x_i)} = 0. \tag{29}$$

Or, différentions cette équation (28) en y faisant varier p et q. Nous aurons

$$\theta'(x_i)\, dx_i + \frac{\partial}{\partial y_i} F(x_i, y_i)(dp + x_i\, dq) = 0. \tag{30}$$

Si nous remarquons qu'en vertu des identités (29), nous avons

$$\sum \frac{dp + x_i dq}{\theta'(x_i)} = 0, \qquad \sum x_i \frac{dp + x_i dq}{\theta'(x_i)} = 0,$$
$$\sum y_i \frac{dp + x_i dq}{\theta'(x_i)} = \sum (p + qx_i) \frac{dp + x_i dq}{\theta'(x_i)} = 0,$$

nous trouverons précisément, en tenant compte de la relation (30),

$$\sum \frac{dx_i}{\frac{\partial F}{\partial y_i}} = 0, \qquad \sum \frac{x_i dx_i}{\frac{\partial F}{\partial y_i}} = 0, \qquad \sum \frac{y_i dx_i}{\frac{\partial F}{\partial y_i}} = 0. \tag{31}$$

C'est le théorème d'Abel. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, qui donne la solution complète du problème proposé :

Pour obtenir la solution la plus générale du problème de Lie, on prendra une courbe quelconque du quatrième ordre

$$F(x, y) = 0.$$

Les fonctions X_i, Y_i, Z_i *qui figurent dans les formules* (3),

(4), (5) *seront les intégrales abéliennes de première espèce relatives à quatre points de la courbe situés sur une même droite variable.*

99. Les résultats que nous avons obtenus subsistent quand la courbe du quatrième ordre se décompose. Nous allons dire quelques mots des différents cas qui peuvent se présenter, renvoyant pour plus de détails à l'Ouvrage de Lie : *Geometrie der Berührungstransformationen*, Erster Band, 1896.

Remarquons d'abord que nous pouvons parler indifféremment, soit de la courbe du quatrième ordre, soit du cône engendré par les parallèles menées d'un point fixe aux tangentes des courbes (C_i).

Supposons d'abord que ce cône se décompose en un plan et en un cône indécomposable du troisième ordre. Une des courbes (C_i) sera plane; mais il n'y aura, comme dans le cas général, que deux modes de génération pour chacune des surfaces représentées par les équations (3), (4), (5).

Si le cône se décompose en deux cônes du second degré qui soient eux-mêmes indécomposables, il est facile de mettre en évidence, pour une des trois surfaces représentées par les équations (3), (4), (5), une infinité de modes de générations. Soit alors, en effet,

$$F(x, y) = A(x, y)\,B(x, y), \tag{32}$$

A et B désignant les facteurs du second degré, et supposons que les courbes (C_1), (C_2), par exemple, correspondent aux solutions de l'équation

$$A(x, y) = 0.$$

Alors on aura

$$A(x_1, y_1) = 0, \quad A(x_2, y_2) = 0, \quad B(x_3, y_3) = 0, \quad B(x_4, y_4) = 0. \tag{33}$$

Les intégrales relatives à l'une ou à l'autre des courbes (C_1), (C_2) sont données par les formules

$$\frac{dX_i}{1} = \frac{dY_i}{x_i} = \frac{dZ_i}{y_i} = \frac{dx_i}{B(x_i, y_i)\dfrac{\partial A(x_i, y_i)}{\partial y_i}}.$$

On voit immédiatement qu'elles ne changent pas si l'on substitue,

au polynome, $B(x, y)$ de l'équation (32), le suivant :

$$B(x, y) - \rho A(x, y),$$

où ρ désigne une constante arbitraire.

L'introduction de cette constante change évidemment les expressions de X_3, Y_3, Z_3, X_4, Y_4, Z_4; de sorte qu'à un même couple de courbes (C_1), (C_2) correspondent une infinité de couples (C_3), (C_4).

Ainsi, celle des trois surfaces qui est représentée par l'équation (3) admet une infinité de modes de génération.

100. Pour développer le calcul dans ce cas particulier, nous rappellerons que l'on peut effectuer sur les variables x et y la transformation homographique la plus générale, cette transformation n'ayant d'autre résultat que de soumettre la surface elle-même à une transformation homographique qui conserve le plan de l'infini. En faisant usage de cette remarque, on verra facilement qu'on peut donner à A et à B les expressions suivantes :

$$A(x, y) = b\,y(1 - x) - a\,x(1 - y),$$
$$B(x, y) = b'y(1 - x) - a'x(1 - y),$$

où a, b, a', b' désignent des constantes quelconques.

Les intégrales relatives aux courbes (C_1), (C_2) sont données par des formules telles que les suivantes :

$$\frac{dX_i}{1} = \frac{dY_i}{x_i} = \frac{dZ_i}{y_i} = \frac{dx_i}{b(1 - x_i) + ax_i}\,\frac{1}{B(x_i, y_i)}.$$

Posant

$$\frac{by_i}{1 - y_i} = \frac{ax_i}{1 - x_i} = u,$$

on trouve pour dX_i, dY_i, dZ_i les valeurs suivantes :

$$k\,dX_i = \frac{du}{u}, \qquad k\,dY_i = \frac{du}{u + a}, \qquad k\,dZ_i = \frac{du}{u + b},$$

où l'on a

$$k = ab' - ba'.$$

La surface correspondante est déterminée par les formules

$$\begin{aligned} kx &= \operatorname{Log} A\, uv, \\ ky &= \operatorname{Log} B\,(u+a)\,(v+a), \\ kz &= \operatorname{Log} C\,(u+b)\,(v+b), \end{aligned}$$

A, B, C désignant des constantes auxquelles on peut donner telles valeurs que l'on voudra par un déplacement de l'origine des coordonnées. En faisant une transformation homothétique et introduisant plus de symétrie dans les notations, on aura les formules définitives

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} e^x &= \frac{(u-a)(v-a)}{(a-b)(a-c)}, \\ e_y &= \frac{(u-b)(v-b)}{(b-a)(b-c)}, \\ e^z &= \frac{(u-c)(v-c)}{(c-a)(c-b)}, \end{aligned} \right.$$

qui montrent que la surface est représentée par l'équation

$$(35) \qquad e^x + e^y + e^z = 1,$$

et qui mettent en évidence ses divers modes de génération.

On peut prendre pour a et b les valeurs 0 et 1, par exemple, de sorte que les formules (34) ne contiennent au fond qu'une constante arbitraire.

LIVRE II.

DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE COORDONNÉES CURVILIGNES.

CHAPITRE I.

DES SYSTÈMES CONJUGUÉS.

On commence l'étude des systèmes conjugués par l'énoncé et la démonstration d'une belle proposition de M. G. Kœnigs. Tandis qu'il semble impossible de déterminer des systèmes orthogonaux par des opérations qui ne comportent aucune intégration, il est toujours possible d'obtenir, *sur une surface quelconque*, sans aucune intégration, des systèmes à lignes conjuguées. Il suffit de prendre, comme première famille, les sections planes dont les plans passent par une droite quelconque (D) et, comme deuxième famille, les courbes de contact des cônes qui sont circonscrits à la surface et ont leurs sommets sur la droite (D). — Application de la proposition de M. Kœnigs à la solution d'un problème résolu par Joachimsthal : détermination des surfaces admettant un système de lignes de courbure plane dont les plans passent par une droite fixe. On démontre que les lignes de courbure de l'autre système sont sur des sphères qui coupent à angle droit la surface cherchée et l'on ramène le problème à la détermination des trajectoires orthogonales d'une famille de cercles situés dans un plan et dont les centres sont en ligne droite. — Digression sur les familles les plus générales de cercles dans le plan. La détermination de leurs trajectoires orthogonales dépend d'une équation de Riccati. — Notion des familles similaires de cercles introduite par V. Rouquet. — On peut définir sans aucun signe de quadrature la famille de cercles la plus générale et les trajectoires orthogonales de ces cercles. — Retour au problème proposé. Équations qui définissent les surfaces de Joachimsthal.

On met en évidence le caractère projectif et dualistique de la définition des systèmes conjugués. — On peut rattacher à tout système conjugué deux équations linéaires aux dérivées partielles : l'une à laquelle satisfont les quatre coordonnées homogènes d'un point de la surface, l'autre à laquelle satisfont les quatre coordonnées du plan tangent. En dehors de ces deux équations, il n'y en a pas d'autre de même forme à laquelle satisfassent, soit les quatre coordonnées ponctuelles, soit les quatre coordonnées tangentielles.

Application à la détermination de toutes les surfaces pour lesquelles il existe deux familles conjuguées formées exclusivement de courbes planes. — Indication d'un mode de génération de ces surfaces.

Les polaires réciproques de ces surfaces sont celles sur lesquelles il existe deux familles conjuguées formées exclusivement de courbes de contact de cônes ou de cylindres circonscrits. — Étude du cas particulier où l'une des familles est formée de courbes de contact de cylindres circonscrits. — On essaye de déterminer des surfaces de cette catégorie applicables les unes sur les autres. On résout le problème pour les surfaces admettant deux familles de courbes conjuguées planes : les unes situées dans des plans parallèles, les autres dans des plans passant par une droite fixe perpendiculaire aux plans des sections parallèles. — Comme les surfaces du second degré admettent de trois manières différentes cette génération, on peut déterminer trois familles de surfaces applicables sur une surface à centre du second degré.

---

101. Dans les différentes surfaces que nous avons étudiées précédemment, nous avons rencontré et employé des systèmes de coordonnées curvilignes très variés : les uns simplement orthogonaux, d'autres à la fois orthogonaux et isométriques, d'autres enfin formés de lignes conjuguées. Il est évident que, sur toute surface, il existe une infinité de systèmes orthogonaux ou de systèmes conjugués; car, si l'on trace sur une surface une famille quelconque de courbes, leur trajectoires orthogonales ou leurs trajectoires conjuguées seront définies par une équation différentielle du premier ordre et du premier degré, dont l'intégrale existe, bien qu'il ne soit pas toujours possible de la déterminer. On ne connaît aucune méthode qui permette de construire, sans aucune intégration, un système orthogonal sur une surface quelconque. Au contraire, la belle proposition suivante, due à M. G. Kœnigs, établit que, quelle que soit la surface considérée, il sera possible, sans effectuer aucune intégration, d'y tracer un nombre illimité de systèmes conjugués.

Soit (Σ) la surface donnée. Prenons une droite quelconque D dans l'espace. *Les sections de la surface, déterminées par tous les plans qui contiennent la droite* D, *admettront pour lignes conjuguées les courbes de contact des cônes circonscrits à la surface, ayant leurs sommets sur cette droite.*

En effet, si M est un point de la surface, le plan tangent en M ira couper la droite D en un point A. Le cône circonscrit de sommet A admettra pour génératrice MA, et cette droite, qui est évidemment la conjuguée de la tangente en M à la courbe de contact du cône, est aussi la tangente en M à la section plane de

la surface, qui est déterminée par la droite D et le point M. La proposition est donc démontrée.

102. Pour en donner dès à présent une application, proposons-nous de déterminer les surfaces pour lesquelles les lignes de courbure de l'un des systèmes sont dans des plans qui passent tous par une droite D.

Il résulte de la proposition précédente que les courbes de contact des cônes circonscrits ayant leurs sommets sur la droite D seront nécessairement les lignes de seconde courbure; et, comme ces lignes devront être orthogonales aux premières, chacune d'elles devra couper à angle droit les génératrices du cône dont elle est la courbe de contact. Par conséquent, les lignes de seconde courbure seront sphériques; les sphères qui les contiendront auront leurs centres sur la droite D, et elles seront coupées à angle droit par les lignes de première courbure.

Réciproquement, prenons une famille quelconque de sphères (S) ayant leurs centres sur la droite D. Leurs trajectoires orthogonales seront évidemment des courbes planes, puisque les tangentes à ces trajectoires vont passer par le centre d'une des sphères et rencontrent nécessairement la droite D. Si l'on prend une surface quelconque engendrée par ces trajectoires orthogonales, elle sera une des surfaces cherchées. En effet, soient (t), (t'), (t''), ... une suite de trajectoires et M, M′, M″, ... les points où elles coupent à angle droit une même sphère (S). Les tangentes aux trajectoires en M, M′, M″, ... iront évidemment concourir au centre de la sphère (S) et elles engendreront un cône, circonscrit suivant la courbe sphérique MM′M″... à la surface formée par les trajectoires (t), (t'), (t''), ... Les deux systèmes de lignes conjuguées définies par le théorème de M. Kœnigs se couperont ici à angle droit et seront, par conséquent, les deux systèmes de lignes de courbure.

De là résulte une méthode très simple pour engendrer les surfaces cherchées. Considérons une famille quelconque de sphères ayant leur centre sur la droite D, et proposons-nous de déterminer leurs trajectoires orthogonales. Soit (t) une de ces trajectoires; si on la fait tourner autour de D, de manière à ramener son plan dans un plan fixe, elle ne cessera pas d'être trajectoire ortho-

gonale. Nous sommes donc ramenés à un problème de Géométrie plane : *Trouver les trajectoires orthogonales d'une famille de cercles ayant leurs centres en ligne droite.* Voici comment on peut le résoudre.

103. Considérons d'une manière générale une famille de cercles, définie par l'équation

$$(1) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

où a, b, r sont des fonctions d'un paramètre u. Les trajectoires orthogonales satisferont à l'équation

$$(2) \qquad \frac{dx}{x-a}=\frac{dy}{y-b},$$

et, pour former leur équation différentielle, il faudrait éliminer u entre les équations (1) et (2). Cette élimination est impossible en général; il vaut mieux employer la méthode suivante.

Exprimons x, y en fonction de u et d'une nouvelle variable θ par les formules

$$(3) \qquad x=a+r\cos\theta, \qquad y=b+r\sin\theta.$$

La signification de θ est évidente : θ est l'angle que fait, avec l'axe des x, le rayon du cercle qui passe au point où ce cercle est coupé par la trajectoire orthogonale. Des formules (3), on tire les valeurs de dx et de dy, et, en les portant dans l'équation (2), on obtient pour θ l'équation

$$(4) \qquad \frac{d\theta}{du}=\frac{1}{r}\frac{da}{du}\sin\theta-\frac{1}{r}\frac{db}{du}\cos\theta$$

qu'il faudra intégrer. Or, si l'on prend comme inconnue

$$(5) \qquad \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}=t,$$

on est ramené, comme il était facile de le prévoir d'après les résultats du n° 88, à une équation de Riccati

$$(6) \qquad 2\frac{dt}{du}=\frac{2}{r}\frac{da}{du}t-\frac{1}{r}\frac{db}{du}(1-t^2).$$

De là résultent plusieurs conséquences. Si l'on connaît une trajectoire seulement d'un système de cercles, on déterminera toutes les autres par deux quadratures; si l'on en connaît deux, il suffira d'une seule quadrature; et enfin la connaissance de trois trajectoires orthogonales permettra de déterminer toutes les autres, sans aucune intégration.

Supposons, d'après cela, que l'on veuille déterminer le système orthogonal le plus général dont une famille soit formée de cercles. On pourra se donner arbitrairement deux des trajectoires orthogonales (C), (C_1). Il existe, en effet, une famille de cercles coupant deux courbes quelconques à angle droit, et leurs centres se trouvent sur la courbe (L), lieu des points d'où l'on peut mener à (C), (C_1) des tangentes égales. Comme on connaît deux trajectoires orthogonales, il suffira d'une quadrature pour obtenir toutes les autres. On pourra donc obtenir, avec une seule quadrature, l'équation du système orthogonal plan le plus général comprenant une famille de cercles [1].

---

[1] Dans sa thèse si remarquable, *Étude géométrique des surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes*, Toulouse, 1882, V. Rouquet a même montré qu'on peut obtenir, sans aucun signe de quadrature, l'équation de ce système orthogonal. Considérons, en effet, deux familles de cercles, correspondant respectivement aux systèmes de valeurs a_1, b_1, r_1 et a_2, b_2, r_2 des variables a, b, r. Si l'on a, pour chaque valeur de u,

$$(1) \qquad \frac{da_1}{r_1} = \frac{da_2}{r_2}, \qquad \frac{db_1}{r_1} = \frac{db_2}{r_2},$$

les équations de Riccati qui déterminent les trajectoires orthogonales de ces deux familles de cercles sont les mêmes; et, par conséquent, la connaissance des trajectoires orthogonales de l'une des familles entraîne celle des trajectoires orthogonales de l'autre famille. Nous dirons avec V. Rouquet que deux familles de cercles sont *similaires* lorsqu'elles satisfont aux relations (1). Il est aisé d'interpréter géométriquement ces relations. Elles expriment, en effet, que les centres des cercles, qui se correspondent dans les deux familles similaires, décrivent des courbes dont les tangentes sont, à chaque instant, parallèles; et, de plus, que les rayons des deux cercles sont dans le même rapport que les arcs infiniment petits parcourus par leurs centres dans le même temps, c'est-à-dire dans le même rapport que les rayons de courbure des deux courbes décrites par leurs centres, aux points correspondants. Cette proposition permet évidemment de construire, *sans aucune intégration*, toutes les familles similaires d'une famille de cercles donnés.

D'après cela, soit une famille quelconque de cercles, correspondant aux valeurs a_1, b_1, r_1 de a, b, r. On peut toujours concevoir qu'il existe trois fonc-

Il y a néanmoins un cas particulier très étendu dans lequel la détermination du système orthogonal n'exigera plus aucune quadrature. C'est celui où l'on saurait *a priori* que, parmi les trajectoires orthogonales de la famille de cercles, doit se trouver une ligne droite ou un cercle (γ); car, alors tous les cercles cherchés étant doublement normaux à la ligne droite ou au cercle (γ), cette trajectoire orthogonale particulière devra être comptée pour deux et donnera deux solutions de l'équation de Riccati. Il suffira donc de se donner (γ) et une autre trajectoire orthogonale (C) pour avoir trois solutions de l'équation différentielle.

Signalons encore cette conséquence des raisonnements qui précèdent : lorsqu'on aura un système déterminé de cercles coupant à angle droit un cercle donné, ou ayant leurs centres en ligne droite, la détermination de leurs trajectoires orthogonales exigera seulement une quadrature.

A un autre point de vue, il résulte de l'équation (6) la conséquence suivante : soient $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\theta_1}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\theta_2}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\theta_3}{2}$, quatre solutions quelconques de cette équation. Nous savons que leur rapport anharmonique est constant. Or, ce rapport anharmonique des quatre tangentes est, par définition, le rapport anharmonique des

---

tions a_2, b_2, r_2 telles que l'on ait

$$\frac{da_1}{r_1} = \frac{da_2}{r_2}, \qquad \frac{db_1}{r_1} = \frac{db_2}{r_2}, \qquad a_2^2 + b_2^2 = r_2^2.$$

Par suite, toute famille de cercles peut être considérée comme similaire d'une famille représentée par l'équation

$$(a - a^2)^2 + (y - b_2)^2 = a_2^2 + b_2^2,$$

pour laquelle tous les cercles passent par un point fixe, l'origine. Si l'on peut mettre en évidence, sans signe de quadrature, les trajectoires orthogonales de cette famille particulière, il en sera de même, d'après les propositions précédentes, pour la famille la plus générale. Or, une famille de cercles passant par un point dérive par inversion d'une famille de droites, et l'on peut obtenir sans quadrature les trajectoires orthogonales d'une telle famille en associant à une courbe plane quelconque toutes les courbes parallèles.

Au reste, dans beaucoup de questions, il importe peu qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas de signe de quadrature. L'essentiel est qu'on puisse obtenir, sous forme explicite, l'équation du système orthogonal, et les développements donnés dans le texte établissent que cela sera toujours possible.

points où les trajectoires correspondantes coupent l'un quelconque des cercles. On a donc le théorème suivant :

Le rapport anharmonique des quatre points où un cercle quelconque de la famille considérée est coupé par quatre trajectoires orthogonales fixes est constant.

Toutes ces propositions s'appliquent évidemment aux systèmes de cercles qui engendrent une surface quelconque et que nous avons considérés au n° 88.

104. Revenons à la question proposée. Il s'agit de trouver le système orthogonal le plus général dont une des familles soit formée de cercles ayant leurs centres sur une droite D.

Pour cela, on construira une courbe quelconque (C) et l'on tracera tous les cercles normaux à (C), ayant leurs centres sur D. Les trajectoires orthogonales de ces cercles se détermineront sans aucune intégration. Considérons, en effet, l'un quelconque de ces cercles normal en un point M à la courbe (C). Si θ_0 désigne l'angle de la tangente à la courbe en M avec la droite D, l'équation de Riccati admettra les trois solutions particulières

$$\theta_0, \quad 0, \quad \pi;$$

et, par conséquent, son intégrale générale sera donnée par la formule

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} - \operatorname{tang}\frac{\theta_0}{2}} = C',$$

ou, plus simplement,

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = C \operatorname{tang}\frac{\theta_0}{2}. \tag{7}$$

Les surfaces cherchées, qui ont d'abord été étudiées par Joachimsthal [1], admettent donc la génération suivante : *Dans un plan passant par la droite* D, *on forme, d'après le moyen*

---

[1] Joachimsthal, *Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantium* (*Journal de Crelle*, t. XXX, p. 347) et *Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes* (même Journal, t. LIV, p. 181). *Voir* surtout ce dernier article.

que nous venons d'indiquer, la famille de courbes planes (t), *la plus générale admettant pour trajectoires orthogonales une famille de cercles ayant leurs centres sur la droite* D. *On fait tourner ces courbes* (t) *autour de la droite* D, *d'un angle qui varie d'après une loi donnée, mais quelconque, quand on passe d'une courbe à l'autre; le lieu de toutes leurs positions nouvelles est la surface cherchée.*

Prenons pour axe de x la droite D. Les formules qui sont la traduction analytique de la génération précédente sont les traductions. Soit

$$(x-a)^2+y^2=r^2,$$

l'équation du système de cercles.

L'équation de Riccati (4) devient ici

$$d\theta=\frac{\sin\theta}{r}\,da.$$

Soit θ_0 une de ses solutions particulières. On peut prendre

$$a=\mathrm{F}(\theta_0),\qquad r=\mathrm{F}'(\theta_0)\sin\theta_0,$$

et la solution générale de l'équation de Riccati est

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}=\mathrm{C}\operatorname{tang}\frac{\theta_0}{2},$$

C désignant une constante. Si l'on fait tourner chaque trajectoire orthogonale autour de Oz d'un angle ψ variable avec C, il faut prendre pour C une fonction de ψ, ce qui donne

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}=\mathrm{F}_1(\psi)\operatorname{tang}\frac{\theta_0}{2}.$$

Les coordonnées d'un point quelconque de la surface cherchée s'expriment en fonction de θ_0 et de ψ par les formules

$$(8)\qquad x=a+r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta\cos\psi,\qquad z=r\sin\theta\sin\psi.$$

Elles sont identiques à celles que l'on doit à Joachimsthal.

105. Après avoir développé une application de la proposition de M. Kœnigs, revenons aux systèmes conjugués quelconques. Ces systèmes possèdent deux propriétés essentielles sur lesquelles

il convient que nous insistions, et qu'on peut énoncer comme il suit : *Tout système conjugué ne cesse pas d'être conjugué si l'on soumet la surface sur laquelle il est tracé, soit à une transformation homographique, soit à une transformation par polaires réciproques.*

Supposons d'abord que l'on soumette une surface (S) à une transformation homographique. Considérons une courbe (C) tracée sur (S). Les plans tangents à la surface en tous les points de cette courbe engendreront une surface développable (Δ) dont les génératrices rectilignes seront les conjuguées des tangentes à la courbe (C). Or, il est évident que la transformation homographique ne change en rien toutes ces relations. A la surface (S) correspond une surface (S′), à la courbe (C) une courbe (C′), à la développable (Δ) une développable (Δ') circonscrite à (S′) suivant la courbe (C′), aux tangentes de la courbe (C) celles de la courbe (C′), aux génératrices de (Δ) celles de (Δ'); par conséquent, la transformation homographique fait bien correspondre à deux tangentes conjuguées de (S) deux tangentes conjuguées de (S′).

Si, au contraire, on effectue une transformation par polaires réciproques, à la surface (S) correspond une surface (S″), à la courbe (C) une développable (Δ'') circonscrite à (S″), et à la développable (Δ) la courbe de contact (C″) de la développable (Δ''). Par suite, aux tangentes de la courbe (C) correspondent les génératrices rectilignes de (Δ'') et aux génératrices de (Δ) les tangentes de la courbe (C″). D'ailleurs, à deux tangentes en un point M de S correspondent deux tangentes au point correspondant M″ de (S″). Ici encore, on le voit, à deux droites conjuguées correspondent deux droites conjuguées.

106. Les propriétés précédentes, que l'on exprime encore en disant que la définition des systèmes conjugués est projective et dualistique, peuvent aussi être établies par la méthode analytique suivante qui nous permettra de généraliser une proposition déjà donnée (n° 83).

Soient α et β les paramètres de deux familles de courbes tracées sur une surface (S). Adoptons un système de coordonnées homogènes ou tétraédriques absolument quelconque, et soit

$$uX + vY + wZ + pT = 0 \tag{10}$$

l'équation du plan tangent à la surface; u, v, w, p seront des fonctions des paramètres α et β, et l'on obtiendrait l'équation en coordonnées ponctuelles de la surface (S) en éliminant α et β entre l'équation (10) et ses deux dérivées

$$(11)\quad \begin{cases} X\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} + Y\dfrac{\partial v}{\partial \alpha} + Z\dfrac{\partial w}{\partial \alpha} + T\dfrac{\partial p}{\partial \alpha} = 0, \\ X\dfrac{\partial u}{\partial \beta} + Y\dfrac{\partial v}{\partial \beta} + Z\dfrac{\partial w}{\partial \beta} + T\dfrac{\partial p}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

par rapport à α et à β. Par conséquent, si l'on désigne par x, y, z, t les coordonnées du point de contact du plan tangent, elles devront satisfaire aux trois équations

$$(12)\quad \begin{cases} ux + vy + wz + pt = 0, \\ x\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} + y\dfrac{\partial v}{\partial \alpha} + z\dfrac{\partial w}{\partial \alpha} + t\dfrac{\partial p}{\partial \alpha} = 0, \\ x\dfrac{\partial u}{\partial \beta} + y\dfrac{\partial v}{\partial \beta} + z\dfrac{\partial w}{\partial \beta} + t\dfrac{\partial p}{\partial \beta} = 0. \end{cases}$$

Différentions la première de ces équations, successivement par rapport à α et à β; on aura, en tenant compte des deux autres, les relations nouvelles

$$(13)\quad \begin{cases} u\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + v\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} + w\dfrac{\partial z}{\partial \alpha} + p\dfrac{\partial t}{\partial \alpha} = 0, \\ u\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + v\dfrac{\partial y}{\partial \beta} + w\dfrac{\partial z}{\partial \beta} + p\dfrac{\partial t}{\partial \beta} = 0. \end{cases}$$

On aurait pu, d'ailleurs, écrire immédiatement ces équations; elles expriment que les tangentes aux deux courbes $\alpha =$ const., $B =$ const. sont dans le plan à la surface.

Les équations (12) et (13) s'appliquent à tout système de coordonnées curvilignes. Cherchons maintenant la condition pour que les deux familles (α) et (β) forment un système conjugué. Si l'on se déplace sur la courbe $\alpha =$ const., le plan tangent enveloppera une surface développable; son intersection avec le plan tangent infiniment voisin sera définie par l'équation (10), jointe à la seconde des équations (11). Il faut exprimer que la droite représentée par ces deux équations est la tangente à la courbe $\beta =$ const. Pour cela, il faudra écrire que ces équations sont vérifiées quand on y

remplace X, Y, Z, T par

$$x + \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha, \quad y + \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha, \quad z + \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha, \quad t + \frac{\partial t}{\partial \alpha} d\alpha.$$

En tenant compte des formules déjà établies (12) et (13), cela ne donne qu'une seule équation nouvelle

$$(14) \qquad \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \beta}\frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0,$$

et cette unique équation exprime, par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux familles (α) et (β) forment un système conjugué.

Des formules (12) et (13) on déduit par différentiation les identités suivantes, applicables à tout système de coordonnées curvilignes :

$$(15) \qquad \begin{aligned} & x\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\, \partial \beta} + y\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\, \partial \beta} + z\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\, \partial \beta} + t\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ &= -\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{\partial t}{\partial \beta} \\ &= -\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial w}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial p}{\partial \beta}\frac{\partial t}{\partial \alpha} \\ &= u\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + v\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} + w\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} + p\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned}$$

Il suit de là que l'équation (14) peut encore être écrite sous l'une des trois formes suivantes :

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{\partial t}{\partial \beta} = 0, \\ & u\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} + v\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\, \partial \beta} + w\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\, \partial \beta} + p\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0, \\ & x\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\, \partial \beta} + y\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\, \partial \beta} + z\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\, \partial \beta} + t\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0. \end{aligned} \right.$$

La condition pour que les familles (α), (β) forment un système conjugué s'exprime indifféremment par l'une quelconque des quatre équations (14) ou (16).

107. Considérons, en particulier, les équations (12) et la troisième des équations (16); elles ne contiennent pas les dérivées

de x, y, z, t et l'élimination de ces coordonnées conduit à l'équation

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} u & \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial u}{\partial \beta} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ v & \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial v}{\partial \beta} & \dfrac{\partial^2 v}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ w & \dfrac{\partial w}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial w}{\partial \beta} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ p & \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial p}{\partial \beta} & \dfrac{\partial \alpha\, \partial \beta}{\partial^2 p} \end{vmatrix} = 0,$$

qui ne contient plus que les coordonnées tangentielles.

Inversement, toutes les fois que l'équation (17) sera satisfaite, il existera des valeurs de x, y, z, t vérifiant les équations (12) et la troisième des équations (16); ces équations expriment que x, y, z, t sont les coordonnées du point de contact du plan défini par l'équation (10) avec la surface qu'il enveloppe et, en outre, que les deux familles (α), (β) tracées sur cette enveloppe sont conjuguées. L'équation (17) est donc, dans tous les cas, caractéristique des systèmes conjugués.

De même, en éliminant u, v, w, p entre la première des équations (12), les deux équations (13) et la seconde équation (16), on trouvera la condition à laquelle doivent satisfaire les coordonnées ponctuelles

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} x & \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial x}{\partial \beta} & \dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ y & \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial y}{\partial \beta} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ z & \dfrac{\partial z}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial z}{\partial \beta} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ t & \dfrac{\partial t}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial t}{\partial \beta} & \dfrac{\partial^2 t}{\partial \alpha\, \partial \beta} \end{vmatrix} = 0,$$

et l'on démontrera comme précédemment que cette condition, qui est nécessaire, est aussi suffisante.

En répétant le raisonnement déjà donné au n° 83, on obtiendra immédiatement la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux familles de courbes, de paramètres α et β, soient conjuguées, est que, soit les coordonnées ponctuelles homogènes, soit les coordonnées

tangentielles, satisfassent toutes les quatre à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} + A \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + B \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + C \theta = 0, \tag{19}$$

où A, B, C *désignent des fonctions quelconques de* α *et de* β [1].

La transformation homographique ne changeant pas les coordonnées homogènes, pourvu que l'on fasse varier le tétraèdre et les paramètres de référence, et la transformation par polaires réciproques étant équivalente à un échange des coordonnées ponctuelles et des coordonnées tangentielles, on voit que la méthode précédente met bien en évidence le caractère projectif et dualistique de la définition des systèmes conjugués.

Si l'on emploie les coordonnées cartésiennes ordinaires, la coordonnée t devra être égalée à l'unité; par suite, l'équation (19) devra être vérifiée par la valeur $\theta = 1$. On devra avoir

$$C = 0$$

et l'on retrouvera le résultat du n° 83.

108. En terminant ces développements, je remarquerai qu'il est impossible de trouver deux équations de la forme (19) auxquelles satisferont en même temps les quatre coordonnées ponctuelles, tant que la surface ne se réduira pas à une courbe, ou les quatre coordonnées tangentielles, tant que la surface ne sera pas développable.

En effet, supposons que les quatre coordonnées vérifient deux équations linéaires de la forme (19). L'élimination de $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta}$ entre ces deux équations nous conduira à une équation du premier ordre

$$A' \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + B' \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + C' \theta = 0,$$

à laquelle devront encore satisfaire ces coordonnées. Or, la solution

---

[1] Il est utile de remarquer que l'équation linéaire à laquelle satisfont les quatre coordonnées ponctuelles n'est pas, en général, la même que celle à laquelle satisfont les quatre coordonnées tangentielles.

générale de cette équation est de la forme

$$\theta = \theta_0 F(\sigma_0),$$

F désignant une fonction arbitraire et θ_0, σ_0 des fonctions déterminées; par conséquent, si l'on divise toutes les coordonnées homogènes par θ_0, on les réduira à des fonctions de la seule variable σ_0. Si les coordonnées sont ponctuelles, le point décrit une courbe, et si elles sont tangentielles, le plan enveloppe une développable.

Ainsi, à toute surface non développable, et à tout système conjugué tracé sur cette surface, correspondent deux équations, et deux seulement, de la forme (19). L'une est vérifiée par les coordonnées d'un point quelconque de la surface, et l'autre par les coordonnées d'un plan tangent quelconque de la surface.

109. Le théorème précédent permet évidemment de construire une infinité de surfaces sur lesquelles on connaîtra des systèmes conjugués [1]. Nous allons, dès à présent, en faire une application en cherchant les surfaces pour lesquelles il existe deux familles conjuguées formées exclusivement de courbes planes.

Si les coordonnées tangentielles satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0,$$

la surface correspondante la plus générale sera l'enveloppe du plan défini par l'équation

$$(20) \qquad \begin{aligned} &[f_1(\alpha) + \varphi_1(\beta)]x + [f_2(\alpha) + \varphi_2(\beta)]y \\ &\quad + [f_3(\alpha) + \varphi_3(\beta)]z + [f_4(\alpha) + \varphi_4(\beta)]t = 0. \end{aligned}$$

Or, on reconnaît sans difficulté que cette surface jouit de la propriété indiquée; car, pour avoir l'enveloppe du plan tangent, il faut joindre à l'équation (20) les deux suivantes :

$$(21) \qquad \begin{cases} f'_1(\alpha)x + f'_2(\alpha)y + f'_3(\alpha)z + f'_4(\alpha)t = 0, \\ \varphi'_1(\beta)x + \varphi'_2(\beta)y + \varphi'_3(\beta)z + \varphi'_4(\beta)t = 0, \end{cases}$$

---

[1] Darboux, *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux* (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. VII, 1878, p. 293).

qui ne contiennent chacune qu'une seule des variables α, β et montrent ainsi que les deux familles conjuguées $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ sont composées de courbes planes.

La solution que nous venons d'obtenir est très générale; on peut démontrer qu'il n'y en a pas d'autre. Pour cela, nous définirons la surface cherchée comme enveloppe du plan

$$uX + vY + wZ + pT = 0. \tag{22}$$

Prenons la dérivée de cette équation par rapport à α, nous aurons

$$X\frac{\partial u}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial v}{\partial \alpha} + Z\frac{\partial w}{\partial \alpha} + T\frac{\partial p}{\partial \alpha} = 0. \tag{23}$$

Ces deux équations représentent, on l'a vu, la tangente à la courbe $\alpha = \text{const.}$, toutes les fois que les deux familles (α), (β) sont conjuguées.

Or, si les courbes de paramètre α sont planes, elles seront déterminées par une équation de la forme

$$Xf_1(\alpha) + Yf_2(\alpha) + Zf_3(\alpha) + Tf_4(\alpha) = 0, \tag{24}$$

et, par conséquent, les trois plans définis par les équations (22), (23), (24) contiendront une même droite, la tangente à la courbe $\alpha = \text{const.}$; l'une de ces trois équations devra donc être une combinaison linéaire des deux autres. Écrivons que la troisième s'obtient en ajoutant les deux autres, respectivement multipliées par μ et par λ; nous aurons le système

$$\begin{aligned}
f_1(\alpha) &= \mu u + \lambda \frac{\partial u}{\partial \alpha},\\
f_2(\alpha) &= \mu v + \lambda \frac{\partial v}{\partial \alpha},\\
f_3(\alpha) &= \mu w + \lambda \frac{\partial w}{\partial \alpha},\\
f_4(\alpha) &= \mu p + \lambda \frac{\partial p}{\partial \alpha}.
\end{aligned}$$

En éliminant, par une différentiation, les fonctions $f_1(\alpha), \ldots,$ on verra que u, v, w, p doivent satisfaire à la même équation du second ordre

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\mu\theta + \lambda\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(25)\qquad \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} + \mu\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + \theta\frac{\partial\mu}{\partial\beta} = 0.$$

En considérant de même les courbes $\beta = \text{const.}$, on trouverait que les coordonnées tangentielles doivent aussi satisfaire à l'équation semblable

$$(26)\qquad \lambda' \frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \mu'\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \frac{\partial\lambda'}{\partial\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + \theta\frac{\partial\mu'}{\partial\alpha} = 0.$$

Or, nous avons vu que u, v, w, p ne peuvent satisfaire en même temps à deux équations de la forme précédente, au moins tant que la surface n'est pas développable. Il faudra donc que les équations (25), (26) soient identiques; ce qui donne les conditions

$$\frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\partial \log\lambda}{\partial\beta}, \qquad \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\partial \log\lambda'}{\partial\alpha}, \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\mu}{\partial\beta} = \frac{1}{\lambda'}\frac{\partial\mu'}{\partial\alpha}.$$

En portant les valeurs de μ et de μ' dans la dernière équation, nous trouvons

$$\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\partial^2 \log\lambda'}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

d'où l'on déduit, en intégrant,

$$\lambda' = \lambda f(\alpha)\varphi(\beta),$$

ce qui donne

$$\mu = \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} + \lambda\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}.$$

Si nous portons cette valeur de μ dans l'équation (25), elle prend la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}[\lambda f(\alpha)\theta] = 0.$$

On voit que, si nous multiplions les quatre coordonnées u, v, w, p par une même fonction $\lambda f(\alpha)$, ce qui est évidemment permis, elles satisferont à l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0,$$

et l'on retrouve la solution que nous avons donnée *a priori*.

Il est vrai que nous avons écarté de notre raisonnement l'hypothèse où la surface serait développable. Mais, pour obtenir une

telle surface, il suffira de supposer nulles, dans la formule (20), toutes les fonctions de β. Ainsi, notre première solution donne, sans aucune exception, toutes les surfaces pour lesquelles il peut exister un système conjugué composé de deux familles de courbes planes.

Il nous reste à indiquer un mode de génération simple des surfaces que nous venons d'obtenir. Pour cela, faisant $t = 1$, nous envisagerons les deux familles de sphères définies par les équations

$$(27)\quad x^2 + y^2 + z^2 - 2f_1(\alpha)x - 2f_3(\alpha)y - 2f_3(\alpha)z - 2f_4(\alpha) = 0,$$
$$(28)\quad x^2 + y^2 + z^2 + 2\varphi_1(\beta)x + 2\varphi_2(\beta)y + 2\varphi_3(\beta)z + 2\varphi_4(\beta) = 0.$$

Ces deux familles de sphères sont absolument quelconques, et d'ailleurs leur plan radical est précisément le plan tangent de la surface cherchée, représenté par l'équation (20). Nous sommes donc conduits au théorème suivant :

Si l'on considère dans l'espace deux familles de sphères définies de la manière la plus générale, le plan radical d'une des sphères de la première famille et d'une des sphères de la seconde enveloppera la surface la plus générale admettant deux familles conjuguées formées exclusivement de courbes planes.

Pour déterminer la surface par points, on remarque que les deux équations (21) sont les dérivées par rapport à α et à β des équations (27), (28). Donc,

Si l'on associe à deux sphères de familles différentes les sphères infiniment voisines, le centre radical de ces quatre sphères décrira la surface cherchée. Le plan radical de deux sphères infiniment voisines de la même famille contiendra une des courbes de l'un des systèmes conjugués.

110. Les surfaces que nous venons d'étudier dans les deux numéros précédents et qui admettent deux familles conjuguées formées exclusivement de courbes planes ont évidemment pour polaires réciproques des surfaces qui admettent deux familles conjuguées formées, l'une et l'autre, avec des courbes de contact de cônes circonscrits à la surface. C'est, d'ailleurs, ce que l'on peut vérifier directement.

Les polaires réciproques des surfaces définies par l'équation (20) sont définies par des équations de la forme suivante :

$$(29)\qquad \begin{cases} x = f_1(\alpha) + \varphi_1(\beta), \\ y = f_2(\alpha) + \varphi_2(\beta), \\ z = f_3(\alpha) + \varphi_3(\beta), \\ t = f_4(\alpha) + \varphi_4(\beta), \end{cases}$$

où x, y, z, t sont des coordonnées homogènes *quelconques*. Leur plan tangent

$$uX + vY + wZ + pT = 0$$

sera évidemment défini par la première des équations (12)

$$ux + vy + wz + pt = 0$$

et les deux équations (13), qui deviennent ici

$$(30)\qquad \begin{cases} uf'_1(\alpha) + vf'_2(\alpha) + wf'_3(\alpha) + pf'_4(\alpha) = 0, \\ u\varphi'_1(\beta) + v\varphi'_2(\beta) + w\varphi'_3(\beta) + p\varphi'_4(\beta) = 0 \end{cases}$$

et qui mettent en évidence la propriété annoncée. Car la première exprime que le plan tangent en tous les points de la courbe de paramètre α passe par le point de coordonnées

$$(31)\qquad x = f'_1(\alpha), \qquad y = f'_2(\alpha), \qquad z = f'_3(\alpha), \qquad t = f'_4(\alpha),$$

et la seconde exprime que le plan tangent en tous les points de la courbe de paramètre β passe par le point

$$(32)\qquad x = \varphi'_1(\beta), \qquad y = \varphi'_2(\beta), \qquad z = \varphi'_3(\beta), \qquad t = \varphi'_4(\beta).$$

On voit que si, x, y, z, t désignent les coordonnées *cartésiennes homogènes*, les cônes circonscrits suivant la famille de paramètre α deviendront des cylindres lorsque la fonction $f_4(\alpha)$ se réduira à une constante. Et il en sera de même des cônes circonscrits de l'autre famille si $\varphi_4(\beta)$ se réduit à une constante. Lorsque les deux fonctions se réduisent à des constantes, on retrouve les surfaces de translation.

A la classe générale que nous venons de définir appartiennent

évidemment celles qui sont définies par les équations

$$(33)\quad \begin{cases} x = \mathrm{A}\alpha + \int \mathrm{A}' a\, du, \\ y = \mathrm{A}\beta + \int \mathrm{A}' b\, du, \\ z = \mathrm{A}\gamma + \int \mathrm{A}' c\, du, \end{cases}$$

où x, y, z désignent des coordonnées rectangulaires; où α, β, γ désignent des fonctions quelconques de v; A, a, b, c des fonctions quelconques de u, A′ étant la dérivée de A. L'élément linéaire de ces surfaces sera défini par l'équation

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \mathrm{A}'^2[(\alpha + a)^2 + (\beta + b)^2 + (\gamma + c)^2]\, du^2 + \mathrm{A}^2(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\, dv^2 \\ & + 2\mathrm{AA}'[(\alpha + a)\alpha' + (\beta + b)\beta' + (\gamma + c)\gamma']\, du\, dv. \end{aligned}$$

Il suit de là que si l'on considère une seconde surface définie par les équations

$$(34)\quad \begin{cases} x_1 = \mathrm{A}\alpha_1 + \int \mathrm{A}' a_1\, du, \\ y_1 = \mathrm{A}\beta_1 + \int \mathrm{A}' b_1\, du, \\ z_1 = \mathrm{A}\gamma_1 + \int \mathrm{A}' c_1\, du, \end{cases}$$

où α_1, β_1, γ_1 sont, comme α, β, γ, des fonctions de v et a_1, b_1, c_1 des fonctions de u, cette nouvelle surface sera applicable sur la première si l'on a

$$(35)\quad \begin{cases} (a + \alpha)^2 + (b + \beta)^2 + (c + \gamma)^2 = (a_1 + \alpha_1)^2 + (b_1 + \beta_1)^2 + (c_1 + \gamma_1)^2, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \alpha_1'^2 + \beta_1'^2 + \gamma_1'^2. \end{cases}$$

Les coefficients de $du\, dv$ seront alors les mêmes dans les deux éléments linéaires.

111. Nous laisserons au lecteur le soin d'obtenir la solution générale des équations précédentes dont la première est *aux variables mêlées*. Nous nous bornerons au cas particulier où l'on suppose

$$(36)\qquad a = b = \gamma = 0, \qquad a_1 = b_1 = \gamma_1 = 0.$$

Alors, les équations (33), (34) deviennent

$$(37)\qquad x = A\alpha, \qquad y = A\beta, \qquad z = \int A' c\, du,$$

$$(38)\qquad x_1 = A\alpha_1, \qquad y_1 = A\beta_1, \qquad z_1 = \int A' c_1\, du$$

et les équations (35) à résoudre prennent la forme

$$(39)\qquad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + c^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + c_1^2, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 = \alpha_1'^2 + \beta_1'^2. \end{cases}$$

Leur solution est évidente. On a

$$(40)\qquad c_1^2 = c^2 - h, \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = h + \alpha^2 + \beta^2,$$

h désignant une constante. Posons

$$(41)\qquad \alpha_1 = \rho\cos\theta, \qquad \beta_1 = \rho\sin\theta,$$

il viendra

$$(42)\qquad \rho^2 = h + \alpha^2 + \beta^2, \qquad \theta' = \frac{\sqrt{h(\alpha'^2 + \beta'^2) + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}}{h + \alpha^2 + \beta^2}.$$

Les valeurs de α_1, β_1, c_1 seront alors fournies par les équations (40), (41).

Interprétons géométriquement le résultat obtenu.

On verra aisément que les équations (33), (34) représentent les surfaces les plus générales pour lesquelles une des familles conjuguées est formée des courbes de contact de cylindres circonscrits, tandis que l'autre est formée de courbes de contact de cônes circonscrits. Mais, si l'on introduit les hypothèses (36) et si l'on prend les surfaces particulières représentées par les équations (37), (38), on voit, de plus, que les courbes conjuguées de paramètre v sont planes et ont leurs plans passant par l'axe des z, car elles sont telles que, sur chacune d'elles, le rapport de y à x demeure constant. Quant aux courbes de paramètre u, elles sont évidemment dans des plans parallèles au plan des xy.

Ainsi, les surfaces que nous obtenons ont une double propriété. Les sections planes formées par les plans parallèles au plan des xy et celles qui passent par l'axe des z engendrent d'abord deux familles conjuguées. Mais, en outre, ces deux familles conjuguées sont telles que les développables circonscrites à la surface le long

des sections parallèles au plan des xy sont des cônes, dont les sommets se trouvent sur l'axe des z, et que les développables circonscrites le long des courbes dont les plans passent par l'axe des z sont des cylindres, dont les génératrices rectilignes sont parallèles au plan des xy. Et l'on voit que l'on peut les déformer d'une manière continue, en introduisant un paramètre h, de manière à conserver toutes ces relations géométriques.

Ces relations sont toutes évidemment vérifiées si, considérant une surface générale du second degré, on y trace les sections dont les plans passent par un des trois axes principaux et celles qui sont perpendiculaires à cet axe. Ainsi, les surfaces du second degré sont, de trois manières différentes, des cas particuliers de celles qui sont définies par les formules (37). C'est ce qu'il est aisé de vérifier.

Si l'on prend l'équation

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1, \tag{43}$$

on peut toujours poser

$$x = l\cos u\cos v, \qquad y = m\cos u\sin v, \qquad z = n\sin u. \tag{44}$$

On a donc ici, en comparant aux formules (37) à (42), les valeurs

$$\alpha = l\cos v, \qquad \beta = m\sin v, \qquad A = \cos u, \qquad c = -n\cot u.$$

L'application de la méthode générale nous donnera

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos u\cos\theta, \\ y_1 &= \rho\cos u\sin\theta, \\ z_1 &= \int\sqrt{n^2\cos^2 u - h\sin^2 u}\,du, \end{aligned}\right. \tag{45}$$

ρ et θ étant définis par les formules

$$\left\{\begin{aligned} \rho^2 &= l^2\cos^2 v + m^2\sin^2 v + h. \\ \theta' &= \frac{\sqrt{h(l^2\sin^2 v + m^2\cos^2 v) + l^2m^2}}{h + l^2\cos v + m^2\sin^2 v}. \end{aligned}\right. \tag{46}$$

Nous obtenons ainsi une famille de surfaces applicables sur les surfaces générales du second degré.

Cet intéressant résultat est dû à un géomètre russe, Peterson, dont les beaux travaux sur la Géométrie infinitésimale et sur les équations aux dérivées partielles sont malheureusement restés ignorés pendant longtemps. Nous ne les connaissons que grâce aux analyses qui en ont été données en 1903 par MM. Mlodzieiowski et D. T. Egorov, analyses qui ont été traduites du russe par M. Davaux et ont été insérées dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (2e série, t. V, p. 459).

CHAPITRE II.

SYSTÈME CONJUGUÉS. LIGNES ASYMPTOTIQUES.

Application d'une des propositions précédentes à la détermination des surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. — Résolution de l'équation aux variables mêlées dont dépend la solution de ce problème. — Cyclide de Dupin. — Il y a trois classes distinctes de surfaces à lignes de courbure planes. — On indique un mode de génération très simple de ces différentes surfaces.

Retour à la théorie générale. — Définition des caractéristiques d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. — Réduction à une forme typique. — Cas où les caractéristiques sont confondues.

Équations linéaires les plus générales auxquelles satisfont soit les quatre coordonnées ponctuelles, soit les quatre coordonnées tangentielles. Leurs caractéristiques correspondent toujours à un système conjugué. — Cas particulier où l'on obtient le système conjugué formé par les lignes de courbure.

Recherche des lignes asymptotiques. — Leur définition est à la fois projective et dualistique. — Leur équation différentielle, soit en coordonnées ponctuelles, soit en coordonnées tangentielles. — Application nouvelle de la proposition de M. G. Kœnigs. Elle fournit un moyen de débarrasser du terme rectangle l'équation différentielle des lignes asymptotiques. — Détermination des lignes asymptotiques de quelques surfaces remarquables.

Relations entre la théorie des lignes asymptotiques et celle des équations linéaires aux dérivées partielles.

---

112. La proposition obtenue à la fin du Chapitre précédent conduit à une méthode très simple pour la détermination des surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans les deux systèmes. Il suffira, en effet, de chercher, parmi les surfaces enveloppes du plan représenté par l'équation (20), celles pour lesquelles les deux familles de courbes conjuguées se coupent à angle droit.

Considérons la surface enveloppe du plan

$$uX + vY + wZ + p = 0,$$

où X, Y, Z désignent des coordonnées cartésiennes rectangulaires et où u, v, w, p sont des fonctions de α et de β. La condition

d'orthogonalité des courbes de paramètre α et β tracées sur l'enveloppe est compliquée en général, et contient les dérivées secondes des coordonnées tangentielles. Mais elle se simplifie beaucoup quand α et β sont les paramètres de deux familles conjuguées. En effet, si x, y, z, t sont les coordonnées du point de contact et si l'on fait $t = 1$, on a les deux équations

$$u\frac{\partial x}{\partial \alpha} + v\frac{\partial y}{\partial \alpha} + w\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

d'où l'on déduit les proportions

$$(1)\qquad \frac{\partial x}{\partial \alpha} : \frac{\partial y}{\partial \alpha} : \frac{\partial z}{\partial \alpha} :: v\frac{\partial w}{\partial \beta} - w\frac{\partial v}{\partial \beta} : w\frac{\partial u}{\partial \beta} - u\frac{\partial w}{\partial \beta} : u\frac{\partial v}{\partial \beta} - v\frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

On a des formules analogues pour $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, $\frac{\partial y}{\partial \beta}$, $\frac{\partial z}{\partial \beta}$ et, en écrivant la condition d'orthogonalité, on trouve l'équation

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(u\frac{\partial u}{\partial \alpha} + v\frac{\partial v}{\partial \alpha} + w\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial \beta} + v\frac{\partial v}{\partial \beta} + w\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)\\ &\quad -(u^2 + v^2 + w^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta}\right) = 0.\end{aligned}\right.$$

Remarquons toutefois que cette équation serait illusoire si u, v, w, p ne contenaient pas β, car alors les formules (1) n'auraient aucune signification; la surface serait développable.

Pour appliquer l'équation (2) au problème qui nous occupe, il faut faire

$$u = A_1 - B_1, \qquad v = A_2 - B_2, \qquad w = A_3 - B_3,$$

A_1, A_2, A_3 désignant des fonctions de α et B_1, B_2, B_3 des fonctions de β. On reconnaît que l'équation (2) peut être ramenée à ne contenir que les dérivées de la fonction h définie par l'équation

$$h^2 = u^2 + v^2 + w^2 = (A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2 + (A_3 - B_3)^2.$$

En effet, cette équation, différentiée par rapport à α et à β, donne

successivement

$$h\frac{\partial h}{\partial \alpha} = u\frac{\partial u}{\partial \alpha} + v\frac{\partial v}{\partial \alpha} + w\frac{\partial w}{\partial \alpha},$$

$$h\frac{\partial h}{\partial \beta} = u\frac{\partial u}{\partial \beta} + v\frac{\partial v}{\partial \beta} + w\frac{\partial w}{\partial \beta},$$

$$h\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{\partial h}{\partial \alpha}\frac{\partial h}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta}.$$

En tenant compte de ces relations, l'équation (2) prend la forme

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0,$$

et il faut, pour qu'elle soit satisfaite, que l'on ait

$$h = A_4 - B_4.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Pour obtenir les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, on commencera par déterminer les fonctions de α et de β satisfaisant identiquement à l'équation

$$(3)\qquad (A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2 + (A_3 - B_3)^2 = (A_4 - B_4)^2.$$

Quand ces fonctions seront connues, la surface sera l'enveloppe du plan représenté par l'équation

$$(4)\qquad (A_1 - B_1)x + (A_2 - B_2)y + (A_3 - B_3)z = A - B,$$

où A, B *désignent deux fonctions nouvelles qui dépendent respectivement de α et de β. Les lignes de courbure des deux systèmes seront définies par les équations*

$$(5)\qquad \begin{cases} A'_1 x + A'_2 y + A'_3 z = A', \\ B'_1 x + B'_2 y + B'_3 z = B', \end{cases}$$

qui ne contiennent chacune qu'une seule des variables α ou β et représentent les plans de ces lignes.

113. Toute la difficulté du problème est ramenée, par la méthode précédente, à la détermination des fonctions les plus générales satisfaisant identiquement à la relation (3). Or, si l'on différentie cette équation successivement par rapport à α et à β, on est

ramené à l'équation plus simple

$$A'_1 B'_1 + A'_2 B'_2 + A'_3 B'_3 = A'_4 B'_4,$$

dont J.-A. Serret a donné toutes les solutions possibles dans son important Mémoire *Sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques* (*Journal de Liouville*, 1re série, t. XVIII, p. 116). Au lieu de suivre la marche adoptée par Serret, nous nous attacherons à l'équation (3) et nous l'interpréterons de la manière suivante.

Considérons la sphère (S), variable et dépendante du paramètre α, dont le centre a pour coordonnées A_1, A_2, A_3 et dont le rayon est égal, en grandeur et en signe, à A_4; considérons de même la sphère (S′), dépendante du paramètre β, dont le centre a pour coordonnées B_1, B_2, B_3 et dont le rayon est égal à B_4. L'équation (3) exprime évidemment que les deux sphères (S), (S′) sont constamment tangentes. Ainsi, nous avons deux familles distinctes de sphères, engendrées par (S) et (S′), et qui sont dans une relation telle que toute sphère de la première famille est tangente à toute sphère de la seconde. On peut interpréter cette relation de diverses manières pour obtenir le résultat cherché.

Supposons, par exemple, que l'on prenne trois sphères (S'_1), (S'_2), (S'_3) de la seconde famille, correspondant à trois valeurs distinctes, mais arbitrairement choisies, du paramètre β. Comme les sphères (S) doivent être toutes tangentes à ces trois sphères fixes, elles formeront un système simplement infini et engendreront une famille complètement définie par cette triple condition. Il est aisé de caractériser cette famille.

Désignons, en effet, par ρ le rayon de la sphère (S), par R_1, R_2, R_3 les rayons des trois sphères fixes (S'_1), (S'_2), (S'_3), par d_1, d_2, d_3 les distances du centre de (S) aux centres des trois sphères fixes. En exprimant que (S) est tangente, et tangente d'une manière déterminée, à ces trois sphères fixes, on aura les trois équations

$$(6) \qquad d_1 = R_1 + \rho, \qquad d_2 = R_2 + \rho, \qquad d_3 = R_3 + \rho.$$

De là, il résulte d'abord que le centre de la sphère (S) décrit l'intersection des surfaces

$$(7) \qquad d_1 - d_2 = R_1 - R_2, \qquad d_1 - d_3 = R_1 - R_3,$$

qui sont des quadriques de révolution et se coupent suivant deux courbes planes dont l'une, il est aisé de le reconnaître, ne correspond pas à une solution du problème. Si l'on utilise, en effet, les identités évidentes

$$d_1^2 - d_2^2 = P_2, \qquad d_1^2 - d_3^2 = P_3,$$

où P_2 et P_3 désignent des polynomes du premier degré, les formules (7) nous donneront, en particulier, la double équation

$$(8) \qquad 2d_1 = \frac{P_2}{R_1 - R_2} + R_1 - R_2 = \frac{P_3}{R_1 - R_3} + R_1 - R_3.$$

La relation que l'on obtient en égalant le second et le troisième membre nous montre immédiatement que la courbe décrite par le centre des sphères (S) est plane.

D'autre part, comme l'équation obtenue en égalant le premier et le second membre représente une quadrique de révolution (Q), ayant pour foyer le centre de la sphère (S'_1), on voit que les centres des sphères (S) doivent se trouver sur une conique (C).

Comme, d'ailleurs, *le foyer de la surface* (Q) *est nécessairement un foyer de toute section plane de cette surface* et en particulier de (C), on voit que le centre de la sphère (S'_1) et, par conséquent, les centres de toutes les sphères (S′) doivent nécessairement être des foyers de (C), c'est-à-dire se trouver sur la conique (C′), focale de (C).

Ainsi, les lieux des centres des sphères (S) et (S′) doivent être deux coniques, focales l'une de l'autre. C'est là le résultat essentiel dont nous aurons à faire usage.

On peut encore raisonner comme il suit :

L'équation (3) exprime évidemment que les deux sphères (S) et (S′) sont constamment tangentes. Il faut donc que ces deux sphères, envisagées successivement, enveloppent la même surface (Σ). Et, comme cette surface (Σ) est touchée suivant un cercle par chacune des sphères (S), aussi bien que par chacune des sphères (S′), il faut que *toutes ses lignes de courbure soient circulaires.*

Nous sommes ainsi ramenés à un problème bien connu, qui a été

proposé et résolu pour la première fois par Dupin [1] : *Déterminer toutes les surfaces dont les lignes de courbure sont circulaires.* La solution fournit une surface du quatrième ordre, la *cyclide de Dupin*, dont les normales rencontrent une ellipse et une hyperbole, qui sont les focales l'une de l'autre et qui contiennent les centres de toutes les sphères tangentes à la surface suivant une de ses lignes de courbure. Cette surface peut dégénérer soit en un tore, et alors l'ellipse focale se réduit à un cercle, soit en une surface du troisième degré, et, dans ce cas, les deux courbes focales deviennent des paraboles.

Si l'on suppose que l'ellipse se réduise à un cercle, l'hyperbole se réduira à une droite passant par le centre du cercle et perpendiculaire à son plan. En choisissant le centre du cercle pour origine des coordonnées et la droite pour axe des z, nous obtenons une première solution de l'équation (3) donnée par les formules suivantes :

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = \alpha,$$
$$B_1 = \cos\beta, \qquad B_2 = \sin\beta, \qquad B_3 = 0.$$

La surface à lignes de courbure planes correspondante est l'enveloppe du plan

$$\alpha z - x\cos\beta - y\sin\beta = f(\alpha) + \varphi(\beta).$$

Les lignes de courbure $\alpha = \text{const.}$ sont dans des plans parallèles

$$z = f'(\alpha),$$

et, par conséquent, cette première classe ne comprend que les surfaces moulures déjà étudiées (n° 86).

Passons au cas général où l'une des focales est une ellipse. Comme on peut multiplier toutes les fonctions A_i, B_i par un même nombre, on pourra prendre, pour cette focale, les équations

$$x^2 + \frac{z^2}{\lambda^2} = 1, \qquad y = 0,$$

et l'hyperbole correspondante sera alors représentée par le système

$$x = 0, \qquad y^2 - \frac{z^2}{\lambda^2 - 1} = -1.$$

---

[1] Dupin, *Applications de Géométrie et de Mécanique*, 1822, p. 200 et suiv.

Un point de la première courbe sera défini par les formules

$$(9)\qquad x = A_1 = \alpha, \qquad y = A_2 = 0, \qquad z = A_3 = \lambda\sqrt{1-\alpha^2},$$

et, de même, un point de la seconde par les formules analogues

$$(10)\qquad x = B_1 = 0, \qquad y = B_2 = \beta, \qquad z = B_3 = \sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1+\beta^2}.$$

La surface à lignes de courbure planes, correspondante à ces valeurs des fonctions A_i, B_i, sera l'enveloppe du plan

$$(11)\qquad \alpha x - \beta y + \left(\lambda\sqrt{1-\alpha^2} - \sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1+\beta^2}\right)z = f(\alpha) - \varphi(\beta),$$

lorsque α et β varieront.

On trouvera de même, dans le cas où l'ellipse se réduit à une parabole, que la surface correspondante est l'enveloppe du plan

$$(12)\qquad 2\alpha x + 2\beta y + (1-\alpha^2-\beta^2)\,z = f(\alpha) + \varphi(\beta).$$

En résumé, nous obtenons trois classes de surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. Mais il résulte clairement des raisonnements précédents que la première et la troisième peuvent être considérées comme des cas limites de la seconde, qui est définie par la formule (11). Nous allons faire connaître un nouveau mode de génération de ces surfaces.

Si l'on différentie successivement par rapport à α et à β l'équation (11), on obtient les deux équations

$$(13)\qquad x - \frac{\lambda\alpha z}{\sqrt{1-\alpha^2}} = f'(\alpha),$$

$$(14)\qquad y + \frac{\sqrt{\lambda^2-1}\,\beta z}{\sqrt{1+\beta^2}} = \varphi'(\beta),$$

qui représentent, nous l'avons vu, les plans des lignes de première et de seconde courbures. Ainsi, les lignes de courbure de chaque système sont dans les plans tangents d'un cylindre, et les cylindres qui correspondent aux deux systèmes ont leurs génératrices perpendiculaires.

D'autre part, les deux familles de sphères considérées au n° 109 ont ici pour équations

$$(15)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\lambda\sqrt{1-\alpha^2}\,z+2f(\alpha)=0,\\ x^2+y^2+z^2-2\beta y-2\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1+\beta^2}\,z+2\varphi(\beta)=0;\end{cases}$$

les centres de ces sphères sont situés respectivement sur les deux focales. D'ailleurs, leurs rayons dépendent des fonctions $f(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ et varient, par conséquent, suivant une loi quelconque. En appliquant le théorème du n° 109, on sera donc conduit à la proposition suivante :

Pour obtenir toutes les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, on construira deux familles différentes de sphères dont les centres seront assujettis à décrire respectivement deux courbes du second degré, focales l'une de l'autre, et dont les rayons varieront suivant une loi quelconque pour chacune des deux familles. Le plan radical de deux sphères (S), (Σ), *appartenant aux deux familles différentes, enveloppera la surface cherchée. Si l'on associe à* (Σ) *et à* (S) *les sphères infiniment voisines* (Σ'), (S'), *le centre radical de ces quatre sphères décrira la surface; les plans radicaux de* (S) *et de* (S'), *de* (Σ) *et de* (Σ') *seront les plans des lignes de courbure des deux systèmes.*

Bien que nos raisonnements aient laissé de côté le cas des surfaces développables, les résultats obtenus comprennent ces surfaces qui sont, on le reconnaîtra aisément, des surfaces moulures formées par les tangentes d'une hélice tracée sur un cylindre quelconque.

114. Nous terminerons cette étude préliminaire des systèmes conjugués en généralisant la proposition donnée au n° 107, et, pour le faire d'une manière précise, nous commencerons par rappeler la définition des caractéristiques d'une équation linéaire aux dérivées partielles.

Soit

$$(16) \qquad A\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} + B\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} + A'\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + B'\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + C'\theta = 0$$

une telle équation, où les coefficients seront des fonctions données quelconques de α et de β. Si l'on substitue, à ces variables indépendantes, les suivantes :

$$\rho = \varphi(\alpha, \beta). \qquad \rho_1 = \psi(\alpha, \beta),$$

l'équation conservera sa forme et deviendra

$$a\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2}+b\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1}+c\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_1^2}+a'\frac{\partial\theta}{\partial\rho}+b'\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}+c'\theta=0,$$

a, b, c ayant les valeurs suivantes :

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \mathrm{A}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\right)^2+\mathrm{B}\,\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\frac{\partial\rho}{\partial\beta}+\mathrm{C}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\beta}\right)^2,\\ b &= 2\mathrm{A}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\frac{\partial\rho_1}{\partial\alpha}+\mathrm{B}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\frac{\partial\rho_1}{\partial\beta}+\frac{\partial\rho}{\partial\beta}\frac{\partial\rho_1}{\partial\alpha}\right)+2\mathrm{C}\frac{\partial\rho}{\partial\beta}\frac{\partial\rho_1}{\partial\beta},\\ c &= \mathrm{A}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial\alpha}\right)^2+\mathrm{B}\frac{\partial\rho_1}{\partial\alpha}\frac{\partial\rho_1}{\partial\beta}+\mathrm{C}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial\beta}\right)^2.\end{aligned}\right.$$

Si donc on veut faire disparaître les deux termes en $\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2}$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_1^2}$, ρ et ρ_1 devront être deux fonctions différentes satisfaisant à l'équation

$$(18)\qquad \mathrm{A}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^2+\mathrm{B}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\mathrm{C}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)^2=0.$$

On peut énoncer de la manière suivante :

Considérons l'équation différentielle du premier ordre et du second degré

$$(19)\qquad \mathrm{A}\,d\beta^2-\mathrm{B}\,d\alpha\,d\beta+\mathrm{C}\,d\alpha^2=0,$$

*à laquelle nous donnerons le nom d'*équation différentielle des caractéristiques, *et qui se décompose en deux équations du premier degré admettant chacune une intégrale. Soient*

$$\rho=\varphi(\alpha,\beta),\qquad \rho_1=\psi(\alpha,\beta)$$

les deux intégrales ainsi obtenues; il faudra prendre ρ, ρ_1 *pour nouvelles variables si l'on veut ramener l'équation en* θ *à la forme*

$$(20)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1}+a'\frac{\partial\theta}{\partial\rho}+b'\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}+c'\theta=0.$$

On voit que la transformation serait impossible si le premier membre de l'équation (19) était un carré parfait. Mais il résulte des formules (17) que si l'on prend alors pour ρ l'intégrale unique

de l'équation (19), l'équation en θ se réduit à la forme simple [1]

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_1^2} + a' \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + b' \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + c' \theta = 0. \tag{21}$$

115. Après avoir rappelé ces définitions et ces propriétés, revenons aux questions que nous avons en vue, et supposons que les quatre coordonnées homogènes x, y, z, t ou u, v, w, p soient exprimées en fonction de deux variables α et β. Si l'on a obtenu, par un procédé quelconque, une équation de la forme (16) à laquelle satisfont ces quatre coordonnées, on peut la ramener, par le procédé que nous avons indiqué, à la forme (20) et l'on reconnaît alors immédiatement que les courbes (ρ), (ρ_1) tracent sur la surface un système conjugué. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Quand on a formé, d'une manière quelconque, une équation de la forme (16) *à laquelle satisfont, soit les quatre coordonnées ponctuelles, soit les quatre coordonnées tangentielles, les caractéristiques de cette équation tracent sur la surface un système conjugué.*

---

[1] On peut même simplifier encore cette équation dès que l'on en connaît des solutions particulières; car soient θ_1, θ_2 deux de ces solutions : si l'on prend comme nouvelles variables indépendantes ρ et le rapport

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \rho'_1,$$

et si l'on pose

$$\theta = \theta_1 \sigma,$$

la fonction σ satisfera à une équation de même forme que l'équation (21)

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \rho_1'^2} + a_1 \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} + b_1 \frac{\partial \sigma}{\partial \rho'_1} + c_1 \sigma = 0.$$

Mais, comme cette équation doit admettre les solutions particulières

$$\sigma = 1, \qquad \sigma = \rho'_1,$$

b_1 et c_1 seront nuls, et elle se réduira à la forme binome

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \rho_1'^2} + a_1 \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} = 0.$$

Le raisonnement précédent montre d'ailleurs que cette forme n'est pas typique et peut être obtenue d'une infinité de manières.

Une équation de la forme (16), contenant cinq coefficients, n'est pas déterminée par la condition d'admettre comme solutions particulières les quatre coordonnées ponctuelles, par exemple. Mais, si l'on ajoute à cette condition celle d'admettre une cinquième solution φ, tous ses coefficients seront parfaitement déterminés, ainsi que le système conjugué formé par ses caractéristiques. En ce sens, on peut dire que, à chaque fonction φ correspond un système conjugué particulier.

Ainsi, supposons que l'on prenne des coordonnées cartésiennes x, y, z. L'équation (16), devant alors admettre la solution $\theta = t = 1$, ne contiendra pas le terme en θ, et tous ses coefficients seront complètement déterminés par la condition qu'elle admette, en même temps que x, y, z, une nouvelle solution particulière φ que nous supposerons exprimée en fonction de x, y, z par exemple. Ramenons l'équation à la forme (20) en prenant comme nouvelles variables les paramètres ρ, ρ_1 du système conjugué formé par ses caractéristiques, et soit alors

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho\, \partial \rho_1} = A \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + B \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1}$$

sa forme nouvelle. On aura

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \rho\, \partial \rho_1} = A \frac{\partial x}{\partial \rho} + B \frac{\partial x}{\partial \rho_1}$$

et les équations analogues en y et z. Si l'on exprime maintenant que φ est une solution, et si l'on élimine $\frac{\partial^2 x}{\partial \rho\, \partial \rho_1}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \rho\, \partial \rho_1}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\, \partial \rho_1}$ au moyen des équations précédentes, on trouvera

$$(22) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \rho_1} \right) + \ldots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \rho_1} = 0.$$

C'est une relation à laquelle devront satisfaire, en chaque point de la surface, les tangentes aux deux familles conjuguées.

Si l'on prend, par exemple, la valeur suivante de φ :

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2,$$

on a

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \rho_1} = 0;$$

le système conjugué est orthogonal, c'est-à-dire qu'il est formé des deux systèmes de lignes de courbure, ce qui nous conduit au théorème suivant :

L'équation de la forme

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2}+B\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}+C\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}+D\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+E\frac{\partial\theta}{\partial\beta}=0,$$

dont les coefficients sont déterminés par la condition qu'elle admette comme solutions particulières

$$x,\quad y,\quad z,\quad x^2+y^2+z^2,$$

x, y, z désignant les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point de la surface exprimées en fonction de deux variables quelconques α et β, admet pour caractéristiques les deux familles de lignes de courbure de la surface.

L'application suivante, qui est très simple, fournit une vérification de cette proposition. Prenons comme variables indépendantes deux des coordonnées x et y. L'équation

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+D\frac{\partial\theta}{\partial x}+E\frac{\partial\theta}{\partial y}=0$$

devant admettre les solutions particulières x et y, on aura d'abord

$$D=E=0;$$

si l'on exprime ensuite qu'elle admet également les deux solutions

$$\theta=z,\qquad \theta=x^2+y^2+z^2,$$

on obtiendra les deux relations

$$Ar+Bs+Ct=0,\qquad A(1+p^2)+Bpq+C(1+q^2)=0,$$

où p, r, r, s, t désignent les dérivées de z, et qui déterminent les rapports de A, B, C. L'équation cherchée est donc

$$\begin{aligned}&[s(1+q^2)-tpq]\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\\&\quad-[r(1+q^2)-t(1+p^2)]\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}+[rpq-s(1+p^2)]\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0,\end{aligned}$$

et l'équation différentielle de ces caractéristiques fournit l'équation bien connue des lignes de courbure.

On peut encore prendre pour φ la valeur suivante :

$$\varphi = \sqrt{f(x, y, z)},$$

où $f(x, y, z)$ désigne un polynome du second degré. Alors l'équation (22) deviendra

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \varphi_1}\right) + \ldots$$
$$- \frac{1}{2f}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi_1}\right) = 0;$$

elle exprime que le système conjugué formé par les caractéristiques de l'équation linéaire est tel que les deux tangentes aux courbes coordonnées passant par chaque point M de la surface soient conjuguées par rapport au cône de sommet M circonscrit à la quadrique définie par l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

Ces caractéristiques sont les lignes de courbure de la surface lorsqu'on substitue, comme il arrive dans la Géométrie Cayleyenne, une quadrique quelconque au cercle de l'infini ([1]).

116. La théorie des lignes asymptotiques d'une surface se rattache par les liens les plus étroits à celle des systèmes conjugués. Si l'on groupe ces lignes en deux familles distinctes, comme on le fait pour les lignes de courbure, on peut dire que chacune des deux familles ainsi obtenues est conjuguée à elle-même. Par conséquent, les lignes asymptotiques se conservent lorsqu'on soumet la surface, soit à une transformation homographique, soit à une transformation par polaires réciproques. Le calcul suivant met d'ailleurs ces résultats en évidence.

Conservons toutes les notations du n° **106**. Soient toujours u, v, w, p les coordonnées du plan tangent; x, y, z, t celles du point

---

([1]) *Voir* l'Ouvrage de l'Auteur : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires*, p. 177 et 232.

de contact. On aura, nous l'avons vu, les égalités

$$(23)\qquad \begin{cases} ux + vy + wz + pt = 0, \\ u\,dx + v\,dy + w\,dz + p\,dt = 0, \\ x\,du + y\,dv + z\,dw + t\,dp = 0, \end{cases}$$

qui se rapportent à un déplacement quelconque effectué sur la surface.

Cherchons l'équation différentielle des lignes asymptotiques. Il faudra écrire que le plan osculateur de ces lignes coïncide avec le plan tangent, c'est-à-dire que le point dont les coordonnées sont

$$x + dx + \frac{1}{2}d^2x, \quad y + dy + \frac{1}{2}d^2y, \quad \ldots$$

se trouve dans le plan tangent. On est ainsi conduit, en tenant compte des égalités précédentes, à l'équation

$$(24)\qquad u\,d^2x + v\,d^2y + w\,d^2z + p\,d^2t = 0.$$

Les identités que l'on obtient en différentiant les deux dernières équations (22) nous permettent de remplacer l'équation précédente par une des deux suivantes :

$$(24')\qquad \begin{cases} du\,dx + dv\,dy + dw\,dz + dp\,dt = 0, \\ x\,d^2u + y\,d^2v + z\,d^2w + t\,d^2p = 0, \end{cases}$$

qui lui sont équivalentes.

La première de ces deux formules donne immédiatement l'équation différentielle des lignes asymptotiques quand la surface est définie par son équation, soit en coordonnées ponctuelles, soit en coordonnées tangentielles; mais les formules précédentes (24) et (24') permettent aussi d'écrire cette équation différentielle si l'on suppose que les coordonnées soient exprimées en fonction de deux variables α et β. Par exemple, si l'on élimine u, v, w, p entre la première équation (23), les deux équations (13) du n° 106 et l'équation (24), on sera conduit à la relation

$$\begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & d^2x \\ y & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & d^2y \\ z & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & d^2z \\ t & \frac{\partial t}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \beta} & d^2t \end{vmatrix} = 0,$$

qui constitue l'équation différentielle cherchée. Si l'on développe et si l'on ordonne par rapport à $d\alpha$, $d\beta$, on trouvera

$$(25)\quad \begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} \\ y & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} \\ z & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} \\ t & \frac{\partial t}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2} \end{vmatrix} d\alpha^2$$

$$+ 2 \begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ y & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ z & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ t & \frac{\partial t}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha\, \partial \beta} \end{vmatrix} d\alpha\, d\beta + \begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} \\ y & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} \\ z & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} \\ t & \frac{\partial t}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 t}{\partial \beta^2} \end{vmatrix} d\beta^2 = 0.$$

L'équation en coordonnées tangentielles est toute semblable et s'obtiendra en remplaçant dans la précédente x, y, z, t par u, v, w, p.

On peut encore obtenir l'équation des lignes asymptotiques par le procédé suivant. Considérons toutes les équations

$$A \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + B \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} + C \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} + D \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + E \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + F \theta = 0,$$

dont x, y, z, t sont des solutions particulières. On aura nécessairement

$$A \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + B \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} + C \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} + D \frac{\partial x}{\partial \alpha} + E \frac{\partial x}{\partial \beta} + F x = 0,$$

$$A \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

$$A \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Ces quatre relations ne suffisent pas à déterminer les coefficients A, B, C, D, E. Mais, si nous voulons que les caractéris-

tiques soient confondues, il faudra qu'elles satisfassent à la fois aux deux équations

$$2A\,d\beta - B\,d\alpha = 0, \qquad 2C\,d\alpha - B\,d\beta = 0.$$

L'élimination de A, B, C, D, E entre ces deux équations et les quatre précédentes donne l'équation différentielle (25) des asymptotiques, qui sont ainsi définies uniquement par leur propriété d'être leurs propres conjuguées.

Nous pourrions déduire de l'équation (25) la proposition déjà démontrée (n° 107) relativement aux systèmes conjugués; car la condition nécessaire et suffisante pour que les deux familles de courbes (α), (β) soient conjuguées, c'est-à-dire pour que les tangentes aux courbes coordonnées qut passent en chaque point de la surface divisent harmoniquement l'angle formé en ce point par les tangentes asymptotiques, est évidemment que le coefficient de $d\alpha\,d\beta$ soit nul dans l'équation différentielle (25). Nous retrouvons ainsi la condition déjà donnée (n° 106).

117. Réciproquement, toutes les fois que l'on connaîtra sur une surface un système conjugué, on pourra écrire l'équation des lignes asymptotiques sous une forme qui ne contiendra plus le rectangle $d\alpha\,d\beta$.

Ici se présente une nouvelle occasion d'appliquer la proposition de M. Kœnigs; car si l'on suppose que la droite D qui figure dans l'énoncé de cette proposition s'éloigne à l'infini parallèlement à un plan fixe, on reconnaîtra que les sections planes, parallèles à ce plan fixe, ont pour conjuguées les courbes de contact des cylindres circonscrits à la surface dont les génératrices rectilignes sont parallèles aux diverses droites de ce plan. Si l'on rapporte les points de la surface à ce système conjugué, l'équation des lignes asymptotiques ne devra contenir que les carrés des différentielles.

Prenons, en effet, un système de coordonnées cartésiennes x, y, z et soient p, q les dérivées de z considérée comme fonction de x et de y. En supposant que le plan fixe ait été choisi pour plan des yz, les variables qu'il faudra adopter seront les suivantes :

$$x = \alpha, \qquad q = \beta. \tag{26}$$

De l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

on déduit

$$d(z - qy) = p\,dx - y\,dq = p\,d\alpha - y\,d\beta.$$

Par conséquent, si l'on pose

$$z - qy = z', \tag{27}$$

et si l'on exprime z' en fonction de α et de β, l'équation précédente nous donnera évidemment

$$p = \frac{\partial z'}{\partial \alpha}, \qquad z = -\frac{\partial z'}{\partial \beta},$$

ou encore

$$p = p', \qquad y = -q', \tag{28}$$

p' et q' désignant les dérivées de z' par rapport à α et à β.

L'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$dp\,dx + dq\,dy = 0$$

deviendra donc, avec les variables α et β,

$$dp'\,d\alpha - dq'\,d\beta = 0, \tag{29}$$

et, si l'on remplace p', q' par leurs expressions $r'\,d\alpha + s'\,d\beta$, $s'\,d\alpha + t'\,d\beta$, en fonction des dérivées secondes r', s', t' de z', elle prendra la forme

$$r'\,d\alpha^2 - t'\,d\beta^2 = 0, \tag{30}$$

qui, comme nous l'avions prévu, ne contient plus le terme en $d\alpha\,d\beta$.

La forme si simple de cette équation permet d'obtenir un grand nombre de surfaces dont on pourra déterminer en termes finis les lignes asymptotiques.

En effet, considérons à la fois une équation différentielle

$$\frac{d\beta^2}{d\alpha^2} = \varphi(\alpha, \beta) \tag{31}$$

et l'équation aux dérivées partielles

$$r' - t'\varphi(\alpha, \beta) = 0. \tag{32}$$

Si l'on sait trouver une fonction z' satisfaisant à cette dernière

équation, on en déduira une surface en remontant à x, y, z par les formules

$$x = \alpha, \qquad y = -q', \qquad z = qy + z' = z' - \beta q'.$$

Or, les lignes asymptotiques de cette surface seraient déterminées par l'équation

$$r' d\alpha^2 - t' d\beta^2 = 0,$$

et, en remplaçant $\frac{r'}{t'}$ par sa valeur déduite de l'équation (32), on retrouvera l'équation (31). Toutes les fois que l'on saura intégrer cette équation différentielle en même temps que l'équation aux dérivées partielles (32), on aura donc des surfaces dont on connaîtra les lignes asymptotiques.

Supposons, par exemple, que l'on prenne pour la fonction φ une constante k^2. Les équations finies des deux systèmes de lignes asymptotiques seront

$$\beta + k\alpha = \text{const.}, \qquad \beta - k\alpha = \text{const.}$$

L'équation (32) aura pour intégrale générale

$$z' = F(\beta + k\alpha) + F_1(\beta - k\alpha),$$

et les coordonnées x, y, z d'un point de la surface seront données en fonction de α et de β par les formules

$$\begin{aligned} x &= \alpha, \\ y &= -F'(\beta + k\alpha) - F'_1(\beta - k\alpha). \\ z &= F - \beta F' + F_1 - \beta F'_1. \end{aligned}$$

118. Voici encore une autre application de la formule (25).

Considérons les surfaces pour lesquelles les coordonnées cartésiennes x, y, z sont définies, en fonction de deux variables ρ, ρ_1, par les expressions suivantes :

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= A(\rho - a)^m(\rho_1 - a)^n, \\ y &= B(\rho - b)^m(\rho_1 - b)^n, \\ z &= C(\rho - c)^m(\rho_1 - c)^n. \end{aligned} \right.$$

Je dis d'abord que les courbes (ρ), (ρ_1) tracent sur ces surfaces un système conjugué. On vérifie, en effet, que les trois coor-

données satisfont à l'équation

$$(34)\qquad (\rho-\rho_1)\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1}+n\frac{\partial\theta}{\partial\rho}-m\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}=0.$$

Il suit de là que, si l'on cherche l'équation des lignes asymptotiques en appliquant la formule (25), cette équation ne contiendra pas de terme en $d\rho\,d\rho_1$. En faisant le calcul, on obtient, en effet, l'équation différentielle

$$(35)\qquad \frac{m(m-1)\,d\rho^2}{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)}=\frac{n(n-1)\,d\rho_1^2}{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)},$$

qui s'intègre dans tous les cas par des quadratures, mais dont l'intégrale est algébrique toutes les fois que le quotient $\frac{m(m-1)}{n(n-1)}$ est le carré d'un nombre commensurable.

Dans le cas particulier où m est égal à n, on peut éliminer ρ, ρ_1 et trouver l'équation de la surface, qui est

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{m}}(b-c)+\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{1}{m}}(c-a)+\left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{1}{m}}(a-b)=(a-b)(b-c)(a-c).$$

On reconnaît les surfaces tétraédrales, dont Lamé a commencé l'étude dans son *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie*, publié en 1818, et qui, depuis, ont été l'objet des travaux de nombreux géomètres, parmi lesquels il faut citer plus particulièrement J. de la Gournerie. L'équation (35) se réduit alors à celle qui a été intégrée par Euler et qui donne l'addition des fonctions elliptiques. Parmi les formes si nombreuses que l'on peut donner à son intégrale, nous choisirons la suivante :

$$\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho_1-a)}{(a-b)(a-c)}}+\sqrt{\beta}\sqrt{\frac{(\rho-b)(\rho_1-b)}{(b-a)(b-c)}}+\sqrt{\gamma}\sqrt{\frac{(\rho-c)(\rho_1-c)}{(c-a)(c-b)}}=0,$$

où α, β, γ désignent trois constantes arbitraires dont la somme est nulle.

En changeant légèrement les notations, cela donne le résultat suivant :

Les lignes asymptotiques de la surface tétraédrale

$$\left(\frac{x}{A}\right)^m+\left(\frac{y}{B}\right)^m+\left(\frac{z}{C}\right)^m=1$$

sont déterminées par l'équation

$$\sqrt{\alpha}\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{m}{2}}+\sqrt{\beta}\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{m}{2}}+\sqrt{\gamma}\left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{m}{2}}=0,$$

où α, β, γ *sont trois constantes arbitraires dont la somme est nulle. Leurs projections sur un des plans coordonnés, le plan des* yz *par exemple, ont pour équation* (¹).

$$\sqrt{-\alpha}=\sqrt{\beta}\left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{m}{2}}-\sqrt{\gamma}\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Les formules (33) déterminent un grand nombre de surfaces différentes; elles conviennent, en particulier, à la surface de Steiner pour $m=n=2$, à la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde pour $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{1}{2}$, ... Nous remarquerons qu'elles conservent la même forme, lorsqu'on substitue les coordonnées tangentielles aux coordonnées ponctuelles. Soit, en effet,

$$uX+vY+wZ-1=0$$

l'équation du plan tangent; u, v, w seront déterminés par les trois équations

$$\begin{aligned} ux+vy+wz&=1,\\ u\frac{\partial x}{\partial\rho}+v\frac{\partial y}{\partial\rho}+w\frac{\partial z}{\partial\rho}&=0,\\ u\frac{\partial x}{\partial\rho_1}+v\frac{\partial y}{\partial\rho_1}+w\frac{\partial z}{\partial\rho_1}&=0,\end{aligned}$$

qui donnent

$$\begin{aligned} u&=\frac{(\rho-a)^{1-m}(\rho_1-a)^{1-n}}{A(a-b)(a-c)},\\ v&=\frac{(\rho-b)^{1-m}(\rho_1-b)^{1-n}}{B(b-a)(b-c)},\\ w&=\frac{(\rho-c)^{1-m}(\rho_1-c)^{1-n}}{C(c-a)(c-b)}.\end{aligned}$$

Si, en particulier, on a

$$m+n=1,$$

(¹) Les lignes asymptotiques des surfaces tétraédrales ont été déterminées en premier lieu par S. Lie [*voir* l'article *Ueber die Reciprocitäts-Verhältnisse des Reye'schen Complexes* (*Göttinger Nachrichten*, 1870, p. 53-66)]. La méthode indiquée ici a été a été développée par l'Auteur dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1re série, t. I, 1890, p. 355.

on obtient des surfaces qui coïncident avec leur polaire réciproque par rapport à la surface du second degré

$$\frac{x^2}{A^2(a-b)(a-c)} + \frac{y^2}{B^2(b-a)(b-c)} + \frac{z^2}{C^2(c-a)(c-b)} = 1.$$

Dans ce cas encore, l'équation différentielle des lignes asymptotiques se réduira à celle d'Euler [1].

119. En déterminant ce sujet, nous indiquerons, entre la théorie des lignes asymptotiques et celle des équations linéaires aux dérivées partielles, des rapprochements analogues à ceux qui font l'objet des n°s 107 et 115. Une famille de lignes asymptotiques pouvant être considérée comme un système qui est à lui-même son propre conjugué, le théorème du n° 115 nous donne immédiatement le suivant :

Si les coordonnées x, y, z, t ou u, v, w, p, considérées comme des fonctions de α et de β, satisfont à une équation linéaire de la forme (16) *pour laquelle les caractéristiques sont confondues, les caractéristiques de cette équation tracent sur la surface une des deux familles de lignes asymptotiques. En particulier, si les coordonnées satisfont à une équation de la forme*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} + D\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + E\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + F\theta = 0, \tag{36}$$

les lignes $\alpha =$ const. *sont asymptotiques.*

Cette dernière partie de la proposition se vérifie immédiatement, à l'inspection de l'équation (25), dans laquelle le coefficient de $d\beta^2$ devient nul, en vertu de l'hypothèse.

Toutes les fois que l'on aura une équation linéaire de la forme (36) et que l'on en connaîtra une des deux familles de lignes indépendantes, le théorème précédent permettra d'obtenir une surface sur laquelle on connaîtra une des deux familles de lignes asymptotiques.

---

[1] On pourra consulter une *Note sur les lignes asymptotiques de la surface des ondes* (*Comptes rendus*, t. XCVII, 1883, p. 1039), où l'on trouvera une généralisation de la méthode qui est employée dans les derniers numéros de ce Chapitre.

CHAPITRE III.

DES SYSTÈMES ORTHOGONAUX ET ISOTHERMES.

Division de la surface en carrés infiniment petits. Elle ne peut se réaliser qu'avec les systèmes isothermes. — Relations entre les systèmes isothermes et les coordonnées symétriques. — Sur toute surface, il existe une infinité de systèmes orthogonaux et isothermes. La connaissance d'un seul de ces systèmes entraîne celle de tous les autres. — Problème des Cartes géographiques. Sa solution pour toute surface de révolution et, en particulier, pour la sphère. — Projection de Mercator. — Projection stéréographique. — Surfaces du second degré. Leurs lignes de courbure forment un système isotherme pour lequel l'élément linéaire a une forme particulière qui se retrouvera dans la théorie des lignes géodésiques. — Différents moyens de faire la carte d'une portion d'ellipsoïde. — Propriétés générales des systèmes isothermes. — On peut se borner à étudier dans le plan tout ce qui concerne la substitution d'un système isotherme à un autre. — Relations diverses entre les fonctions d'une variable complexe et les systèmes isothermes. — Courbes d'égale partie réelle et d'égale partie imaginaire de la fonction. — Courbes d'égal module et d'égal argument. — Définition de quelques systèmes isothermes employés en Physique mathématique. — Cassiniennes. — Ovales de Descartes. — Détermination de tous les systèmes isothermes comprenant une famille de cercles. Dans ce cas la famille isotherme conjuguée est aussi composée de cercles; et les cercles de chaque famille ont même axe radical. On peut obtenir tous ces systèmes isothermes en appliquant l'inversion, soit au système de coordonnées rectilignes, soit au système de coordonnées polaires.

---

120. Après avoir donné les propriétés les plus simples des systèmes conjugués, nous allons considérer les systèmes orthogonaux et, plus particulièrement, les systèmes à la fois orthogonaux et isothermes. Nous recherchons d'abord tous les systèmes de coordonnées orthogonales permettant de diviser la surface en carrés infiniment petits.

Soit

$$ds^2 = A^2\,du^2 + C^2\,dv^2$$

l'expression de l'élément linéaire; A et C seront des fonctions données de u et de v

$$A = f(u, v). \qquad C = \varphi(u, v).$$

Considérons (*fig.* 7) quatre lignes coordonnées de chaque famille : (A), (A_1), (B), (B_1), correspondantes aux valeurs

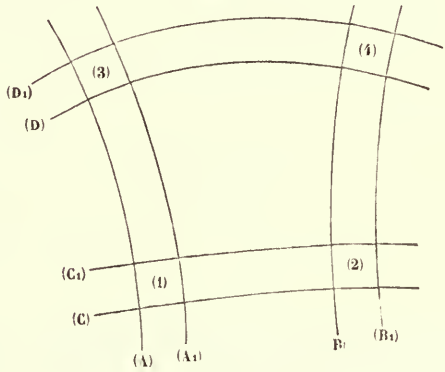
$$u_0, \quad u_0 + du_0, \quad u, \quad u + du$$

de u, et (C), (C_1), (D), (D_1), correspondantes aux valeurs

$$v_0, \quad v_0 + dv_0, \quad v, \quad v + dv$$

de v. Elles déterminent évidemment quatre rectangles infiniment petits (1), (2), (3), (4). Cherchons s'il est possible de disposer de

Fig. 7.



du, dv, du_0, dv_0, de telle manière que ces rectangles soient tous des carrés. La considération de chacun d'eux nous donnera les relations

$$\begin{aligned} f(u_0, v_0)\, du_0 &= \varphi(u_0, v_0)\, dv_0, \\ \varphi(u_0, v)\, dv &= f(u_0, v)\, du_0, \\ \varphi(u, v_0)\, dv_0 &= f(u, v_0)\, du, \\ f(u, v)\, du &= \varphi(u, v)\, dv. \end{aligned}$$

Ces équations, au nombre de quatre, ne contiennent que trois inconnues, les rapports de du, dv, du_0, dv_0. L'élimination de ces rapports conduira à une condition, que l'on obtient d'ailleurs immédiatement en multipliant membre à membre toutes les équations. On trouve ainsi

$$\frac{f(u_0, v_0)\, f(u, v)}{\varphi(u_0, v_0)\, \varphi(u, v)} = \frac{f(u, v_0)\, f(u_0, v)}{\varphi(u, v_0)\, \varphi(u_0, v)}.$$

Donnons, dans cette relation, à u_0 et à v_0 des valeurs numériques quelconques. Elle prend la forme

$$\frac{f(u, v)}{\varphi(u, v)} = \frac{\theta(u)}{\theta_1(v)},$$

et, par conséquent, on devra avoir

$$A = f(u, v) = \lambda\,\theta(u),$$
$$C = \varphi(u, v) = \lambda\,\theta_1(v),$$

λ désignant une fonction quelconque de u et de v.

Si l'on substitue ces valeurs de A et de C dans l'élément linéaire, on obtient la nouvelle expression

$$ds^2 = \lambda^2[\theta^2(u)\,du^2 + \theta_1^2(v)\,dv^2]$$

ou, plus simplement,

$$ds^2 = \lambda^2(du_1^2 + dv_1^2), \tag{1}$$

en posant

$$u_1 = \int \theta(u)\,du, \qquad v_1 = \int \theta_1(v)\,dv.$$

Réciproquement, toutes les fois que l'élément linéaire pourra être ramené à la forme précédente, la surface nous le savons (n° 65), sera divisible en carrés infiniment petits par les lignes coordonnées.

121. Nous avons déjà rencontré plusieurs surfaces sur lesquelles il existe des systèmes orthogonaux et isothermes : nous allons maintenant démontrer que l'élément linéaire d'une surface quelconque peut, d'une infinité de manières, être ramené à la forme (1). Pour comprendre la méthode suivante, il suffit de remarquer que, si l'on substitue à u_1, v_1 les variables complexes

$$\alpha = u_1 + iv_1, \qquad \beta = u_1 - iv_1,$$

la formule (1) se présente sous la forme

$$ds^2 = \lambda^2\,d\alpha\,d\beta. \tag{2}$$

Cela posé, considérons une surface quelconque dont l'élément

linéaire soit donné sous la forme la plus générale

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Posons, pour abréger,

$$H^2 = EG - F^2,$$

et excluons le cas, qui, d'ailleurs, ne peut se présenter pour des surfaces réelles, où $EG - F^2$ serait nul et où l'élément linéaire serait un carré parfait [1]. On pourra décomposer l'élément

---

[1] L'élément linéaire n'est un carré parfait que dans le cas où la surface est une développable circonscrite au cercle imaginaire de l'infini. En effet, supposons que l'on ait

$$ds^2 = (m\,du + n\,dv)^2.$$

Soit $\frac{1}{h}$ le facteur qui rend

$$\frac{m\,du + n\,dv}{h}$$

une différentielle exacte.

On pourra poser

$$ds^2 = h^2\,d\beta^2 : \tag{1}$$

h sera une fonction de β et d'une seconde coordonnée curviligne α permettant de définir, avec β, les différents points de la surface. Les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point quelconque de la surface devront satisfaire aux deux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 = 0,\\ &\frac{\partial x}{\partial \alpha}\,\frac{\partial x}{\partial} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\,\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\,\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

En différentiant la première par rapport à α et à β, on obtient

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial \alpha}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\,\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = 0,\\ &\frac{\partial x}{\partial \alpha}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\,\frac{\partial^3 y}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Si l'on différentie la seconde des formules (2) par rapport à α, on aura, en tenant compte de la seconde équation (3),

$$\frac{\partial x}{\partial \beta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial y}{\partial \beta}\,\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = 0. \tag{4}$$

La comparaison des équations précédentes nous montre que l'on aura deux solu-

linéaire en deux facteurs et écrire

$$ds^2 = \left(\sqrt{E}\,du + \frac{F + iH}{\sqrt{E}}\,dv\right)\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F - iH}{\sqrt{E}}\,dv\right).$$

---

tions différentes des équations homogènes en u, v, w

$$u\frac{\partial x}{\partial \alpha} + v\frac{\partial y}{\partial \alpha} + w\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

$$u\frac{\partial x}{\partial \beta} + v\frac{\partial y}{\partial \beta} + w\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0,$$

si l'on prend, soit

$$u = \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial \alpha},$$

soit

$$u = \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}, \qquad v = \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}, \qquad w = \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}.$$

On doit donc avoir

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}};$$

d'où l'on déduit, en intégrant,

$$(5) \qquad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}}{f(\beta)} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}}{f_1(\beta)} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}}{f_2(\beta)}.$$

Si l'on désigne par $\dfrac{\partial \alpha'}{\partial \alpha}$ la valeur commune de ces rapports, on aura

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= f(\beta)\alpha' + \varphi(\beta),\\ y &= f_1(\beta)\alpha' + \varphi_1(\beta),\\ z &= f_2(\beta)\alpha' + \varphi_2(\beta).\end{aligned}\right.$$

Écrivons que ces valeurs de x, y, z satisfont aux équations (2), nous trouverons

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} &f^2(\beta) + f_1^2(\beta) + f_2^2(\beta) = 0,\\ &f(\beta)\varphi'(\beta) + f_1(\beta)\varphi_1'(\beta) + f_2(\beta)\varphi_2'(\beta) = 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on ajoute les équations (6), après les avoir multipliées par $f(\beta)$, $f_1(\beta)$, $f_2(\beta)$ respectivement, on aura

$$(8) \qquad f(\beta)x + f_1(\beta)y + f_2(\beta)z = f\varphi + f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2.$$

Si on les multiplie par f', f_1', f_2', on trouvera de même, en les ajoutant,

$$xf'(\beta) + yf_1'(\beta) + zf_2'(\beta) = \varphi f' + \varphi_1 f_1' + \varphi_2 f_2',$$

ou, en tenant compte de la seconde équation (7),

$$(9) \qquad xf'(\beta) + yf_1'(\beta) + zf_2'(\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta}(\varphi f + \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2).$$

L'équation (9) s'obtient en prenant la dérivée de l'équation (8) par rapport à β

Si nous égalons à zéro successivement les deux facteurs, nous aurons deux équations différentielles. Soient

$$\varphi(u, v) = \alpha, \qquad \psi(u, v) = \beta$$

La surface est donc l'enveloppe du plan défini par l'équation (8). Or, d'après la première des formules (7), ce plan est tangent au cercle de l'infini.

Les seules surfaces pour lesquelles l'élément linéaire soit un carré parfait sont donc les développables circonscrites au cercle de l'infini. Les arêtes de rebroussement de ces développables sont des courbes dont toutes les tangentes rencontrent le cercle à l'infini et qui satisfont à l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Mais il y a lieu de faire ici une distinction entre le plan isotrope, le cône isotrope et la développable isotrope la plus générale formée par les tangentes à une courbe isotrope.

Pour le plan isotrope, l'élément linéaire est le carré d'*une différentielle exacte*. Si l'on prend, par exemple, le plan défini par l'équation

$$x + iy = 0,$$

on a

$$ds^2 = dz^2. \tag{10}$$

Pour le cône isotrope, qui, nous l'avons vu, peut toujours être défini par les équations

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = i(u^2 + v^2), \qquad z = 2uv,$$

on a

$$ds^2 = 4(u\,dv - v\,du)^2. \tag{11}$$

Enfin, pour la développable isotrope engendrée par les tangentes à une courbe isotrope, on peut définir un point de cette courbe par les formules

$$x_1 = \int (1 - \alpha^2) f(\alpha)\,d\alpha, \qquad y_1 = i\int (1 + \alpha^2) f(\alpha)\,d\alpha, \qquad z_1 = 2\int \alpha f(\alpha)\,d\alpha,$$

$f(\alpha)$ désignant une fonction arbitraire de α. Un point de la surface sera donné par les formules

$$x = x_1 + (1 - \alpha^2)\lambda, \qquad y = y_1 + i(1 + \alpha^2)\lambda, \qquad z = z_1 + 2\alpha\lambda,$$

où λ est une nouvelle arbitraire, et qui donnent

$$ds^2 = 4\lambda^2 d\alpha^2. \tag{12}$$

On voit que les formules (11) et (12) peuvent toujours être ramenées l'une à l'autre par la substitution

$$\alpha = F\left(\frac{v}{u}\right), \qquad \lambda = \pm \frac{u^2}{F'\left(\frac{v}{u}\right)},$$

où F désigne une fonction arbitraire. Ainsi, toute développable isotrope non plane est applicable d'une infinité de manières sur le cône isotrope et, par conséquent, sur elle-même, ses génératrices rectilignes demeurant rectilignes.

Au contraire, le plan isotrope ne peut être appliqué que sur un autre plan isotrope. *C'est donc une surface rigide, qu'il est impossible de déformer.*

les intégrales de ces équations; elles définiront deux familles de lignes imaginaires tracées sur la surface et dont l'arc sera égal à zéro. On aura, comme on sait,

$$(3)\qquad \begin{cases} d\alpha = \mu\left(\sqrt{E}\,du + \dfrac{F + iH}{\sqrt{E}}\,dv\right), \\ d\beta = \nu\left(\sqrt{E}\,du + \dfrac{F - iH}{\sqrt{E}}\,dv\right), \end{cases}$$

μ et ν étant des facteurs convenablement choisis; α, β sont évidemment des fonctions de u et de v indépendantes l'une de l'autre car leur déterminant fonctionnel

$$-2\mu\nu iH$$

est différent de zéro. Si on les prend comme nouvelles variables, la multiplication des deux formules précédentes nous donnera, pour l'élément linéaire de la surface, l'expression

$$ds^2 = \frac{1}{\mu\nu}\,d\alpha\,d\beta$$

ou, en changeant les notations,

$$(4)\qquad ds^2 = \lambda^2\,d\alpha\,d\beta.$$

Nous aurons souvent à employer le système des variables α, β, qui ont reçu le nom de *coordonnées symétriques*. Dans le cas d'un élément linéaire réel, on peut évidemment faire en sorte que les variables α et β soient imaginaires conjuguées, ainsi que les facteurs μ et ν. Supposons, par exemple, que l'on ait obtenu des fonctions α et μ vérifiant la première équation (3); si l'on change i en $-i$, on voit que les imaginaires conjuguées de α et de μ donneront une solution de la seconde équation.

Supposons que l'élément linéaire ait été mis de deux manières différentes sous la forme (4) et que l'on ait à la fois

$$(5)\qquad ds^2 = \lambda^2\,d\alpha\,d\beta = \lambda'^2\,d\alpha'\,d\beta'.$$

Nous allons montrer que cette équation ne peut avoir lieu que si α', β' dépendent respectivement d'une seule des variables α, β.

En effet, si l'on suppose α', β' exprimés en fonction des variables indépendantes α, β et si l'on remplace les différentielles $d\alpha'$, $d\beta'$

par leurs valeurs

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}d\beta, \qquad \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial\beta'}{\partial\beta}d\beta,$$

l'identité (5) nous donnera les trois équations

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\frac{\partial\beta'}{\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\frac{\partial\beta'}{\partial\beta} + \frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2}.$$

La première ne peut avoir lieu que si l'une des variables α' et β' dépend de la seule variable α, et, en tenant compte de la seconde, on a les deux solutions

$$\alpha' = \mathcal{F}(\alpha), \qquad \beta' = \mathcal{F}_1(\beta)$$

ou

$$\alpha' = \mathcal{F}(\beta), \qquad \beta' = \mathcal{F}_1(\alpha).$$

Nous obtenons donc le théorème suivant :

Lorqu'on aura mis l'élément linéaire sous la forme

$$ds^2 = \lambda^2\, d\alpha\, d\beta,$$

on ne pourra conserver cette forme de l'élément linéaire que si l'on substitue aux variables α, β les variables α', β' déterminées par l'un ou l'autre des systèmes

$$1^0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha' = \mathcal{F}(\alpha), \qquad \beta' = \mathcal{F}_1(\beta);$$
$$2^0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha' = \mathcal{F}(\beta), \qquad \beta' = \mathcal{F}_1(\alpha).$$

Des coordonnées symétriques on passe immédiatement aux systèmes isothermes. Reprenons, en effet, la formule (4) et remplaçons α, β par les expressions suivantes :

$$\alpha = u + iv, \qquad \beta = u - iv;$$

elle donnera

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2). \tag{6}$$

C'est la forme de l'élément linéaire qui caractérise les systèmes isothermes. En appliquant à ces systèmes les propositions déjà démontrées pour les coordonnées symétriques, on peut énoncer les théorèmes suivants :

1° *Sur toute surface il existe une infinité de systèmes ortho-*

gonaux et isothermes. On les obtient par l'intégration complète de l'équation

$$ds^2 = 0.$$

2° *Lorsqu'on a obtenu un système isotherme* (u, v), *on passe à tout autre système isotherme* (u', v') *par l'emploi de l'un ou l'autre des systèmes de formules*

1°

$$(7) \qquad \begin{cases} u' + iv' = f(u + iv), \\ u' - iv' = f_1(u - iv); \end{cases}$$

2°

$$(8) \qquad \begin{cases} u' + iv' = f(u - iv), \\ u' - iv' = f_1(u + iv), \end{cases}$$

et, par conséquent, la connaissance d'un seul système orthogonal et isotherme tracé sur la surface entraîne celle de tous les autres systèmes semblables tracés sur la même surface.

122. La théorie des coordonnées symétriques et des systèmes isothermes, qu'on peut faire remonter au premier Mémoire [1] de Gauss, publié en 1825, doit son origine à l'étude d'un belle question de Géométrie pratique, celle du tracé géographique d'une surface sur une autre, et plus particulièrement sur le plan. La théorie des Cartes géographiques avait été l'objet d'importants travaux de Lambert, d'Euler, de Lagrange. Comme il est impossible (n° 72) de représenter une portion de la sphère, ou de toute autre surface non développable sur le plan, de manière à conserver les longueurs des arcs, on s'était surtout attaché aux modes de représentation qui conservent les angles, tels que la projection stéréographique, la projection de Mercator. Ces modes de représentation ont la propriété fondamentale d'établir la similitude des éléments infiniment petits qui se correspondent sur les deux surfaces. Si l'on considère, en effet, deux triangles correspondants infiniment petits, on pourra les assimiler à deux triangles rectilignes, et, comme ils seront équiangles, leurs côtés homologues

---

[1] Gauss, *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird* (*Œuvres complètes*, t. IV, p. 193).

seront proportionnels. Réciproquement, si deux surfaces se correspondent point par point, de telle manière que leurs éléments linéaires soient liés par la relation

$$ds^2 = \lambda^2 ds'^2,$$

et si l'on considère, sur l'une d'elles, une région assez petite pour que l'on puisse y faire abstraction de la variation de λ, les lignes correspondantes tracées sur les deux surfaces seront dans un rapport constant; par conséquent, deux triangles correspondants infiniment petits seront semblables, et les angles se conserveront quand on passera d'une surface à l'autre.

On peut établir cette proposition d'une manière plus rigoureuse en cherchant l'angle de deux courbes tracées sur une surface quelconque. Supposons que l'on se déplace à partir d'un point de la surface dans deux directions différentes, et désignons par les caractéristiques d, δ les différentielles relatives à ces deux déplacements. Soit

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2$$

l'expression de l'élément linéaire. Les formules

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \qquad \delta x = \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \delta v,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

nous donneront

$$(9) \quad dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = \mathrm{E}\, du\,\delta u + \mathrm{F}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{G}\, dv\,\delta v;$$

et, par conséquent, l'angle V des deux directions sera déterminé par la formule

$$(10) \quad \cos \mathrm{V} = \frac{\mathrm{E}\, du\,\delta u + \mathrm{F}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{G}\, dv\,\delta v}{\sqrt{\mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2}\sqrt{\mathrm{E}\,\delta u^2 + 2\mathrm{F}\,\delta u\,\delta v + \mathrm{G}\,\delta v^2}}.$$

On voit qu'il dépend seulement des rapports de E, F, G et demeure le même quand l'élément linéaire tout entier est multiplié par une fonction quelconque de u et de v.

Comme l'élément linéaire du plan est réductible à la forme

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

le problème du tracé géographique d'une surface quelconque sur le plan peut être formulé comme il suit :

Mettre l'élément linéaire de la surface sous la forme

$$ds^2 = \lambda^2 (d\alpha^2 + d\beta^2),$$

c'est-à-dire déterminer sur la surface un système orthogonal et isotherme.

Et il résulte des développements précédents que, lorsqu'on connaîtra une solution de ce problème, on pourra obtenir toutes les autres sans aucune intégration.

Nous avons vu que, sur toute surface de révolution, les méridiens et les parallèles forment un système isotherme. On saura donc résoudre le problème pour toutes les surfaces de révolution.

Considérons, par exemple, la sphère pour laquelle on a

$$(11) \qquad ds^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2 = \sin^2 u \left(\frac{du^2}{\sin^2 u} + dv^2\right).$$

Posons

$$\int \frac{du}{\sin u} = kx = \log \operatorname{tang} \frac{u}{2}, \qquad v = ky,$$

l'élément linéaire deviendra

$$(12) \qquad ds^2 = \frac{4k^2 e^{2kx}}{(1 + e^{2kx})^2} (dx^2 + dy^2).$$

Si l'on fait correspondre au point (u, v) de la sphère le point du plan dont les coordonnées rectangulaires sont x, y, on obtiendra un mode de tracé dans lequel les méridiens faisant des angles égaux seront représentés par des droites parallèles équidistantes, et les parallèles par des droites perpendiculaires aux précédentes. C'est la projection de Mercator. Elle offre l'avantage, autrefois très apprécié pour les Cartes marines, de faire correspondre aux loxodromies (courbes qui coupent tous les méridiens sous un angle constant) des droites de la carte.

Si l'on pose

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{d\rho}{\rho}, \qquad v = \omega, \qquad \rho = k \operatorname{tang} \frac{u}{2},$$

l'élément linéaire deviendra

$$ds^2 = \frac{4k^2}{(\rho^2 + k^2)^2} (d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2).$$

En faisant correspondre au point (u, v) le point du plan dont les coordonnées polaires sont ρ et ω, on aura un tracé géographique dans lequel, aux méridiens correspondront des droites concourantes, et aux parallèles les cercles concentriques du plan coupant toutes ces droites à angle droit. C'est le tracé que l'on obtiendra en faisant la projection stéréographique de la sphère d'un point de vue placé au pôle.

123. Considérons maintenant une surface du second degré représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1. \tag{13}$$

On peut la regarder comme une surface tétraédrale (n° 118) et prendre, pour les coordonnées x, y, z d'un quelconque de ses points, les expressions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{a(a-\rho)(a-\rho_1)}{(a-b)(a-c)}}, \\ y &= \sqrt{\frac{b(b-\rho)(b-\rho_1)}{(b-a)(b-c)}}, \\ z &= \sqrt{\frac{c(c-\rho)(c-\rho_1)}{(c-a)(c-b)}}. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Nous savons déjà que les courbes (ρ), (ρ_1) forment un système conjugué. Ce système est aussi orthogonal, car les formules précédentes permettent de vérifier l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \rho_1} = 0.$$

Le système (ρ, ρ_1) étant à la fois orthogonal et conjugué, est donc formé des lignes de courbure de la surface. Les formules (14) nous permettent aussi de calculer l'élément linéaire, dont on obtient l'expression suivante :

$$ds^2 = \frac{\rho - \rho_1}{4}\left[\frac{\rho\, d\rho^2}{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)} - \frac{\rho_1\, d\rho_1^2}{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)}\right]. \tag{15}$$

Posons

$$\frac{\sqrt{\rho}\, d\rho}{\sqrt{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)}} = d\alpha, \qquad \frac{\sqrt{-\rho_1}\, d\rho_1}{\sqrt{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)}} = d\beta,$$

la formule (15) deviendra

$$(16)\qquad ds^2 = \frac{\rho - \rho_1}{4}(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

On a donc un système orthogonal et isotherme; son emploi permettra de faire la carte de toute région tracée sur la surface du second degré [1].

Il résulte du calcul précédent que les surfaces du second degré sont divisibles en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure. Cette propriété appartient aussi, nous l'avons déjà vu, aux surfaces de révolution.

Remarquons encore une propriété essentielle de l'élément linéaire des surfaces du second degré. Dans la formule (16), ρ est une fonction de α et ρ_1 une fonction de β. L'élément linéaire appartient donc au type suivant :

$$(17)\qquad ds^2 = [f(\alpha) - F(\beta)](d\alpha^2 + d\beta^2),$$

qui se présentera, sous sa forme la plus générale, dans la théorie des lignes géodésiques.

La théorie des surfaces homofocales du second degré conduit à un moyen, plus élégant que le précédent, d'effectuer le tracé géographique d'une surface du second degré.

Soit

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0 \qquad (a > b > c > 0)$$

l'équation d'un système de surfaces homofocales. Il passera trois surfaces du système par un point quelconque de l'espace; l'une sera un ellipsoïde, qui correspondra à une valeur ρ_2 de λ inférieure à c, l'autre un hyperboloïde à une nappe, correspondant à une valeur ρ_1 de λ comprise entre b et c, et la troisième un hyperboloïde à deux nappes, qui correspondra à une valeur ρ de λ comprise entre a et b. Par conséquent, ρ, ρ_1, ρ_2 constituent un système de coordonnées curvilignes, les *coordonnées elliptiques* de Lamé, propre à définir tout point de l'espace. On sait que ce système est

---

[1] On pourra lire, au sujet de cette représentation, le Mémoire de Jacobi, *Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf einer Ebene, bei welcher die kleinstein Theile ähnlich bleiben* (*Journal de Crelle*, t. LIX, 1861, p. 74).

orthogonal; l'expression de l'élément linéaire de l'espace est la suivante :

$$(18)\quad ds^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{f(\rho)}d\rho^2 + \frac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}{f(\rho_1)}d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}{f(\rho_2)}d\rho_2^2\right],$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$f(\rho) = (a-\rho)(b-\rho)(c-\rho).$$

En y faisant $\rho_2 = 0$, on retrouverait la formule (15).

Le plan $z = 0$ correspondrait à l'hypothèse $\rho_2 = c$.

D'après cela, considérons l'un quelconque des ellipsoïdes du système orthogonal et faisons correspondre à un point quelconque (ρ, ρ_1) de cet ellipsoïde le point du plan des xy qui a pour coordonnées elliptiques ρ', ρ'_1 les quantités définies par les deux équations suivantes :

$$\int_b^{\rho'} \frac{d\rho'}{\sqrt{(a-\rho')(\rho'-b)}} = \int_b^{\rho} \frac{\sqrt{\rho-\rho_2}\,d\rho}{\sqrt{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)}},$$

$$\int_c^{\rho_1} \frac{d\rho'_1}{\sqrt{(a-\rho'_1)(b-\rho'_1)}} = \int_c^{\rho_1} \frac{\sqrt{\rho_1-\rho_2}\,d\rho}{\sqrt{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)}}.$$

Il résulte de la formule (18) que les éléments linéaires des deux surfaces sont proportionnels; ds, ds' désignant les arcs correspondants sur l'ellipsoïde et sur le plan, on aura

$$\frac{ds^2}{ds'^2} = \frac{\rho-\rho_1}{\rho'-\rho'_1}.$$

La correspondance établie donne donc un nouveau tracé géographique de l'ellipsoïde sur le plan, tracé que l'on peut caractériser en remarquant que, si l'ellipsoïde s'aplatit en demeurant constamment homofocal à lui-même, la région représentée vient, à la limite, se confondre avec la carte elle-même.

124. Revenons aux propriétés générales des systèmes isothermes. Si l'on connaît, sur une surface quelconque, un seul de ces systèmes, on pourra tracer sur cette surface, non seulement les autres systèmes isothermes, mais encore une infinité de systèmes

orthogonaux. En effet, la connaissance d'un seul système isotherme permet de faire la carte de la surface sur le plan avec conservation des angles et similitude des éléments infiniments petits. Par conséquent, à tout système orthogonal, tracé dans le plan, correspondra, sur la surface, un système orthogonal. Si, de plus, ce système est isotherme et divise le plan en carrés infiniment petits, cette propriété appartiendra au système correspondant de la surface, qui sera, par conséquent, isotherme.

Il résulte de là que nous pouvons nous borner à étudier sur une surface plane les questions relatives à la substitution d'un système isotherme à un autre. Désignons par X, Y les coordonnées rectangulaires d'un point du plan et posons

$$Z = X + iY, \qquad Z' = X - iY.$$

L'élément linéaire du plan aura pour expression

$$dS^2 = dZ\,dZ', \tag{19}$$

et, si l'on désigne de même par z, z' les variables complexes

$$z = x + iy, \qquad z' = x - iy,$$

les formules qui permettent de passer au système isotherme le plus général seront

$$Z = f(z), \qquad Z' = f_1(z') \tag{20}$$

ou

$$Z = f(z'), \qquad Z' = f_1(z); \tag{21}$$

si l'on veut que les nouvelles variables x, y soient réelles en même temps que les anciennes, il faudra évidemment que les fonctions f, f_1 soient, dans les deux cas, imaginaires conjuguées. Pour étudier géométriquement les formules précédentes, nous les considérerons comme définissant un mode de transformation qui fera correspondre à un point $m(x, y)$ un autre point M (X, Y) du même plan.

Nous savons déjà que les deux modes de transformation définis par les formules (20) ou (21) conservent les angles et assurent la similitude des éléments infiniment petits correspondants. Mais il

y a ici une distinction essentielle à faire entre les deux systèmes de formules.

Supposons que le point m décrive une certaine courbe; soient ds la différentielle de l'arc de cette courbe et ω l'angle de sa tangente avec l'axe des x. Les formules

$$dx = ds \cos\omega, \qquad dy = ds \sin\omega$$

nous donnent

$$(22) \qquad dz = ds\, e^{i\omega}, \qquad dz' = ds\, e^{-i\omega}.$$

Désignons, de même, par $d\mathrm{S}$ et Ω les quantités analogues relatives à la courbe décrite par le point M (X, Y). On aura également

$$(23) \qquad d\mathrm{Z} = d\mathrm{S}\, e^{i\Omega}, \qquad d\mathrm{Z}' = d\mathrm{S}\, e^{-i\Omega}.$$

Reportons-nous maintenant aux formules du premier système (20). Elles donnent

$$d\mathrm{Z} = f'(z)\, dz, \qquad d\mathrm{Z}' = f'_1(z')\, dz';$$

d'où l'on déduit, en multipliant,

$$(24) \qquad d\mathrm{S}^2 = f'(z) f'_1(z')\, ds^2,$$

et, en divisant,

$$(25) \qquad e^{2i\Omega} = \frac{f'(z)}{f'_1(z')}\, e^{2i\omega}.$$

Donc, si l'on considère deux points correspondants m, M des deux figures, les tangentes en ces points à deux courbes correspondantes quelconques font entre elles un angle constant; par suite, à deux courbes de la première figure se croisant en m correspondront deux courbes de la seconde se croisant en M et y faisant un angle, non seulement égal à celui des deux premières courbes, mais ayant aussi le même sens de rotation. Si le point de la première figure décrit une petite courbe fermée autour du point m, le point correspondant de la seconde figure décrira aussi une courbe fermée autour de M, et, de plus, les deux courbes correspondantes seront parcourues dans le même sens.

Il n'en est plus de même si l'on emploie les formules (21); en effet, la transformation qu'elles définissent se ramène à celle qui correspond aux formules (20), précédée ou suivie d'une rotation

de 180° autour de l'axe des x; par conséquent, dans cette seconde transformation, les sens de rotation de tous les angles et de tous les parcours seront changés.

Contentons-nous d'étudier les formules (20) et considérons seulement les systèmes isothermes réels, c'est-à-dire ceux pour lesquels les fonctions f, f_1 sont imaginaires conjuguées. Nous pourrons dire alors qu'à toute fonction de l'argument complexe z correspond un système isotherme, et nous aurons la proposition suivante, dont on fait un fréquent usage :

Les courbes planes qu'on obtient en égalant à des constantes la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction quelconque $f(z)$ de la variable complexe $z = x + yi$ forment un système orthogonal et isotherme. De plus, la formule

$$Z = f(z),$$

qui donne deux équations réelles, définit un mode de transformation avec conservation de la grandeur et du sens de rotation des angles.

Considérons, par exemple, la fonction

$$f(z) = \frac{k^2}{z}; \tag{26}$$

on aura

$$X + Yi = k^2 \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

ou

$$X = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, \qquad Y = \frac{-k^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Ce sont les formules de la transformation par rayons vecteurs réciproques où l'on aurait changé y en $-y$. Cette dernière transformation serait définie par la relation

$$Z = \frac{k^2}{z},$$

qui se rattache aux formules (21); et elle appartient, par conséquent, comme l'indique le nom d'*inversion* sous lequel elle est souvent désignée, au groupe général des représentations conformes qui changent le sens de rotation des angles et des parcours.

La transformation définie par la formule

$$Z = \frac{az + b}{cz + d},$$

où a, b, c, d sont des constantes, se rapproche de l'inversion en ce qu'elle fait correspondre un cercle à un cercle; mais elle s'en distingue en ce qu'elle conserve les sens de rotation des angles et des parcours, c'est-à-dire assure la similitude directe des éléments infiniment petits. Cette transformation joue un rôle important dans les recherches relatives à la théorie moderne des fonctions. Pour la distinguer de l'inversion, nous lui donnerons le nom de *transformation circulaire*. Elle se ramène, d'ailleurs, à celle qui est définie par la formule (26), précédée et suivie d'une translation; elle peut aussi être remplacée par des inversions en nombre pair.

Le théorème général que nous avons énoncé peut prendre une forme nouvelle très importante. Supposons qu'on l'applique, non plus à $f(z)$, mais à $\log f(z)$. La partie réelle de ce logarithme est le logarithme du module de $f(z)$ et la partie imaginaire l'argument de $f(z)$. On obtient donc cette nouvelle proposition :

Étant donnée une fonction quelconque de la variable complexe z, les courbes d'égal module et d'égal argument de cette fonction forment un système orthogonal et isotherme.

125. Les systèmes orthogonaux et isothermes définis par les deux théorèmes qui précèdent jouent en Physique mathématique un rôle très important. J'indiquerai les applications suivantes.

Soient A_k et M deux points, qui correspondent aux valeurs a_k et z de la variable complexe. On a

$$z - a_k = \rho_k e^{i\theta_k},$$

ρ_k désignant la longueur du segment $A_k M$ et θ_k l'angle que fait ce segment avec l'axe des x. De même, pour un point B_k correspondant à la valeur b_k de la variable complexe, on a

$$z - b_k = \rho'_k e^{i\theta'_k},$$

ρ'_k désignant la longueur de $B_k M$ et θ'_k l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe des x.

Si donc on considère la fonction

$$f(z) = \prod_1^n \frac{z - a_k}{z - b_k},$$

les courbes d'égal module auront pour équation

$$\frac{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n}{\rho'_1 \rho'_2 \ldots \rho'_n} = \text{const.}$$

et les courbes d'égal argument

$$\theta_1 - \theta'_1 + \theta_2 - \theta'_2 + \ldots + \theta_n - \theta'_n = \text{const.}$$

De là le théorème suivant qu'il serait aisé de généraliser :

Si l'on considère deux groupes de n pôles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *et* $B_1, B_2, \ldots, B_n$, *les courbes lieux des points pour lesquels le produit des distances aux premiers pôles* A_i *est proportionnel au produit des distances aux dipôles* B_i *ont pour trajectoires orthogonales les courbes lieux des points d'où l'on voit les n segments* A_iB_i *sous des angles dont la somme est constante* (1).

Dans le cas où les deux groupes ne contiendront pas le même nombre de pôles, les théorèmes seront encore applicables, pourvu que l'on introduise, dans le groupe qui contient le moins de points, un pôle multiple situé à l'infini dans une direction déterminée, mais quelconque.

Par exemple, les cassiniennes, lieux des points tels que le produit de leurs distances à deux foyers fixes F, F′ soit constant, admettent pour trajectoires orthogonales les courbes lieux des points M tels que la somme des angles formés par les rayons vecteurs MF, MF′ avec l'axe des x soit constante. Ces dernières courbes sont des hyperboles équilatères passant par les foyers F, F′.

Il suffit, pour le démontrer, de considérer les courbes d'égal module et d'égal argument, relatives à la fonction

$$z^2 - c^2.$$

---

(1) Les deux séries de courbes qui figurent dans ce théorème ont des propriétés qui les rapprochent du cercle. *Voir* à ce sujet l'Ouvrage de l'Auteur : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 66 et suiv.

126. Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{c^2 - z^2}},$$

où c désigne une constante réelle et positive, et cherchons le système orthogonal et isotherme formé par les courbes sur lesquelles la partie réelle ou la partie imaginaire de cette fonction demeure constante.

Posons

$$(27) \qquad z = c\cos(\alpha + \beta i), \qquad \sqrt{c^2 - z^2} = -c\sin(\alpha + \beta i);$$

l'intégrale aura pour valeur $\alpha + \beta i$ et les deux familles du système isotherme seront définies par les équations

$$\alpha = \text{const.}, \qquad \beta = \text{const.}$$

Soient F, F′ les points du plan ayant pour affixes c et $-c$; M désignant le point dont l'affixe est z, on aura

$$(28) \qquad z - c = \mathrm{FM}\, e^{i\widehat{\mathrm{MF}x}}, \qquad z + c = \mathrm{F'M}\, e^{i\widehat{\mathrm{MF'}x}},$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{FM} = r = \mathrm{mod}(z - c) = c\,\mathrm{mod}[\cos(\alpha + \beta i) - 1] = c[\cos\beta i - \cos\alpha],$$
$$\mathrm{F'M} = r' = \mathrm{mod}(z + c) = c\,\mathrm{mod}[\cos(\alpha + \beta i) + 1] = c[\cos\beta i + \cos\alpha];$$

on déduit de ces équations

$$r + r' = 2c\cos\beta i,$$
$$r' - r = 2c\cos\alpha.$$

On voit que les courbes de la famille (β) sont des ellipses, admettant pour foyers F, F′; les courbes de la famille (α) sont les hyperboles homofocales.

D'autre part, si nous employons, avec Weierstrass, le symbole $\mathcal{R}$ pour indiquer la partie réelle d'une fonction, l'équation des ellipses sera évidemment

$$\mathcal{R}\, i \int \frac{dz}{\sqrt{c^2 - z^2}} = -\beta,$$

et leur équation différentielle

$$\mathcal{R}\frac{i\,dz}{\sqrt{z^2-c^2}}=0.$$

L'emploi des formules (22) et (28) nous permet de transformer cette équation et de lui donner la forme

$$\mathcal{R}\frac{ds}{\sqrt{rr'}}e^{i\left(\omega-\frac{\widehat{\mathrm{MF}x}+\widehat{\mathrm{MF'}x}}{2}\right)}=0,$$

ω désignant l'angle de la tangente à la courbe avec l'axe des x. On a donc

$$\omega=\frac{\pi}{2}+\frac{\widehat{\mathrm{MF}x}+\widehat{\mathrm{MF'}x}}{2},$$

ce qui donne la construction bien connue de la tangente à l'ellipse.

Nous terminerons ces applications, que l'on pourrait varier à l'infini, en prenant la fonction

$$f(z)=\int\frac{dz}{\sqrt{z(z-c)\left(z-\frac{c}{k^2}\right)}},$$

où c et k^2 désignent deux constantes réelles et positives.

Les courbes obtenues en égalant à une constante la partie réelle et la partie imaginaire de cette fonction formeront un système isotherme algébrique que l'on peut définir comme il suit.

Posons

$$f(z)=\frac{2k}{\sqrt{c}}(\alpha+\beta i),$$

on aura

$$(29)\quad\left\{\begin{aligned} z &= c\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\beta i), & z' &= c\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\beta i),\\ z-c &= -c\,\mathrm{cn}^2(\alpha+\beta i), & z'-c &= -c\,\mathrm{cn}^2(\alpha-\beta i),\\ z-\frac{c}{k^2} &= -\frac{c}{k^2}\mathrm{dn}^2(\alpha+\beta i), & z'-\frac{c}{k^2} &= -\frac{c}{k^2}\mathrm{dn}^2(\alpha-\beta i),\end{aligned}\right.$$

et, par conséquent, si l'on désigne par r, r', r'' respectivement les distances du point (x, y) aux trois points en ligne droite

$$z=0,\qquad z=c,\qquad z=\frac{c}{k^2},$$

on aura

$$(30)\quad \begin{cases} r = c\ \mathrm{sn}(\alpha+\beta i)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta i), \\ r' = c\ \mathrm{cn}(\alpha+\beta i)\,\mathrm{cn}(\alpha-\beta i), \\ r'' = \dfrac{c}{k^2}\,\mathrm{dn}(\alpha+\beta i)\,\mathrm{dn}(\alpha-\beta i). \end{cases}$$

Écrivons les formules bien connues

$$\begin{aligned} \mathrm{cn}\,x\,\mathrm{cn}(x+a) + \quad \mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{sn}(x+a) &= \mathrm{cn}\,a, \\ \mathrm{dn}\,x\,\mathrm{dn}(x+a) + k^2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{sn}(x+a) &= \mathrm{dn}\,a, \end{aligned}$$

relatives à l'addition des fonctions elliptiques; si nous y substituons les valeurs suivantes de x et de $x+a$:

$$x = \alpha+\beta i, \qquad x+a = \alpha-\beta i,$$

nous trouverons, en tenant compte des formules (30),

$$(31)\quad \begin{cases} r' + r\,\mathrm{dn}(2\beta i) = c\ \mathrm{cn}(2\beta i). \\ r'' + r\,\mathrm{cn}(2\beta i) = \dfrac{c}{k^2}\,\mathrm{dn}(2\beta i). \end{cases}$$

Si l'on remplace ensuite x et $x+a$ dans les mêmes formules par les valeurs suivantes :

$$-x = \alpha+\beta i, \qquad x+a = \alpha-\beta i,$$

elles donneront les deux relations nouvelles

$$(32)\quad \begin{cases} r' - r\,\mathrm{dn}(2\alpha) = c\ \mathrm{cn}(2\alpha), \\ r'' - r\,\mathrm{cn}(2\beta) = \dfrac{c}{k^2}\,\mathrm{dn}(2\alpha). \end{cases}$$

Les équations (31) et (32) définissent les deux familles isothermes.

Comme on devait s'y attendre, ces deux familles sont représentées par la même équation, mais avec des valeurs différentes de la constante arbitraire. Elles se composent d'ovales de Descartes ayant pour foyers communs les trois points

$$z = 0, \qquad z = c, \qquad z = \frac{c}{k^2}.$$

La double équation obtenue pour chaque famille met en

évidence la belle propriété des ovales découverte par Chasles et donnée dans l'*Aperçu historique*, p. 352.

L'équation différentielle commune aux deux familles d'ovales est évidemment

$$\frac{dz}{\sqrt{z(z-c)\left(z-\frac{c}{k}\right)}} \pm \frac{dz'}{\sqrt{z'(z'-c)\left(z'-\frac{c}{k^2}\right)}} = 0.$$

Elle conduit à une construction géométrique nouvelle et très simple des tangentes aux deux ovales qui passent en un point M du plan. L'angle de l'une de ces tangentes avec l'axe focal sera la moitié de la somme des angles que font, avec cet axe, les trois rayons vecteurs menés du point M aux trois foyers. Cette somme n'étant définie qu'à un multiple près de π, la construction donnera bien deux tangentes rectangulaires.

127. Une famille de courbes isothermes étant définie par une équation de la forme

$$\lambda = f(z) + f_1(z'),$$

le paramètre λ de cette famille satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z\, \partial z'} = 0, \tag{33}$$

et, réciproquement, toute fonction λ vérifiant cette équation donne une famille isotherme. Cette remarque permet de traiter la question suivante :

Proposons-nous de déterminer toutes les familles isothermes composées de cercles. L'équation d'un cercle écrite avec les variables z, z' a la forme

$$zz' + az + bz' + c = 0, \tag{34}$$

et l'on obtiendra la famille de cercles la plus générale en prenant pour a, b, c des fonctions arbitraires d'un paramètre λ. Si l'on exige que cette famille soit isotherme, il faudra que la fonction λ satisfasse à l'équation (33). On est ainsi conduit, par un calcul facile, à l'équation de condition

$$(ab - c)(a''z + b''z' + c'') - (ab' + ba' - c')(a'z + b'z' + c') = 0, \tag{35}$$

où a', b', c'; a'', b'', c'' désignent les dérivées premières et secondes de a, b, c par rapport à λ, et qui doit être une conséquence de l'équation (34). Comme l'équation (35) est du premier degré seulement par rapport à z et à z', elle doit être vérifiée identiquement et l'on a

$$\frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'} = \frac{c''}{c'} = \frac{ab' + ba' - c'}{ab - c}.$$

On déduit de là, en négligeant le dernier rapport et en intégrant,

$$a = lc + l_0,$$
$$b = mc + m_0,$$

l, l_0, m, m_0 désignant des constantes. L'équation (34) prendra donc la forme

$$zz' + l_0 z + m_0 z' + c(lz + mz' + 1) = 0$$

et représentera nécessairement une famille de cercles passant par deux points, distincts ou confondus. Il est inutile maintenant de continuer les calculs et de déterminer l'expression de c en fonction de λ; car on sait que toutes les familles de cercles passant par deux points distincts ou confondus peuvent se déduire par une inversion d'une famille de droites parallèles, ou de droites concourantes, ou de cercles concentriques, et sont, par conséquent, isothermes. De plus, *leurs trajectoires orthogonales, qui sont des cercles, constituent également une famille isotherme, conjuguée de la première.* Nous retrouverons cette dernière propriété comme cas particulier d'un théorème général relatif aux cercles géodésiques tracés sur une surface quelconque.

CHAPITRE IV.

REPRÉSENTATION CONFORME DES SURFACES LES UNES SUR LES AUTRES.

On applique dans ce Chapitre les propriétés générales des systèmes isothermes à la résolution de différents problèmes relatifs aux Cartes géographiques et aux représentations conformes.

Représentations conformes d'une surface sur elle-même. — Recherche de toutes celles pour lesquelles un système isotherme donné de la surface correspond à un autre système également donné. — Représentations conformes qui conservent un système isotherme donné. — Application aux surfaces de révolution. — Transformation de Lambert qui fait correspondre les parallèles aux parallèles et les méridiens aux méridiens.

Emploi que Gauss a fait du même principe pour représenter d'une manière conforme l'ellipsoïde terrestre sur une sphère, le rapport de similitude demeurant le même en tous les points d'un parallèle. Si l'on voulait appliquer cette méthode à un pays tel que la France, le rapport de similitude ne varierait pas, *dans toute l'étendue de la carte*, de $\frac{1}{400000}$ de sa valeur.

---

128. Après avoir étudié les propriétés générales des systèmes orthogonaux et isothermes, nous allons montrer comment on peut faire usage de ces propriétés pour résoudre différents problèmes précis relatifs à la représentation conforme et à la théorie des Cartes géographiques.

Considérons d'abord une surface quelconque, dont l'élément linéaire est réductible à la forme

$$ds^2 = \lambda^2 d\alpha\, d\beta; \tag{1}$$

nous avons vu au n° **121** qu'on ne pourra conserver cette forme que si l'on substitue aux variables α, β les variables α', β' déterminées par l'un ou l'autre des systèmes de formules

$$\alpha' = \mathcal{F}(\alpha), \qquad \beta' = \mathcal{F}'_1(\beta), \tag{2}$$

$$\alpha' = \mathcal{F}(\beta), \qquad \beta' = \mathcal{F}'_1(\alpha). \tag{3}$$

On peut évidemment envisager l'un ou l'autre de ces systèmes

de formules comme définissant une transformation de la surface en elle-même, transformation qui fait correspondre un point de la surface ayant pour coordonnées α', β' à un point de coordonnées α, β. Cette transformation est conforme et il est aisé de voir qu'elle conserve aussi les systèmes isothermes. Car le système isotherme le plus général est défini par les équations telles que les suivantes :

$$(4) \qquad \begin{cases} f(\alpha) + \varphi(\beta) = u, \\ f(\alpha) - \varphi(\beta) = iv, \end{cases}$$

équations dont la forme se conserve évidemment lorsqu'on substitue aux variables α, β les nouvelles variables α', β'.

129. Au n° **124** nous avons commencé à étudier les transformations précédentes lorsqu'elles s'appliquent à une surface plane, et il est évident que l'on pourrait ramener à ce cas particulier l'étude du cas général, en supposant que la surface considérée a d'abord été représentée sur le plan. Il y a cependant avantage, pour plus de netteté, à résoudre le problème suivant :

Étant données deux formes de l'élément linéaire

$$(5) \qquad ds^2 = n^2(du^2 + dv^2), \qquad ds_1^2 = n_1^2(du_1^2 + dv_1^2),$$

se rapportant soit à la même surface, soit à deux surfaces différentes, existe-t-il une transformation conforme des deux éléments l'un dans l'autre qui fasse correspondre le système isotherme (u, v) *au système isotherme* (u_1, v_1)?

D'après ces conditions, il faut d'abord que l'on ait

$$(6) \qquad u_1 = f(u), \qquad v_1 = \varphi(v)$$

ou

$$(7) \qquad u_1 = f(v), \qquad v_1 = \varphi(u).$$

Dans le premier cas, il faudra en outre que

$$\frac{n_1^2}{n^2} f'^2(u) = \frac{n_1^2}{n^2} \varphi'^2(v),$$

et, par suite, que $f'(u)$, $\varphi'(v)$ se réduisent à des constantes, toutes

deux égales en valeur absolue. On aura donc nécessairement

$$(8) \qquad u_1 = hu + k, \qquad v_1 = \pm hv + k',$$

h, k, k' désignant des constantes quelconques.

Pour obtenir ce qui se rapporte à l'hypothèse (7), il suffira de changer u en v dans les formules précédentes, ce qui donnera la solution nouvelle

$$(9) \qquad u_1 = hv + k, \qquad v_1 = \pm hu + k',$$

h, k, k' étant encore des constantes.

Quelque simples que soient les remarques précédentes, elles ont d'importantes applications.

130. Considérons, par exemple, une surface de révolution dont l'élément linéaire soit donné par la formule

$$(10) \qquad ds^2 = f(u)\,[du^2 + dv^2].$$

La substitution définie par les formules

$$(11) \qquad u_1 = cu + h, \qquad v_1 = cv,$$

où c et h désignent des constantes, en même temps qu'elle sera conforme, conservera à la fois les méridiens et les parallèles, en augmentant ou diminuant, dans une proportion toujours la même, l'angle de deux méridiens.

Cette transformation si simple est due à Lambert [1]. Gauss a fait usage du même principe pour représenter d'une manière conforme l'ellipsoïde terrestre sur la sphère, en donnant ainsi le moyen de supposer, dans tous les cas, la Terre sphérique [2].

Si l'on assimile la Terre à un ellipsoïde de révolution aplati, on aura l'équation du méridien sous la forme

$$(12) \qquad \frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$$

---

[1] *Voir*, par exemple, *Beiträge zum Gebrauche der Mathematick und deren Anwendung* durch J.-H. Lambert. Dritter Theil, 1772, p. 105 et suiv.

[2] *Voir* le Mémoire *Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie Erste Abhandlung*, dans le Tome IV des *Œuvres de Gauss*, p. 259.

où r désigne la distance à l'axe de révolution et z la distance à l'équateur. Posons

$$(13)\qquad \frac{z}{r(1-e^2)} = \cot\varphi,$$

φ sera la colatitude; on aura

$$(14)\qquad r = \frac{a\sin\varphi}{(1-e^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}, \qquad z = \frac{a(1-e^2)\cos\varphi}{(1-e^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}.$$

L'élément linéaire de la surface s'obtiendra sans difficulté et sera donné par l'équation

$$(15)\qquad ds^2 = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1-e^2\cos^2\varphi)^3}\,d\varphi^2 + \frac{a^2\sin^2\varphi}{1-e^2\cos^2\varphi}\,d^2\varphi^2,$$

où φ désigne la longitude du lieu.

Si l'on veut mettre en évidence les variables isothermes, il faudra introduire la fonction u telle que l'on ait

$$(16)\qquad du = \frac{(1-e^2)\,d\varphi}{\sin\varphi(1-e^2\cos^2\varphi)},$$

ce qui donne par l'intégration

$$(17)\qquad u = \log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + \frac{e}{2}\log\frac{1+e\cos\varphi}{1-e\cos\varphi}.$$

Cette expression elle-même peut se développer en une série

$$(18)\quad u = \log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + e^2\cos\varphi + \frac{e^4}{3}\cos^3\varphi + \frac{e^6}{5}\cos^5\varphi + \frac{e^8}{7}\cos^7\varphi + \ldots,$$

qui est très convergente dans le cas de la Terre, puisque e^2 est alors égal à $\frac{1}{150}$ environ.

En introduisant la différentielle du, on donne à l'élément linéaire de l'ellipsoïde la forme

$$(19)\qquad ds^2 = \frac{a^2\sin^2\varphi}{1-e^2\cos^2\varphi}(du^2 + dv^2).$$

Dans le cas où l'ellipsoïde se réduit à une sphère de rayon R, il faut faire $a = \mathrm{R}$, $e = 0$,

$$(20)\qquad du_1 = \frac{d\varphi_1}{\sin\varphi_1}, \qquad u_1 = \mathrm{Log}\operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2},$$

et la formule précédente devient

$$ds^2 = R^2 \sin^2 \varphi_1 (du_1^2 + dv_1^2). \tag{21}$$

131. Cela posé, pour obtenir une représentation conforme de l'ellipsoïde sur la sphère, on peut toujours poser, conformément à la méthode de Lambert,

$$v_1 = \alpha v, \qquad u_1 = \alpha u + \beta, \tag{22}$$

α et β étant deux constantes. Le rapport de similitude de la sphère à l'ellipsoïde sera donné par la formule

$$m = \frac{R\alpha}{a} \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}. \tag{23}$$

Remplaçons, dans la seconde formule (22), u_1 et u par leurs expressions en fonction de φ_1 et de φ, et au lieu de β écrivons $\log k$. Nous aurons

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi_1}{2} = k \operatorname{tang}^\alpha \frac{\varphi}{2} \left(\frac{1 + e \cos \varphi}{1 - e \cos \varphi} \right)^{\frac{e\alpha}{2}}. \tag{24}$$

La première formule (22) et les deux suivantes (23), (24) définissent complètement la représentation conforme. Pour déterminer les constantes α, k et R, Gauss procède comme il suit.

En faisant usage de la relation

$$\frac{d\varphi_1}{\sin \varphi_1} = \frac{\alpha(1 - e^2)\, d\varphi}{\sin \varphi (1 - e^2 \cos^2 \varphi)},$$

qui résulte de la différentiation de la seconde formule (22), on trouve

$$\frac{d \log m}{d\varphi_1} = \cot \varphi_1 - \frac{\cos \varphi}{\alpha \sin \varphi_1},$$

$$\frac{d^2 \log m}{d\varphi_1^2} = -\frac{1}{\sin^2 \varphi_1} + \frac{\cos \varphi \cos \varphi_1}{\alpha \sin^2 \varphi_1} + \frac{\sin^2 \varphi (1 - e^2 \cos^2 \varphi)}{\alpha^2 (1 - e^2) \sin^2 \varphi_1}.$$

Gauss exprime que, sur un parallèle déterminé

$$\varphi_1 = u_0,$$

on a *à la fois*

$$m = 1, \qquad \frac{dm}{d\varphi_1} = 0, \qquad \frac{d^2 m}{d\varphi_1^2} = 0. \tag{25}$$

Si l'on désigne par φ_0 la valeur de φ qui correspond à la valeur u_0 de u, cela donne les équations

$$\cos\varphi_0 = \alpha\cos u_0,$$
$$\alpha^2(1-e^2)\sin^2 u_0 = \sin^2\varphi_0(1-e^2\cos^2\varphi_0),$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de la formule (23) et de la première condition (25), les valeurs suivantes :

$$(26)\qquad \alpha^2 = 1 + \frac{e^2\sin^4\varphi_0}{1-e^2},\qquad \cos u_0 = \frac{1}{\alpha}\cos\varphi_0\qquad R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\cos^2\varphi_0}.$$

D'après l'expression de R, on verra facilement que *la sphère sur laquelle on représente l'ellipsoïde a son rayon égal à la moyenne géométrique des rayons de courbure de l'ellipsoïde en tous les points du parallèle de colatitude* φ_0. Cette sphère avait été introduite, bien avant Gauss, par Prony; mais Gauss est le premier qui ait rattaché sa considération à un raisonnement précis.

132. Pour mettre en évidence les grands avantages de la représentation de Gauss, appliquons-la à un exemple.

Si l'on calcule la dérivée troisième de $\log m$, on trouve, pour $u = u_0$,

$$(27)\qquad \frac{d^3\log m}{d\varphi_1^3} = \frac{4e^2\cos u_0\sin^2\varphi_0}{(1-e^2)\sin u_0}.$$

Le premier terme du développement de $\log m$, suivant les puissances de $u - u_0$, sera donc

$$\frac{2e^2}{3}\,\frac{\cos u_0\sin^2\varphi_0}{(1-e^2)\sin u_0}(u-u_0)^3,$$

ce qui donnera

$$(28)\qquad m = 1 + \frac{2e^2}{3}\,\frac{\cos u_0\sin^2\varphi_0}{(1-e^2)\sin u_0}(u-u_0)^3 + \ldots,$$

les termes négligés contenant les puissances supérieures de $u - u_0$.

Faisons, par exemple,

$$\varphi_0 = 45^\circ,$$

on aura

$$\alpha^2 = 1 + \frac{e^2}{4(1-e^2)},$$

α^2 ne différera de 1 que d'environ $\frac{1}{600}$. Pour calculer le terme du troisième ordre dans l'expression de m, on pourra supposer $u_0 = \varphi_0$, ce qui donne à peu près

$$m^2 = 1 + \frac{1}{450}(u - u_0)^3.$$

Dans un pays comme la France, qui s'écarte de 6° au plus du parallèle de 45°, $u - u_0$ atteindra au plus $\frac{\pi}{30}$, c'est-à-dire $\frac{1}{10}$. Le rapport de similitude ne différera de 1 que de quantités qui n'atteindront pas $\frac{1}{400000}$. On voit entre quelles limites étroites variera ce rapport. Pratiquement, l'emploi de la sphère de Gauss et de Prony permet de regarder la Terre comme sphérique.

133. On peut employer les mêmes méthodes pour résoudre un problème que Lagrange a étudié de la manière la plus détaillée dans ses Mémoires, publiés en 1779 [1], *sur la construction des Cartes géographiques*. Considérant la Terre comme une sphère ou un sphéroïde de révolution, Lagrange se propose de rechercher tous les tracés géographiques dans lesquels les méridiens et les parallèles sont représentés par des arcs de cercle. Comme, sur toute surface de révolution les méridiens et les parallèles forment deux familles isothermes conjuguées, les courbes correspondantes du plan devront, elles aussi, former deux familles isothermes conjuguées. Or nous avons vu : 1° que, dans le plan, une famille de cercles ne peut être isotherme sans que la famille isotherme conjuguée ne soit aussi composée de cercles; 2° que tout système isotherme composé de cercles dérive par une inversion plane soit du système (A) formé par les courbes coordonnées d'un système de coordonnées rectilignes rectangulaires, soit du système (B) formé d'une manière analogue avec les coordonnées polaires.

Ainsi, *si l'une des deux familles de méridiens et de parallèles de la surface est représentée par des cercles, il en sera nécessairement de même de l'autre famille.*

On obtient toutes les solutions du problème de Lagrange en

---

[1] Lagrange, *Œuvres complètes*, t. IV, p. 637.

faisant correspondre les méridiens et les parallèles, soit aux droites du système (A), *soit aux courbes coordonnées du système* (B), *puis en soumettant les systèmes* (A) *ou* (B) *à une inversion plane quelconque.*

Soit

$$ds^2 = n^2(du^2 + dv^2) \tag{29}$$

l'élément linéaire du sphéroïde, les lignes de paramètre u étant les parallèles de la surface. Quand il s'agira d'une sphère, on aura

$$u = \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}. \tag{30}$$

θ étant la colatitude, et v sera la longitude.

Si l'on remarque maintenant que, pour le système (A), l'élément linéaire du plan est donné par la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

on voit que les représentations conformes par lesquelles on passe des méridiens et des parallèles au système (A) sont données par les formules

$$u = hx + k, \qquad v = \pm hy + k'$$

ou

$$u = hy + k, \qquad v = \pm hx + k'$$

qui, par l'emploi d'homothéties, de translations et de symétries élémentaires, se ramènent toutes au type

$$u = x, \qquad v = y.$$

Il suffit de se reporter à la formule (30) pour reconnaître qu'on a ainsi la projection de Mercator.

Ainsi, une première solution est donnée par la projection de Mercator, ou par cette projection suivie d'une inversion plane.

134. Supposons maintenant que les méridiens et les parallèles correspondent au système (B) pour lequel l'élément linéaire du plan est donné par la formule

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2$$

qu'on peut écrire, en introduisant les variables isothermes

$$ds^2 = \rho^2[(dl\rho)^2 + d\omega^2].$$

Par suite, les représentations conformes par lesquelles on passe des méridiens et des parallèles au système (B) sont données par l'un des deux systèmes de formules

$$(31) \qquad u = h \operatorname{Log}\rho + k, \qquad v = \pm h\omega + k'$$

ou

$$(32) \qquad u = h\omega + k, \qquad v = \pm h \operatorname{Log}\rho + k'.$$

Lagrange rejette la deuxième solution qui donnerait, en effet, des résultats compliqués. Dans le cas de la sphère, par exemple, on aurait

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = e^{h\omega + k}, \qquad v = \pm h \operatorname{Log}\rho + k',$$

v et $\frac{\pi}{2} - \theta$ étant la longitude et la latitude.

C'est donc à la solution définie par les formules (31) que nous nous arrêterons.

On lui donnera la forme

$$(33) \qquad \begin{cases} \operatorname{Log}\rho = c(u - u_0), \\ \pm\omega = c(v - v_0). \end{cases}$$

Par un choix convenable des axes, on pourra supprimer le double signe et réduire ces formules aux suivantes :

$$(34) \qquad \rho = k\,e^{cu}, \qquad \omega = cv,$$

que nous emploierons désormais.

Si l'on fait $c = \pm 1$, on retrouve, dans le cas de la sphère tout au moins, une transformation connue depuis Hipparque, la projection stéréographique de la sphère de rayon k. On a alors, en effet, en prenant par exemple $c = 1$,

$$\rho = k \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}, \qquad \omega = v.$$

Dans le cas général où c prend une valeur quelconque, la trans-

formation résulte de la composition des deux suivantes :

$$u' = cv + \operatorname{Log} k, \qquad v' = cv \tag{35}$$

et

$$\rho = e^{u'}, \qquad \omega = v'. \tag{36}$$

La première est une transformation de Lambert appliquée à la surface elle-même. La seconde est une projection stéréographique.

On peut encore remarquer que la transformation résulte de la composition des deux suivantes :

$$\rho' = e^{u}, \qquad \omega' = v \tag{37}$$

et

$$\rho = k\rho'^{c}, \qquad \omega = c\omega'. \tag{38}$$

La première est une projection stéréographique; la seconde est une transformation de Lambert appliquée aux coordonnées polaires du plan considéré comme une surface de révolution.

135. Au reste, en appliquant le théorème donné au n° 125, on peut obtenir très simplement les formules qui définissent directement le tracé géographique fournissant la solution du problème de Lagrange.

Il résulte en effet de ce théorème que, si l'on choisit convenablement les axes, le système isotherme le plus général qui soit formé de cercles est composé des deux familles pour lesquelles respectivement le module et l'argument de la fonction

$$\frac{z+a}{z-a}$$

demeurent constants. Si A et A′ désignent les points pour lesquels l'affixe est égale à $+a$ et à $-a$, l'une des familles, celle qui correspondra aux méridiens de la surface, sera formée des cercles qui passent par A et A′; l'autre famille le sera des cercles lieux des points pour lesquels le rapport des distances aux points A, A′ est constant. Les variables isothermes relatives à ce système sont définies, par exemple, par l'équation

$$\frac{z+a}{z-a} = -e^{u+iv}. \tag{39}$$

Leur signification géométrique est très simple. Si r, r' désignent les distances du point M d'affixe z aux deux points A, A', si ω, ω' désignent les angles que font respectivement les segments AM, A'M avec A'A, c'est-à-dire avec l'axe des x, on a

$$z - a = re^{i\omega}, \qquad z + a = r'e^{i\omega'},$$

ce qui donne

$$e^u = \frac{r'}{r}, \qquad v = \pi + \omega' - \omega.$$

Ainsi, u est le logarithme du rapport des distances A'M, AM, v est le supplément de l'angle sous lequel on voit de M le segment AA', cet angle étant défini avec précision, en grandeur et en signe, par les formules précédentes.

Les expressions des coordonnées x et y du point M en fonction de u et de v se déduisent très simplement de la formule (39). On a

$$z = a\frac{e^{u+iv} - 1}{e^{u+iv} + 1},$$

d'où, en séparant les parties réelles des parties imaginaires,

$$(40) \qquad x = a\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u} + 2\cos v}, \qquad y = \frac{2a\sin v}{e^u + e^{-u} + 2\cos v}.$$

Cela posé, si u_1, v_1 désignent les variables isothermes du point de la surface qui est représenté en M, il suffira, pour établir la correspondance cherchée, de prendre

$$(41) \qquad u = cu_1 + h, \qquad v = cv_1 + h',$$

c, h, h' désignent des constantes.

Dans le cas de la sphère, si l'on introduit la lalitude λ, la longitude l, les formules (41) peuvent s'écrire

$$(42) \qquad \frac{r}{r'} = \left[\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda_0}{2}\right)}\right]^c, \qquad v = c(l - l_0),$$

l_0 et λ_0 étant les coordonnées géographiques du point de la sphère qui correspond au milieu de AA'.

Quant à c, c'est une constante arbitraire à laquelle on a donné le nom d'*exposant de la projection*.

136. Revenons aux deux solutions que nous avons obtenues par l'emploi de différentes transformations successives. Dans le cas de la sphère, la seconde, par exemple, peut s'énoncer de la manière suivante :

1° On effectue, en prenant le pôle comme point de vue, une projection stéréographique sur le plan de l'équateur; cette projection donne une première carte de la surface que nous appellerons la carte C;

2° On soumet la carte C à une transformation de Lambert, c'est-à-dire une transformation définie par les équations

$$\rho^c = \rho', \qquad c\omega = \omega',$$

où ρ, ω; ρ', ω désignent les coordonnées polaires des deux points correspondants, rapportées au centre de la sphère comme pôle; cela donne une seconde carte que nous appellerons la carte D;

3° On soumet la carte D à une inversion quelconque dont le pôle est dans le plan de cette carte, ce qui donne la carte définitive E.

La constante c est appelée, nous l'avons dit, l'exposant de la projection.

Dans les Mémoires que nous avons cités, Lagrange se propose le problème suivant : *Étant donnés trois points sur la sphère, peut-on faire une carte d'exposant donné, de telle manière qu'ils soient représentés par trois points, arbitrairement choisis sur la carte?*

« Ce problème, dit Lagrange, me paraît assez difficile à résoudre par la Géométrie; et quant à la solution algébrique, je ne l'ai pas tentée, soit pour ne pas trop m'écarter de mon sujet, soit aussi parce qu'il me semble qu'elle ne serait d'aucun usage, à moins que l'on ne pût ensuite la ramener à une solution aisée. »

Les progrès de nos méthodes géométriques nous permettent de résoudre aisément et avec élégance ce problème que Lagrange n'a fait qu'énoncer. En effet, puisque l'exposant de la carte est donné, il n'y a d'arbitraire dans la solution donnée plus haut, que le passage de la carte D à la carte E. Le problème posé par Lagrange se transforme en celui-ci :

Étant donné dans le plan un triangle ABC, *y a-t-il une*

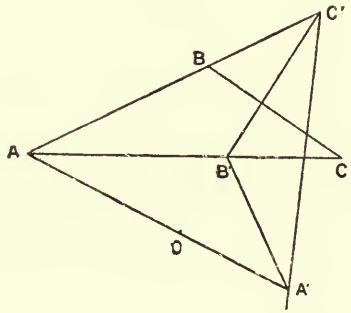
inversion qui le transforme en un triangle égal à un autre triangle donné $A_0B_0C_0$?

Et ce problème se résout et se discute facilement.

Soit, en effet, O le pôle de l'inversion cherchée, pôle situé dans le plan ABC. Cette inversion transformera le triangle ABC en un triangle $A_1B_1C_1$, qu'on appelle le *triangle invariable* du quadrilatère OABC, et qui ne changerait pas *de forme* si, au lieu de soumettre le quadrilatère à une inversion de pôle O, on le soumettait à une inversion ayant pour pôle l'un quelconque des points A, B, C. Cette propriété fondamentale nous conduit à la construction suivante :

On fait une inversion de pôle A, et de module $\overline{AB}.\overline{AC}$ par exemple, qui transforme le point B en un point C′ et le point C en un point B′ (*fig.* 8). Puis sur B′C′, on construit un triangle A′B′C′

Fig. 8.



semblable au triangle donné $A_0B_0C_0$. L'homologue O de A′ dans l'inversion considérée sera le pôle de l'inversion cherchée. Quant au module de cette inversion, il se définira par la condition que la distance des deux points qui dérivent de B, C, par exemple, soit égale à B_0C_0.

On a ainsi la solution complète du problème. Comme il y a deux positions pour A′, symétriques l'une de l'autre par rapport à B′C′, il y a deux inversions distinctes, toutes deux réelles.

On aurait pu recourir à une autre construction géométrique, en remarquant que les angles du triangle donné $A_0B_0C_0$ doivent être égaux aux différences des angles BOC et BAC, COA et CBA, AOB et ACB, et que, par suite, on connaît les angles sous lesquels

on voit du point O les côtés du triangle ABC. On aurait été ainsi ramené au problème de Pothenot, mais cette solution nous a paru moins nette que celle à laquelle nous nous sommes arrêté.

Notre première méthode s'appliquerait sans difficulté si l'on supposait que le pôle O de l'inversion cherchée n'est pas dans le plan du triangle ABC.

CHAPITRE V.

DU SYSTÈME ORTHOGONAL FORMÉ PAR LES LIGNES DE COURBURE.

Équation différentielle des lignes de courbure en coordonnées cartésiennes. — Formation de la même équation à l'aide des coordonnées plückériennes de la normale. — Application à la détermination des lignes de courbure des surfaces définies par l'équation $x^m y^n z^p = C$. — Système triple orthogonal dont fait partie cette famille de surfaces. — Détermination des lignes de courbure de la surface lieu des points tels que la somme de leurs distances à deux droites qui se rencontrent à angle droit soit constante. — Formules d'Olinde Rodrigues relatives aux lignes de courbure. — Premières notions sur la méthode de représentation sphérique de Gauss. — Rapports avec la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles. — Les lignes de courbure sont les caractéristiques de celle de ces équations qui, en même temps que x, y, z, admet $x^2 + y^2 + z^2$ comme solution particulière. — L'inversion conserve les lignes de courbure. — Premier exemple d'équations linéaires admettant des solutions particulières liées par une relation quadratique et homogène. — Système triple formé de surfaces cyclides à trois plans de symétrie. — Démonstration du célèbre théorème de Dupin relatif aux systèmes triples orthogonaux. — Cette démonstration se rattache à la considération d'un système de trois équations linéaires aux dérivées partielles auxquelles satisfont les coordonnées cartésiennes x, y, z, équations dont on peut déterminer simplement les coefficients lorsqu'on a calculé l'expression de l'élément linéaire de l'espace dans le système orthogonal employé.

---

137. Les propriétés des systèmes orthogonaux et isothermes ne dépendent que de la forme de l'élément linéaire et se conservent quand on déforme la surface sans altération des longueurs des arcs. Il n'en est plus de même pour le système orthogonal qui est formé par les deux familles de lignes de courbure. Mais ce système se distingue de tous les autres par une propriété essentielle; il est à la fois orthogonal et conjugué, il a un rôle extrêmement important dans l'examen d'un grand nombre de problèmes relatifs à la théorie des surfaces et, à tous ces points de vue, il mérite que nous en fassions dès à présent une étude assez détaillée.

Une ligne de courbure peut être, on le sait, définie par cette propriété que les normales à la surface en ses différents points

forment une surface développable. L'arête de rebroussement de cette développable est évidemment une des développées de la ligne de courbure, le point de contact de chaque normale avec l'arête de rebroussement est le centre de courbure principal correspondant à la ligne de courbure considérée. Nous allons indiquer d'abord comment on obtient l'équation différentielle des lignes de courbure.

138. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la surface considérée u, v, w des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale en ce point. Les coordonnées X, Y, Z d'un point quelconque de la normale auront pour expressions

$$(1) \qquad X = x + u\lambda, \qquad Y = y + v\lambda, \qquad Z = z + w\lambda,$$

λ étant une arbitraire dont la variation donnera tous les points de la normale. Exprimons qu'il existe un déplacement pour lequel ce point décrit une courbe tangente à la normale; nous aurons les équations

$$\frac{d(x + u\lambda)}{u} = \frac{d(y + v\lambda)}{v} = \frac{d(z + w\lambda)}{w}$$

ou, plus simplement, en retranchant $d\lambda$ des trois rapports égaux,

$$(2) \qquad \frac{dx + \lambda\, du}{u} = \frac{dy + \lambda\, dv}{v} = \frac{dz + \lambda\, dw}{w}.$$

L'élimination de λ nous donnera l'équation différentielle

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} dx & du & u \\ dy & dv & v \\ dz & dw & w \end{vmatrix} = 0,$$

qui est celle des lignes de courbure. En la développant on trouve

$$(4) \qquad du(v\, dz - w\, dy) + dv(w\, dx - u\, dz) + dw(u\, dy - v\, dx) = 0.$$

Cette équation détermine les directions des deux lignes de courbure qui passent en chaque point de la surface; les formules (2) feront connaître la valeur de λ relative à chaque ligne de courbure, et le centre de courbure correspondant sera alors défini par les formules (1).

139. On est encore conduit à l'équation (4), si l'on applique une autre méthode qui repose exclusivement sur l'emploi des *coordonnées* de la normale. On sait que Plücker a considéré la ligne droite comme un élément de l'espace et qu'il l'a définie, comme on le fait pour un point ou un plan, par des coordonnées.

Nous avons déjà rappelé au n° 52 que l'on peut définir une droite par les équations

$$(5)\qquad \begin{cases} bz - cy + a' = 0, \\ cx - az + b' = 0, \\ ay - bx + c' = 0, \end{cases}$$

qui représentent ses projections sur les trois plans coordonnés. Les six quantités a, b, c, a', b', c', qui sont liées par la relation quadratique

$$(6)\qquad aa' + bb' + cc' = 0,$$

sont dites les *coordonnées homogènes* de la ligne droite.

Supposons que ces six coordonnées soient des fonctions données d'un paramètre; la droite engendrera une surface réglée. Pour que cette surface soit développable, il faudra qu'il existe une courbe tangente à toutes les positions de la droite; en d'autres termes, il faudra que l'on puisse déterminer les coordonnées x, y, z d'un point variable vérifiant les équations de la droite et satisfaisant aux conditions

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}.$$

Si l'on différentie les équations (5) en tenant compte des relations précédentes, on trouvera que les coordonnées x, y, z doivent vérifier les trois équations

$$(7)\qquad \begin{cases} z\,db - y\,dc + da' = 0, \\ x\,dc - z\,da + db' = 0, \\ y\,da - x\,db + dc' = 0, \end{cases}$$

qui ne contiennent pas dx, dy, dz. Si on les ajoute après les avoir multipliées respectivement par da, db, dc, on obtient la condition

$$(8)\qquad da\,da' + db\,db' + dc\,dc' = 0,$$

à laquelle doivent satisfaire les différentielles des coordonnées. On

démontrera aisément que cette condition, qui est nécessaire, est aussi suffisante; et, quand elle sera remplie, les formules (5) et (7) feront connaître, pour chaque valeur de la variable indépendante, le point de contact de la génératrice avec l'arête de rebroussement.

Dans le cas qui nous occupe, les équations de la normale sont

$$\frac{X-x}{u}=\frac{Y-y}{v}=\frac{Z-z}{w}.$$

Par conséquent, les six coordonnées de la normale sont u, v, w et les quantités u', v', w' définies par les égalités

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} vz-wy+u'&=0,\\ wx-uz+v'&=0,\\ uy-vx+w'&=0.\end{aligned}\right.$$

La condition pour que la normale engendre une surface développable sera donc exprimée par l'équation

$$(10)\qquad du\,du'+dv\,dv'+dw\,dw'=0,$$

que l'on reconnaîtra facilement être équivalente à l'équation (4).

140. Proposons-nous, pour donner une application de la méthode précédente, de déterminer les lignes de courbure de la surface

$$(11)\qquad x^m y^n z^p = C,$$

où m, n, p, C sont des constantes quelconques. L'équation différentielle de la surface sera

$$m\frac{dx}{x}+n\frac{dy}{y}+p\frac{dz}{z}=0;$$

les formules (1) deviendront ici

$$X=x-\frac{m\lambda}{x},\qquad Y=y-\frac{n\lambda}{y},\qquad Z=z-\frac{p\lambda}{z},$$

et les équations (2) nous donneront

$$(12)\qquad \frac{dx\left(\lambda+\frac{x^2}{m}\right)}{x}=\frac{dy\left(\lambda+\frac{y^2}{n}\right)}{y}=\frac{dz\left(\lambda+\frac{z^2}{p}\right)}{z}.$$

Si nous substituons les valeurs de dx, dy, dz dans l'équation différentielle de la surface, nous aurons l'équation du second degré

$$(13)\qquad \frac{m}{\lambda+\frac{x^2}{m}}+\frac{n}{\lambda+\frac{y^2}{n}}+\frac{p}{\lambda+\frac{z^2}{p}}=0,$$

qui fera connaître les valeurs de λ correspondantes aux deux lignes de courbure.

Au lieu de faire correspondre à chaque racine de cette équation la ligne de courbure dont la direction est définie par les formules (12), on peut considérer la ligne de courbure perpendiculaire. En désignant par dx, dy, dz les différentielles relatives à cette seconde ligne, on aura l'équation

$$(14)\qquad \frac{x\,dx}{\lambda+\frac{x^2}{m}}+\frac{y\,dy}{\lambda+\frac{y^2}{n}}+\frac{z\,dz}{\lambda+\frac{z^2}{p}}=0,$$

qui, jointe à l'équation différentielle de la surface, déterminerait les rapports de dx, dy, dz. Ainsi, pour obtenir les équations différentielles des deux familles de lignes de courbure, il suffira de remplacer successivement, dans l'équation (14), λ par les deux racines de l'équation (13).

Ce point étant admis, l'intégration est facile. Multiplions, en effet, l'équation (14) par 2 et ajoutons-lui l'équation (13) multipliée par $d\lambda$. Nous obtiendrons ainsi une différentielle exacte

$$d\left[m\,\mathrm{L}\left(\lambda+\frac{x^2}{m}\right)+n\,\mathrm{L}\left(\lambda+\frac{y^2}{n}\right)+p\,\mathrm{L}\left(\lambda+\frac{z^2}{p}\right)\right]=0,$$

et, en intégrant, nous aurons

$$(15)\qquad u=\left(\lambda+\frac{x^2}{m}\right)^m\left(\lambda+\frac{y^2}{n}\right)^n\left(\lambda+\frac{z^2}{p}\right)^p,$$

u désignant le paramètre de la ligne de courbure. Il faudra, pour obtenir les deux familles, remplacer successivement λ par les deux racines de l'équation (13). Si l'on remarque maintenant que cette équation (13) s'obtient en égalant à zéro la dérivée de l'équation (15) par rapport à λ, on sera conduit au théorème suivant :

Si, dans l'équation (15), *on considère u comme une constante et* λ *comme un paramètre variable, les enveloppes des surfaces représentées par cette équation, correspondantes aux diverses valeurs de u, coupent la surface proposée suivant ses lignes de courbure.*

On voit que ces lignes de courbure sont algébriques toutes les fois que la surface proposée le sera, c'est-à-dire toutes les fois que m, n, p seront commensurables. On reconnaîtra de plus, par un calcul facile, que la famille de surfaces représentée par l'équation (11), dans laquelle on donne à C toutes les valeurs possibles, et les deux familles d'enveloppes dont il est question dans l'énoncé précédent forment un système triple orthogonal [1].

Supposons, par exemple, que l'on prenne

$$m = n = -p = 1.$$

L'équation (11) prendra la forme

$$\frac{xy}{z} = C. \tag{16}$$

L'équation (13) admettra pour racines

$$z^2 \pm \sqrt{(x^2 + z^2)(y^2 + z^2)};$$

il en résultera, pour u, les deux valeurs fournies par les équations suivantes :

$$\sqrt{u'} = \sqrt{z^2 + x^2} + \sqrt{z^2 + y^2}, \tag{17}$$

$$\sqrt{u''} = \sqrt{z^2 + x^2} - \sqrt{z^2 + y^2}. \tag{18}$$

---

[1] Dans son *Mémoire sur les surfaces orthogonales*, inséré en 1847 au *Journal de Liouville* (1re série, t. XII, p. 246), J.-A. Serret, développant une remarque de Bouquet, a montré, le premier, que les surfaces représentées par l'équation (11) constituent une des familles d'un système triple orthogonal et il a indiqué les moyens de déterminer les deux autres familles qui complètent le système. Mais il n'a développé les calculs que dans les deux cas

$$m = 1, \quad n = 1, \quad p = 1 \quad \text{et} \quad m = 1, \quad n = 1, \quad p = -1.$$

La méthode suivie dans le texte est exposée, avec les généralisations qu'elle comporte, dans un *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux* publié par l'Auteur (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. VII, 1878, p. 227).

Les surfaces représentées par ces deux dernières équations sont les lieux des points tels que la somme ou la différence de leurs distances à l'axe des x et à l'axe des y, c'est-à-dire à deux droites rectangulaires qui se coupent, soit constante.

Si l'on prenait

$$m = n = p = 1,$$

les équations des trois familles prendraient la forme

$$(19)\qquad \begin{cases} xyz = C, \\ 3\sqrt{3}\sqrt{u'} = (x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2)^{\frac{3}{2}} + (x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2)^{\frac{3}{2}}, \\ 3\sqrt{3}\sqrt{u''} = (x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2)^{\frac{3}{2}}, \end{cases}$$

ω désignant une racine cubique imaginaire de l'unité. Ce résultat est dû à Cayley.

Pour l'obtenir rapidement et d'une manière élégante, on procédera comme il suit. On a ici

$$(a)\qquad u = (\lambda + x^2)(\lambda + y^2)(\lambda + z^2).$$

Si l'on pose

$$(b)\qquad \begin{cases} x^2 = \alpha + \omega\beta + \gamma, \\ y^2 = \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma, \\ z^2 = \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma, \end{cases}$$

l'expression de u deviendra

$$u = (\lambda + \alpha)^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\beta\gamma(\lambda + \alpha).$$

Éliminant λ entre cette équation et sa dérivée par rapport à λ

$$(\lambda + \alpha)^2 - \beta\gamma = 0,$$

on trouve

$$(c)\qquad u = \left(\beta^{\frac{3}{2}} \pm \gamma^{\frac{3}{2}}\right)^2.$$

Il n'y a plus, pour retrouver les formules de Cayley, qu'à remplacer β et γ par leurs valeurs tirées des formules (b)

$$\beta = \frac{1}{3}(x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2), \qquad \gamma = \frac{1}{3}(x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2).$$

Dans le cas où m, n, p ont des valeurs quelconques, on peut remarquer que les trajectoires orthogonales des surfaces de la

famille

$$x^m y^n z^p = \mathrm{C}$$

sont les courbes du quatrième ordre définies par les équations

$$\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = \text{const.}, \qquad \frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{p} = \text{const.}$$

141. Revenons à la théorie générale. Les formules (2) prennent une forme particulièrement remarquable si l'on suppose que u, v, w, au lieu d'être simplement proportionnels aux cosinus directeurs de la normale, soient égaux à ces cosinus, que nous appellerons c, c', c''. Alors, les formules (1) prendront la forme

$$(20) \qquad \mathrm{X} = x + c\mathrm{R}, \qquad \mathrm{Y} = y + c'\mathrm{R}, \qquad \mathrm{Z} = z + c''\mathrm{R}$$

et définiront un point de la normale situé à la distance R du pied de cette normale; cette distance R aura, d'ailleurs, un signe : elle devra être portée dans le sens défini par les cosinus c, c', c'' si elle est positive, et en sens contraire si elle est négative. Les formules (2) nous donneront les suivantes :

$$\frac{dx + \mathrm{R}\,dc}{c} = \frac{dy + \mathrm{R}\,dc'}{c'} = \frac{dz + \mathrm{R}\,dc''}{c''}.$$

Ajoutons les numérateurs et les dénominateurs après les avoir multipliées respectivement par c, c', c'', nous trouverons, en tenant compte de l'équation évidente

$$c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0,$$

que la valeur commune de ces rapports est égale à zéro.

On peut donc écrire les formules suivantes :

$$(21) \qquad dx + \mathrm{R}\,dc = 0, \qquad dy + \mathrm{R}\,dc' = 0, \qquad dz + \mathrm{R}\,dc'' = 0,$$

qui sont dues à Olinde Rodrigues et qui jouent un rôle essentiel dans la théorie des lignes de courbure. R désigne le rayon de courbure principal correspondant à la ligne considérée, et les coordonnées du centre de courbure correspondant sont définies par les formules (20).

142. On obtient aussi les équations d'Olinde Rodrigues en faisant usage d'une notion très importante qui est due à Gauss,

celle de la *représentation sphérique*. Envisageons une portion quelconque d'une surface donnée et attribuons un sens aux normales en tous les points de cette région, en nous attachant à satisfaire à la condition que les cosinus directeurs c, c', c'' de la normale soient des fonctions continues des deux paramètres qui définissent le pied de cette normale. Construisons maintenant le point dont les coordonnées rectangulaires sont c, c', c''; il appartient évidemment à la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine des coordonnées, et l'on voit que nous établissons, point par point, une correspondance entre cette sphère et la surface donnée. A un point M de la surface correspondra un point m de la sphère, à une courbe de la surface une courbe de la sphère, à une région continue de la surface une région également continue de la sphère. Ce mode de correspondance a reçu le nom de *représentation sphérique* ou d'*image sphérique* de la surface; et Gauss en a fait usage, nous le verrons plus tard, pour établir et formuler une des propositions les plus importantes de la théorie qui nous occupe.

Si nous considérons un point quelconque M de la surface et son image sphérique m, il résulte de notre définition que le plan tangent à la surface au point M est parallèle au plan tangent de la sphère en m; les normales aux deux surfaces sont parallèles, et, en ce qui regarde leurs sens, on voit qu'au sens positif de la normale à la surface correspond celui de la normale extérieure à la sphère.

Imaginons que le point M se déplace à partir de sa position initiale sur la surface et décrive un élément de courbe MM', le point m qui lui sert d'image se déplacera à partir de m et décrira un élément de courbe mm'. Cherchons la relation entre ces deux éléments correspondants.

Il est évident d'abord que l'arc mm' mesure en grandeur l'angle des normales en M et M' ou, ce qui est la même chose, l'angle infiniment petit des plans tangents à la surface en ces deux points. C'est là une première propriété très importante de la représentation sphérique : elle permet d'étudier géométriquement la variation du plan tangent.

D'autre part, la tangente mm' de la sphère et la tangente MM' de la surface ont évidemment pour conjuguées des droites qui

sont parallèles, puisque les plans tangents aux points correspondants des deux surfaces le sont toujours. Or, dans la sphère, la conjuguée d'une tangente est perpendiculaire à cette tangente. On peut donc énoncer la proposition suivante :

L'angle des tangentes en m et en M *aux deux courbes correspondantes mm' et* MM' *est complémentaire de l'angle formé par la tangente à la surface avec sa conjuguée.*

Ou autrement :

A une tangente MT *de la surface ayant pour conjuguée* MT' *correspond une tangente mt de la sphère perpendiculaire à* MT'.

Appliquons cette remarque générale aux cas particuliers les plus intéressants.

Supposons d'abord que MT soit une tangente asymptotique : elle coïncidera avec sa conjuguée MT' et sera, par conséquent, perpendiculaire à son image sphérique. On aura donc l'équation différentielle des lignes asymptotiques en écrivant que les déplacements correspondants sur la surface et sur la sphère sont perpendiculaires. On est ainsi conduit à l'équation

$$dx\,dc + dy\,dc' + dz\,dc'' = 0,$$

que l'on déduit, en effet, de la première des formules (24) (n° 115) en y faisant $t = 1$.

Prenons maintenant pour MT une tangente principale : MT sera perpendiculaire à MT' et, par conséquent, parallèle à mt; et, réciproquement, si MT est parallèle à mt, elle sera perpendiculaire à sa conjuguée. Ainsi, les tangentes principales sont caractérisées par la propriété d'être parallèles à leur représentation sphérique. En écrivant les conditions, de parallélisme, nous retrouvons les équations

$$\frac{dx}{dc} = \frac{dy}{dc'} = \frac{dz}{dc''},$$

qui sont celles d'Olinde Rodrigues, d'où l'on aurait éliminé le rayon de courbure R.

Nous aurons fréquemment l'occasion d'employer la représen-

tation sphérique et nous nous contenterons, pour le moment, des remarques élémentaires qui précèdent. Avant de continuer l'étude générale des propriétés des lignes de courbure, nous indiquerons comment on peut former leur équation différentielle dans les cas très variés qui peuvent se présenter.

143. Supposons d'abord que la surface soit considérée comme lieu de points et que les coordonnées rectangulaires x, y, z soient des fonctions données de deux paramètres α, β. On pourrait employer l'équation (4); la méthode suivante conduit au résultat d'une manière plus symétrique.

Les équations de la normale au point (x, y, z) seront

$$(X - x)\frac{\partial x}{\partial \alpha} + (Y - y)\frac{\partial y}{\partial \alpha} + (Z - z)\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

$$(X - x)\frac{\partial x}{\partial \beta} + (Y - y)\frac{\partial y}{\partial \beta} + (Z - z)\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0,$$

ou

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &X\frac{\partial x}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial y}{\partial \alpha} + Z\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial r}{\partial \alpha} = 0,\\ &X\frac{\partial x}{\partial \beta} + Y\frac{\partial y}{\partial \beta} + Z\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial r}{\partial \beta} = 0,\end{aligned}\right.$$

en posant, pour abréger,

$$(23)\qquad r = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

Exprimons que la normale engendre une surface développable, c'est-à-dire qu'il existe un déplacement pour lequel un point convenablement choisi (X, Y, Z) de cette droite satisfait aux équations

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}\,dX + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\,dY + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\,dZ = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta}\,dX + \frac{\partial y}{\partial \beta}\,dY + \frac{\partial z}{\partial \beta}\,dZ = 0.$$

Différentions les équations (22) en tenant compte des précédentes; nous aurons

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &X\,d\frac{\partial x}{\partial \alpha} + Y\,d\frac{\partial y}{\partial \alpha} + Z\,d\frac{\partial z}{\partial \alpha} - d\frac{\partial r}{\partial \alpha} = 0,\\ &X\,d\frac{\partial x}{\partial \beta} + Y\,d\frac{\partial y}{\partial \beta} + Z\,d\frac{\partial z}{\partial \beta} - d\frac{\partial r}{\partial \beta} = 0.\end{aligned}\right.$$

L'élimination de X, Y, Z entre les formules (22) et (24) nous donnera l'équation différentielle des lignes de courbure sous la forme d'un déterminant

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & d\frac{\partial x}{\partial \alpha} & d\frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & d\frac{\partial y}{\partial \alpha} & d\frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & d\frac{\partial z}{\partial \alpha} & d\frac{\partial z}{\partial \beta} \\ \frac{\partial r}{\partial \alpha} & \frac{\partial r}{\partial \beta} & d\frac{\partial r}{\partial \alpha} & d\frac{\partial r}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0;$$

et les formules (22) et (24) feront connaître le centre de courbure principal correspondant à chaque ligne de courbure.

Le résultat précédent peut être encore présenté sous la forme suivante. Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles de la forme

$$(26)\qquad A\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + B\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} + C\frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} + A'\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + B'\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0,$$

et exprimons qu'elle admet les quatre solutions particulières x, y, z, r; nous aurons ainsi quatre équations qui détermineront les rapports mutuels de A, B, C, A′, B′. L'équation linéaire pourra même s'écrire sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} & \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} & \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\, \partial \beta} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\, \partial \beta} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha\, \partial \beta} & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit de comparer cette équation au déterminant (25) pour reconnaître que l'équation différentielle des lignes de courbure, ordonnée par rapport à $d\alpha$, $d\beta$, pourra s'écrire

$$(27)\qquad A\, d\beta^2 - B\, d\alpha\, d\beta + C\, d\alpha^2 = 0,$$

A, B, C étant les coefficients qui figurent dans l'équation (26). Nous pouvons donc énoncer cette première proposition :

Lorsqu'on aura obtenu, par un procédé quelconque, l'équation aux dérivées partielles de la forme (26) *à laquelle satisfont à la fois* x, y, z *et* $x^2+y^2+z^2$, *l'équation différentielle des lignes de courbure sera donnée par la formule* (27). *En d'autres termes, les lignes de courbure seront les caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles.*

C'est la proposition déjà obtenue par une autre voie au n° 115.

144. Nous rattacherons au résultat qui précède le théorème suivant :

Étant donnée l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = A\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + B\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + C\theta,$$

où A, B, C *sont des fonctions quelconques de* α, β, *si l'on en connaît cinq solutions particulières liées par une équation homogène du second degré à coefficients constants, on pourra obtenir une surface dont on saura déterminer les lignes de courbure.*

Soient, en effet, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_5$ les cinq solutions satisfaisant à la relation homogène du second degré

$$\varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = 0.$$

On pourra, en effectuant sur ces solutions une substitution linéaire à coefficients constants, ramener la relation précédente à la forme

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - 2\theta_4\theta_5 = 0. \tag{28}$$

Faisons, dans l'équation en θ, la substitution

$$\theta = \sigma\theta_5;$$

σ satisfera, comme θ, à une équation linéaire; mais cette équation,

devant admettre la solution $\sigma = 1$, sera de la forme

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \alpha \, \partial \beta} = A_1 \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} + B_1 \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}$$

et ne contiendra plus le terme en σ. Elle admettra les solutions particulières

$$(29) \qquad x = \frac{\theta_1}{\theta_5}, \qquad y = \frac{\theta_2}{\theta_5}, \qquad z = \frac{\theta_3}{\theta_5}, \qquad r = \frac{\theta_4}{\theta_5},$$

qui sont liées par la relation

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = r.$$

Donc, en vertu de la proposition démontrée au numéro précédent, la surface lieu du point (x, y, z) admettra α et β pour paramètres de ses lignes de courbure.

145. Pour donner une application du théorème que nous venons d'établir, nous choisirons l'équation

$$(30) \qquad 2(\rho - \rho_1) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho \, \partial \rho_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} = 0,$$

qui admet la solution particulière

$$\theta = A \sqrt{(\rho - a)(\rho_1 - a)},$$

quelles que soient les constantes A, a. Nous allons prendre pour ces constantes cinq systèmes de valeurs de la manière suivante.

Posons

$$f(u) = (u - a_1)(u - a_2) \ldots (u - a_5).$$

Les cinq solutions θ_i définies par la formule générale

$$(31) \qquad \theta_i = \sqrt{\frac{(a_i - \rho)(a_i - \rho_1)(a_i - h)}{f'(a_i)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

satisferont à l'identité

$$\theta_1^2 + \ldots + \theta_5^2 = 0.$$

Prenons

$$x_1 = \theta_1, \qquad x_2 = \theta_2, \qquad x_3 = \theta_3,$$

$$x_4 = -\frac{R}{2}(\theta_4 - i\theta_5), \qquad x_5 = \frac{1}{R}\theta_4 + i\theta_5),$$

R désignant une constante quelconque; les cinq solutions x_i satisferont à l'identité (28). Les formules (29) nous donneront ici

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{R\theta_1}{\theta_4 + i\theta_5}, \qquad y = \dfrac{R\theta_2}{\theta_4 + i\theta_5}, \qquad z = \dfrac{R\theta_3}{\theta_4 + i\theta_5}, \\ \qquad x^2 + y^2 + z^2 = -R^2\dfrac{\theta_4 - i\theta_5}{\theta_4 + i\theta_5}, \end{array}\right.$$

et définiront une surface rapportée au système de coordonnées curvilignes formé par les lignes de courbure. On peut, d'ailleurs, trouver l'équation de cette surface de la manière suivante :

Les équations (32) nous donnent

$$\frac{\theta_1}{x} = \frac{\theta_2}{y} = \frac{\theta_3}{z} = \frac{\theta_4}{\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R}} = \frac{\theta_5}{\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2Ri}}.$$

D'autre part, les fonctions θ_i satisfont encore à l'identité

$$\sum_{i=1}^{i=5} \frac{\theta_i^2}{a_i - h} = 0;$$

en les remplaçant par les quantités qui leur sont proportionnelles, on obtient l'équation cherchée sous la forme

$$(33)\quad \frac{x^2}{a_1 - h} + \frac{y^2}{a_2 - h} + \frac{z^2}{a_3 - h} + \frac{\left(\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R}\right)^2}{a_4 - h} + \frac{\left(\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2Ri}\right)^2}{a_5 - h} = 0.$$

On trouvera de même les équations qui déterminent chaque ligne de courbure. En effet, les radicaux θ_i contiennent d'une manière symétrique les trois quantités h, ρ, ρ_1; l'équation précédente devra donc être encore vérifiée quand on y remplacera h par ρ et par ρ_1. Cette remarque nous conduit immédiatement à la proposition suivante :

Si, dans l'équation (33), *on considère h comme un paramètre variable, les surfaces correspondantes à deux valeurs distinctes de h se couperont mutuellement suivant une ligne de courbure commune à ces surfaces.*

Si l'on chasse les dénominateurs dans l'équation (33), on reconnaîtra que, le coefficient de h^4 étant nul, elle est du troisième degré seulement par rapport à h; par conséquent, si l'on donne à h toutes les valeurs possibles de manière à obtenir une famille de surfaces, il y aura trois surfaces de cette famille passant par chaque point de l'espace. Ces trois surfaces, devant se couper mutuellement suivant des lignes de courbure communes, seront nécessairement orthogonales. Ainsi, l'équation (33) définit un système triple orthogonal, analogue à celui qui est formé par les surfaces du second degré, et composé de trois familles représentées par la même équation. Si l'on suppose, par exemple, a_1, a_2, a_3, a_4 réels et rangés par ordre de grandeur, les trois familles correspondront aux valeurs de h comprises entre a_1 et a_2, entre a_2 et a_4, entre a_3 et a_4.

Les surfaces représentées par l'équation (33) sont du quatrième ordre et admettent pour ligne double le cercle de l'infini; elles ont reçu le nom de *cyclides*.

146. Nous indiquerons maintenant une application d'une autre nature. On sait que l'*inversion*, ou transformation par rayons vecteurs réciproques, définie, dans le cas le plus simple, par des formules telles que les suivantes :

$$(34)\qquad X = \frac{K^2 x}{x^2+y^2+z^2}, \qquad Y = \frac{K^2 y}{x^2+y^2+z^2}, \qquad Z = \frac{K^2 z}{x^2+y^2+z^2},$$

fait correspondre une sphère ou un plan à une sphère ou à un plan, qu'elle conserve les angles et les rapports de similitude des éléments infiniment petits. Nous allons montrer qu'elle conserve aussi les lignes de courbure.

Considérons, en effet, une surface quelconque (Σ), et soient ρ, ρ_1 les paramètres de ses lignes de courbure. Nous savons que x, y, z satisferont à une équation de la forme

$$(35)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1} = A\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + B\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1};$$

et cette équation se distingue de toutes celles qui seraient relatives à d'autres systèmes conjugués par la propriété, déjà signalée, d'admettre aussi comme solution $x^2+y^2+z^2$. Ces quatre solutions de l'équation (35) s'expriment, au moyen de X, Y, Z, de la

manière suivante :

$$\frac{K^2X}{X^2+Y^2+Z^2},\quad \frac{K^2Y}{X^2+Y^2+Z^2},\quad \frac{K^2Z}{X^2+Y^2+Z^2},\quad \frac{K^4}{X^2+Y^2+Z^2}$$

Si donc on effectue dans l'équation (35) la substitution

$$\theta = \frac{\sigma}{X^2+Y^2+Z^2},$$

l'équation en σ admettra les solutions particulières

$$X,\quad Y,\quad Z,\quad 1,$$

et sera, par conséquent, de la forme

$$(36)\qquad \frac{\partial^2\sigma}{\partial\rho\,\partial\rho_1} = A_1\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} + B_1\frac{\partial\sigma}{\partial\rho_1}.$$

D'ailleurs, l'équation (35) admettrait la solution évidente $\theta = 1$ et, par conséquent, l'équation (36) admettra, en même temps que X, Y, Z, la solution

$$\sigma = X^2+Y^2+Z^2.$$

Il résulte de là que la surface lieu du point (X, Y, Z) aura ρ, ρ_1 pour paramètres de ses lignes de courbure. Ce résultat est précisément celui qu'il s'agissait d'établir.

147. On démontre d'ordinaire la proposition précédente en la rattachant au théorème de Dupin, relatif aux lignes de courbure des surfaces qui font partie d'un système triple orthogonal. Nous donnerons, en terminant ce Chapitre, une démonstration nouvelle de ce théorème.

Soient

$$(40)\qquad \rho = f(x, y, z),\qquad \rho_1 = f_1(x, y, z),\qquad \rho_2 = f_2(x, y, z)$$

les équations de trois familles de surfaces qui se coupent mutuellement à angle droit. Si l'on résout ces équations par rapport à x, y, z, les relations

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned}
S\frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial x}{\partial\rho_1} &= \frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial x}{\partial\rho_1} + \frac{\partial y}{\partial\rho}\frac{\partial y}{\partial\rho_1} + \frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho_2} = 0,\\
S\frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial x}{\partial\rho_2} &= \frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial x}{\partial\rho_2} + \frac{\partial y}{\partial\rho}\frac{\partial y}{\partial\rho_2} + \frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho_2} = 0,\\
S\frac{\partial x}{\partial\rho_1}\frac{\partial x}{\partial\rho_2} &= \frac{\partial x}{\partial\rho_1}\frac{\partial x}{\partial\rho_2} + \frac{\partial y}{\partial\rho_1}\frac{\partial y}{\partial\rho_2} + \frac{\partial z}{\partial\rho_1}\frac{\partial z}{\partial\rho_2} = 0,
\end{aligned}\right.$$

où nous employons le signe S de Lamé pour indiquer une somme étendue aux trois coordonnées d'un même point, devront avoir lieu identiquement. Si nous différentions la première par rapport à ρ_2, la deuxième par rapport à ρ_1, la troisième par rapport à ρ, nous aurons

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} + \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial \rho_2} = 0,$$
$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} + \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0,$$
$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial \rho_2} + \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0$$

et, par suite,

$$(42)\qquad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial \rho_2} = \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0.$$

D'après cela, on voit que l'on aura trois systèmes différents de solutions de l'équation en u, v, w

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}u + \frac{\partial y}{\partial \rho}v + \frac{\partial z}{\partial \rho}w = 0,$$

si l'on prend, soit

$$u = \frac{\partial x}{\partial \rho_1}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial \rho_1}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial \rho_1},$$

soit

$$u = \frac{\partial x}{\partial \rho_2}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial \rho_2}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial \rho_2},$$

soit enfin

$$u = \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \qquad v = \frac{\partial^2 y}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \qquad w = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}.$$

Ces systèmes ne pouvant être linéairement indépendants, il faut que le dernier soit une combinaison linéaire des deux premiers, c'est-à-dire que x, y, z soient des solutions particulières d'une équation de la forme

$$(43)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = m\frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + n\frac{\partial \theta}{\partial \rho^2}.$$

Les variables ρ_1, ρ_2 définissent donc, sur la surface (ρ), un système conjugué, et comme, par la nature de la question, ce système est orthogonal, il est nécessairement composé des lignes de cour-

bure. On vérifie, d'ailleurs, aisément que l'équation linéaire (43) admet aussi la solution particulière

$$\theta = x^2 + y^2 + z^2.$$

148. La démonstration précédente conduit à une nouvelle méthode de recherche des systèmes orthogonaux. Nous venons de voir que les coordonnées x, y, z et la somme $x^2 + y^2 + z^2$ satisfont à l'équation (43), et il est clair que ces solutions satisfont à deux autres équations semblables en ρ, ρ_2 et ρ_1, ρ. Nous allons montrer, réciproquement, que *lorsque trois équations linéaires de la forme*

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} &= m\,\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + n\,\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2},\\ \frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_2} &= m_1\,\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2} + n_1\,\frac{\partial\theta}{\partial\rho},\\ \frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_1\,\partial\rho} &= m_2\,\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + n_2\,\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}\end{aligned}\right.$$

admettent trois solutions particulières x, y, z en même temps que la somme de leurs carrés $x^2 + y^2 + z^2$, le système de coordonnées curvilignes défini par les expressions de x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2 est nécessairement orthogonal.

Considérons, en effet, l'une des surfaces coordonnées (ρ); le système de coordonnées curvilignes (ρ_1, ρ_2), déterminé sur cette surface par les deux autres familles, est formé des lignes de courbure de cette surface; car x, y, z, considérées comme des fonctions de ρ_1, ρ_2, satisfont, en même temps que $x^2 + y^2 + z^2$, à la première des équations précédentes. Les surfaces des trois familles, se coupant mutuellement suivant leurs lignes de courbure, seront nécessairement orthogonales.

149. Pour ne pas traiter ce sujet d'une manière incomplète, nous remarquerons qu'on peut obtenir aisément les coefficients m, n, ... quand on connaît l'expression de l'élément linéaire

$$ds^2 = H^2\,d\rho^2 + H_1^2\,d\rho_1^2 + H_2^2\,d\rho_2^2,$$

dans le système orthogonal. Si l'on différentie, en effet, par rapport

à ρ_1 l'équation

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 = \mathrm{H}^2,$$

on aura

$$\mathrm{H}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \rho_1} = \mathrm{S}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho\, \partial \rho_1}$$

et, en remplaçant $\frac{\partial^2 x}{\partial \rho\, \partial \rho_1}$ par sa valeur déduite de la dernière équation (44),

$$\mathrm{H}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \rho_1} = m_2 \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + n^2 \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} = m_2 \mathrm{H}^2.$$

On a donc

$$m_2 = \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \rho_1}.$$

Si l'on substitue cette expression et les valeurs analogues de n_2, m, n, ... dans les équations (44), on les obtient sous la forme

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_1\, \partial \rho_2} &= \frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial \rho_1}\frac{\partial \theta}{\partial \rho_2}, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_2\, \partial \rho} &= \frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial \rho}\frac{\partial \theta}{\partial \rho_2} + \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \rho_2}\frac{\partial \theta}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho\, \partial \rho_1} &= \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \rho_1}\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial \rho}\frac{\partial \theta}{\partial \rho_1}, \end{aligned}\right.$$

qui est due à Lamé.

149 *bis*. Le résultat que nous venons d'obtenir est une simple application d'un principe général qui se montrera fécond et que l'on peut énoncer comme il suit :

Toutes les fois que l'on connaît l'élément linéaire d'une surface rapportée à un système de coordonnées curvilignes formé de lignes conjuguées, on peut former l'équation linéaire à laquelle satisfont les trois coordonnées cartésiennes d'un point de la surface.

Soit en effet

$$(46)\qquad ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2$$

l'expression de l'élément linéaire. Nous savons que les coordonnées cartésiennes x, y, z satisfont à une équation de la forme

$$(47)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + a\frac{\partial \theta}{\partial u} + b\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Si nous multiplions cette équation par $\frac{\partial \theta}{\partial u}$ et que nous ajoutions les résultats obtenus en substituant x, y, z à θ, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} + aE + bF = 0. \tag{48}$$

En opérant de même avec v, on a

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} + aF + bG = 0. \tag{49}$$

Les deux équations (48) et (49) déterminent évidemment a et b.

CHAPITRE VI.

LES COORDONNÉES PENTASPHÉRIQUES.

Équation d'une sphère mise sous une forme qui permet d'affecter un signe au rayon. — Système de cinq sphères deux à deux orthogonales. — Leur théorie se ramène à celle d'une substitution linéaire orthogonale à cinq variables. — Relations entre les puissances d'un point par rapport à cinq sphères orthogonales. — Coordonnées pentasphériques. — Distance de deux points, élément linéaire de l'espace, relations d'orthogonalité exprimées avec ce système de coordonnées. — Équation linéaire du second ordre à laquelle satisfont les cinq coordonnées pentasphériques. — Ses caractéristiques sont les lignes de courbure. — Système triple orthogonal formé avec les cyclides les plus générales. — De même que les coordonnées homogènes d'un point ou d'un plan ne changent pas quand on soumet la figure à une homographie, de même les coordonnées pentasphériques ne changent pas lorsqu'on effectue une inversion.

Formules principales relatives à la sphère. — Les six coordonnées homogènes de la sphère. — La transformation de Lie qui fait correspondre une sphère à une ligne droite. — Deux définitions de cette transformation.

---

150. Dans l'étude des systèmes conjugués, nous avons vu que l'emploi des coordonnées homogènes et tangentielles met en évidence les propriétés projectives et dualistiques qui appartiennent à ces systèmes. Si l'on veut, de même, donner une exposition satisfaisante de la théorie analytique des lignes de courbure, on est conduit à introduire un système particulier de coordonnées auxquelles nous avons donné le nom de coordonnées *pentasphériques*. Nous nous proposons de définir, dans ce Chapitre, ce système de coordonnées et d'indiquer son rôle dans la théorie des lignes de courbure.

Considérons une sphère quelconque rapportée à des axes rectangulaires

$$K(x^2+y^2+z^2)+2Ax+2By+2Cz+D=0.$$

Son rayon ρ sera donné par la formule

$$\rho^2=\frac{A^2+B^2+C^2-DK}{K^2}.$$

La forme quadratique qui figure au numérateur joue un rôle fondamental dans la théorie de la sphère. Il est naturel de la ramener à une somme de carrés; et, dans ce but, nous écrivons l'équation de la sphère sous la forme

$$(1)\quad 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} + i\varepsilon\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R} = 0.$$

Si l'on désigne par ρ le rayon et par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de cette sphère, on obtiendra les expressions suivantes de ces quantités :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{-\alpha R}{\delta + i\varepsilon}, \qquad y_0 = \dfrac{-\beta R}{\delta + i\varepsilon}, \qquad z_0 = \dfrac{-\gamma R}{\delta + i\varepsilon}, \\ \rho = \dfrac{R\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2}}{\delta + i\varepsilon}, \qquad x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \rho^2 = -R^2\dfrac{\delta - i\varepsilon}{\delta + i\varepsilon}. \end{array}\right.$$

Si la sphère n'est pas réduite à un point, on pourra toujours supposer que l'on ait

$$(3)\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2 = 1,$$

et l'expression du rayon prendra la forme simple

$$(4)\qquad \rho = \frac{R}{\delta + i\varepsilon}.$$

Cette formule donne au rayon un signe déterminé; nous reviendrons plus loin sur ce point.

Si l'on substitue dans le premier membre de l'équation (1) les coordonnées d'un point quelconque, ce premier membre aura pour valeur

$$(5)\qquad \frac{S}{\rho},$$

S désignant la puissance du point par rapport à la sphère considérée. Remarquons une fois pour toutes que, si la sphère se réduit à un plan, on aura

$$\delta + i\varepsilon = 0,$$

et le premier membre de l'équation (1) deviendra égal au double de la distance du point à ce plan.

Supposons maintenant que l'on considère, en même temps que

la sphère représentée par l'équation (1), une autre sphère (S′) représentée par l'équation semblable

$$2\alpha' x + 2\beta' y + \ldots = 0.$$

Soient ρ' le rayon et x'_0, y'_0, z'_0 les coordonnées du centre de cette seconde sphère. Les formules (2) nous donnent la relation

$$(6)\qquad \begin{aligned}(x_0 - x'_0)^2 + (y_0 - y'_0)^2 + (z_0 - z'_0)^2 - \rho^2 - \rho'^2 \\ = -\frac{2R^2(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta' + \varepsilon\varepsilon')}{(\delta + i\varepsilon)(\delta' + i\varepsilon')},\end{aligned}$$

et, par suite, l'équation

$$(7)\qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta' + \varepsilon\varepsilon' = 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les deux sphères se coupent à angle droit. Cette condition subsiste quand l'une ou l'autre des sphères se réduit à un plan; sa forme nous permettra de donner une théorie très simple du système de cinq sphères deux à deux orthogonales.

151. Considérons, en effet, cinq sphères (S_1), (S_2), ..., (S_5), de rayons R_1, ..., R_5, et écrivons leurs équations sous la forme

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\alpha_k x + 2\beta_k y + 2\gamma_k z + \delta_k \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{R} + i\varepsilon_k \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{R} = 0 \\ &\qquad (k = 1, 2, \ldots, 5).\end{aligned}\right.$$

Nous aurons d'abord, par hypothèse,

$$(9)\qquad \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 + \delta_k^2 + \varepsilon_k^2 = 1,$$

et de plus, les sphères étant orthogonales,

$$(10)\qquad \alpha_k\alpha_{k'} + \beta_k\beta_{k'} + \gamma_k\gamma_{k'} + \delta_k\delta_{k'} + \varepsilon_k\varepsilon_{k'} = 0.$$

Ces deux groupes de formules rattachent la théorie du système des sphères à celle d'une substitution linéaire orthogonale à cinq variables. Toute substitution de ce genre fournira un groupe de cinq sphères orthogonales et *vice versa*.

On sait que les relations (9) et (10) entraînent comme conséquence les suivantes :

$$(11)\qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_5^2 = 1,$$

$$(12)\qquad \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_5\beta_5 = 0.$$

et toutes celles que l'on obtiendrait en remplaçant, d'une manière quelconque, α et β par α, β, γ, δ, ε.

On déduit de cette remarque une première propriété, fondamentale dans la théorie qui nous occupe. Désignons par S_k la puissance d'un point quelconque par rapport à la sphère (S_k); le premier membre de l'équation (8) sera $\frac{S_k}{R_k}$. Si on élève cette équation au carré et si l'on ajoute toutes les équations ainsi obtenues, on trouvera, en appliquant les formules (11) et (12),

$$\sum_1^5 \left(\frac{S_k}{R_k}\right)^2 = \left(\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{Ri}\right)^2 + 4x^2+4y^2+4z^2 = 0.$$

Ainsi, il existe, entre les puissances d'un point quelconque par rapport aux cinq sphères, la relation homogène

$$\sum \left(\frac{S_k}{R_k}\right)^2 = 0. \tag{13}$$

Nous rappelons que, si l'une des sphères (S_k) se réduit à un plan (P_k), $\frac{S_k}{R_k}$ doit être remplacé par $2P_k$, P_k désignant la distance, affectée de signe, du point (x, y, z) à ce plan.

Si l'on multiplie, de même, le premier membre de l'équation (8) par $\delta_k = i\varepsilon_k$, on trouve, en ajoutant les équations ainsi obtenues,

$$\sum (\delta_k + i\varepsilon_k)\frac{S_k}{R_k} = -2R$$

ou encore

$$\sum \frac{S_k}{R_k^2} = -2, \tag{14}$$

en remarquant que, d'après la formule (4), on a

$$\delta_k + i\varepsilon_k = \frac{R}{R_k}.$$

152. Nous pouvons maintenant définir le système de coordonnées que nous nous proposons d'étudier. Nous appellerons *coordonnées pentasphériques* d'un point les cinq quantités x_k

proportionnelles à $\frac{S_k}{R_k}$ et nous poserons

$$x_k = \lambda \frac{S_k}{R_k}. \tag{15}$$

Comme nous n'emploierons que des équations homogènes, le facteur λ n'aura aucune influence sur les résultats. On trouvera d'ailleurs, en vertu de la formule (13),

$$x_1^2 + x_2^2 + x_5^2 = 0. \tag{16}$$

Ainsi, nos cinq coordonnées seront toujours, comme il fallait s'y attendre, liées par une relation homogène. Il est aisé de montrer qu'il n'y a pas entre elles d'autre relation et que cinq quantités satisfaisant à l'équation (15) déterminent un point et un seul.

Remarquons, en effet, que les équations (13) et (14) contiennent toutes les relations possibles entre les quantités S_k; car, pour déterminer un point, trois de ces quantités peuvent être choisies arbitrairement. D'ailleurs, si l'on substitue dans ces relations l'expression de S_k en x_k, la première se réduit à l'équation (16), qui est vérifiée par hypothèse, la seconde devient

$$-2\lambda = \sum \frac{x_k}{R_k}, \tag{17}$$

et fait connaître le facteur de proportionnalité λ.

Au reste, on peut obtenir les expressions de x, y, z en fonction des variables x_k; il suffit de résoudre le système

$$\begin{aligned} &2\alpha_k x + 2\beta_k y + 2\gamma_k z \\ &\quad + \delta_k \frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} + i\varepsilon_k \frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R} = \frac{S_k}{R_k} = \frac{x_k}{\lambda}, \end{aligned} \tag{18}$$

où l'on donne à k les valeurs 1, 2, ..., 5. En ajoutant ces équations après les avoir multipliées soit par α_k, soit par β_k, γ_k, δ_k, ε_k, on trouve

$$\left\{ \begin{aligned} &2\lambda x = \sum_1^5 \alpha_k x_k, \qquad \lambda(x^2+y^2+z^2-R^2) = R\sum_1^5 \delta_k x_k, \\ &2\lambda y = \sum_1^5 \beta_k x_k, \qquad \lambda(x^2+y^2+z^2+R^2) = -iR\sum_1^5 \varepsilon_k x_k, \\ &2\lambda z = \sum_1^5 \gamma_k x_k. \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Les deux dernières équations feront connaître, par soustraction, le facteur λ sous la forme

$$(20) \qquad 2\lambda R = -\Sigma(\delta_k + i\varepsilon_k)x_k,$$

qui est équivalente à l'équation (17); les autres donneront x, y, z et même $x^2+y^2+z^2$ [1].

En même temps qu'un point M, dont les coordonnées x, y, z et x_k sont liées par les formules (18), considérons un autre point M′ dont nous désignerons les coordonnées par les mêmes lettres accentuées x', y', z' et x'_k. On trouvera sans difficulté

$$(21) \qquad \begin{aligned} \overline{MM'}^2 &= (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 \\ &= -\frac{\Sigma x_k x'_k}{2\lambda\lambda'} = \frac{-2\Sigma x_k x'_k}{\sum \frac{x_k}{R_k} \sum \frac{x'_k}{R_k}}. \end{aligned}$$

Telle est la formule qui donne la distance de deux points. Si l'on tient compte des relations identiques entre les coordonnées, on peut lui donner la forme

$$(22) \qquad \overline{MM'}^2 = \frac{\Sigma(x_k - x'_k)^2}{\sum \frac{x_k}{R_k} \sum \frac{x'_k}{R_k}}.$$

---

[1] Si l'on voulait se livrer à une étude plus détaillée, il faudrait signaler un cas d'exception. La formule (13) montre que les cinq rayons satisfont à la relation

$$\sum_1^5 \frac{1}{R_k^2} = 0;$$

si l'on cherche le point pour lequel on a

$$x_k = \frac{1}{R_k},$$

on trouvera qu'il est indéterminé et n'est assujetti qu'à une condition, celle d'être dans le plan de l'infini.

D'autre part, un point du cercle de l'infini a une infinité de coordonnées qui sont déterminées par la formule

$$x_k + \frac{h}{R_k},$$

où h est quelconque et où les x_k satisfont, en même temps qu'à l'équation (16), à la relation

$$\sum \frac{x_k}{R_k} = 0.$$

Lorsque les deux points sont infiniment voisins, on obtient l'expression suivante de l'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{\Sigma\, dx_k^2}{\left(\sum \frac{x_k}{R_k}\right)^2}. \tag{23}$$

Il est inutile d'insister sur l'analogie que présentent ces deux formules avec celles qui se rapportent à la Géométrie de Descartes.

153. Proposons-nous maintenant d'établir les relations d'orthogonalité dans le système des coordonnées x_i.

Quand les coordonnées sont fonctions de deux variables ρ, ρ_1, les courbes (ρ), (ρ_1) seront perpendiculaires si le coefficient de $d\rho\, d\rho_1$ est nul dans l'élément linéaire, c'est-à-dire, d'après la formule (23), dans la somme

$$\Sigma\, dx_k^2.$$

Cette condition se traduit par la relation

$$\sum \frac{\partial x_k}{\partial \rho} \frac{\partial x_k}{\partial \rho_1} = 0, \tag{24}$$

toute semblable à celle que l'on obtient avec les coordonnées cartésiennes.

Étant données maintenant deux surfaces par les équations homogènes

$$\varphi(x_1, \ldots, x_5) = 0, \qquad \psi(x_1, \ldots, x_5) = 0,$$

cherchons la condition pour qu'elles se coupent à angle droit.

Nous remarquerons d'abord les relations suivantes, qu'il est aisé de vérifier, entre les puissances d'un point par rapport aux cinq sphères orthogonales

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial S_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_k}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_k}{\partial z}\right)^2 = 4(S_k + R_k^2), \\ &\frac{\partial S_k}{\partial x}\frac{\partial S_{k'}}{\partial x} + \frac{\partial S_k}{\partial y}\frac{\partial S_k}{\partial y} + \frac{\partial S_k}{\partial z}\frac{\partial S_{k'}}{\partial z} = 2(S_k + S_{k'}). \end{aligned}\right. \tag{25}$$

D'après cela, remplaçons, dans les équations homogènes des deux surfaces, les x_i par les quantités proportionnelles $\frac{S_i}{R_i}$ et posons,

pour abréger,

$$(\varphi, \psi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

On aura évidemment

$$(\varphi, \psi) = \sum\sum \frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\frac{\partial\psi}{\partial S_{k'}}(S_k, S_{k'}),$$

c'est-à-dire, en tenant compte des formules (25),

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi) = \quad & 2\left(\sum S_k \frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\right)\left(\sum \frac{\partial\psi}{\partial S_k}\right) \\ & + 2\left(\sum S_k \frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\right)\left(\sum \frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\right) + 4\sum R_k^2 \frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\frac{\partial\psi}{\partial S_k}.\end{aligned}$$

Puisque les fonctions sont homogènes, on a

$$\sum S_k \frac{\partial\varphi}{\partial S_k} = m\varphi = 0, \qquad \sum S_k \frac{\partial\psi}{\partial S_k} = n\psi = 0,$$

et la condition d'orthogonalité prend la forme

$$(\varphi, \psi) = 4\sum R_k^2 \frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\frac{\partial\psi}{\partial S_k} = 0$$

ou, en introduisant les quantités x_i,

$$(26) \qquad (\varphi, \psi) = 4\sum_1^5 \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} = 0.$$

Plus généralement, le cosinus de l'angle V, sous lequel deux surfaces se coupent et qui est donné par la formule

$$\cos V = \frac{(\varphi, \psi)}{\sqrt{(\varphi, \varphi)(\psi, \psi)}},$$

aura pour expression

$$(27) \qquad \cos V = \frac{\sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^2}\sqrt{\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)^2}}.$$

154. Avant de continuer l'étude des coordonnées x_i, nous indiquerons leur rôle dans la théorie des lignes de courbure.

Considérons une surface quelconque et supposons que les coordonnées x_i d'un point quelconque de cette surface soient

exprimées en fonction de deux variables indépendantes α, β. Formons l'équation linéaire

$$(28)\qquad A\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2}+B\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}+C\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}+D\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+E\frac{\partial\theta}{\partial\beta}+F\theta=0,$$

à laquelle satisfont les cinq coordonnées. Nous allons montrer que ses caractéristiques sont les lignes de courbure de la surface.

Si l'on pose, en effet,

$$\theta=\lambda\sigma,$$

λ étant le facteur de proportionnalité qui figure dans les formules (15) et qui est défini par l'équation (17), l'équation linéaire prendra la forme

$$A\frac{\partial^2\sigma}{\partial\alpha^2}+B\frac{\partial^2\sigma}{\partial\alpha\,\partial\beta}+C\frac{\partial^2\sigma}{\partial\beta^2}+D'\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}+E'\frac{\partial\sigma}{\partial\beta}=0,$$

d'où le terme en σ a disparu, puisque λ, étant une fonction linéaire des x_i, est une solution particulière de l'équation (28). L'équation en σ, admettant les cinq solutions $\frac{x_i}{\lambda}$ ou $\frac{R_i}{S_i}$ qui sont des fonctions linéairement indépendantes de $x^2+y^2+z^2$, x, y, z, 1, devra admettre comme solutions particulières les mêmes fonctions

$$1,\quad x,\quad y,\quad z,\quad x^2+y^2+z^2.$$

Ce sera donc l'équation considérée au n° 143 et dont les caractéristiques sont les lignes de courbure. Les caractéristiques de l'équation en σ étant les mêmes que celles de l'équation en θ, notre proposition est démontrée. On en déduit immédiatement la conséquence suivante, qui, au fond, revient au théorème du n° 144 :

Si l'on connaît cinq solutions particulières $x_1, \ldots, x_5$ d'une équation linéaire

$$(29)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}=A\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+B\frac{\partial\theta}{\partial\beta}+C\theta,$$

liées par la relation

$$\Sigma x_i^2=0,$$

les quantités x_i sont les coordonnées pentasphériques d'un point d'une surface pour laquelle α et β sont les paramètres des lignes de courbure.

De même, le théorème relatif aux systèmes orthogonaux, donné au n° 148, recevra l'expression nouvelle qui suit :

Étant données trois équations linéaires

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\rho_2\partial\rho_1} = m\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + n\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_2} + p\theta, \\ \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_2} = m_1\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho^2} + n_1\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho} + p_1\theta, \\ \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1} = m_2\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho} + n_2\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + p_2\theta, \end{cases}$$

si l'on en connaît cinq solutions particulières x_i satisfaisant à la condition

$$\Sigma x_i^2 = 0,$$

elles pourront être regardées comme les coordonnées pentasphériques d'un point de l'espace, et ρ, ρ_1, ρ_2 seront les paramètres de trois familles de surfaces se coupant mutuellement à angle droit (¹).

Considérons, en particulier, les trois équations

$$(31)\quad \begin{cases} 2(\rho_1-\rho_2)\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\rho_1\rho_2} + \dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_1} - \dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_2} = 0, \\ 2(\rho_2-\rho)\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_2} + \dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_2} - \dfrac{\partial\theta}{\partial\rho} = 0, \\ 2(\rho-\rho_1)\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1} + \dfrac{\partial\theta}{\partial\rho} - \dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_1} = 0, \end{cases}$$

qui admettent la solution commune

$$\theta = A\sqrt{(a-\rho)(a-\rho_1)(a-\rho_2)};$$

si l'on pose

$$(32)\qquad f(u) = (u-a_1)(u-a_2)\ldots(u-a_5),$$

les cinq solutions définies par la formule générale

$$(33)\qquad x_i = \sqrt{\frac{(a_i-\rho)(a_i-\rho^1)(a_i-\rho_2)}{f'(a_i)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

(¹) G. Darboux, *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux* (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. VII, 1878, p. 297).

satisferont à l'identité

$$\Sigma x_i^2 = 0.$$

Les formules (33) détermineront, par conséquent, un système triple orthogonal. Les surfaces qui le composent, et qui ont reçu le nom de *cyclides*, ne sont autres que les transformées par inversion de celles qui ont été définies au n° 145; elles sont représentées par l'équation unique

$$(34) \qquad \sum \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0,$$

où l'on remplacera λ successivement par ρ, ρ_1, ρ_2. Au reste, on vérifie immédiatement, en appliquant la condition d'orthogonalité (26), que deux surfaces correspondantes à deux valeurs différentes de λ se coupent mutuellement à angle droit. En se servant des formules (33), on trouvera la formule

$$(35) \qquad 4\sum dx_k^2 = \frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{f(\rho)} d\rho^2 + \frac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}{f(\rho_1)} d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}{f(\rho_2)} d\rho_2^2,$$

qui permet d'obtenir l'expression de l'élément linéaire dans le système orthogonal considéré. La formule (23) nous donnera

$$(36) \qquad M^2 ds^2 = \frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{f(\rho)} d\rho^2 + \frac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}{f(\rho_1)} d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}{f(\rho_2)} d\rho_2^2,$$

M ayant pour valeur

$$(37) \qquad M = 2\sum_1^5 \frac{1}{R_k}\sqrt{\frac{(a_k-\rho)(a_k-\rho_1)(a_k-\rho_2)}{f'(a_k)}}.$$

Si l'on fait, en particulier, $\rho_2 = \text{const.}$, on obtient l'élément linéaire d'une des cyclides qui composent le système sous la forme

$$M^2 ds^2 = (\rho - \rho^1)\left[\frac{\rho-\rho_2}{f(\rho)} d\rho^2 - \frac{\rho_1-\rho_2}{f(\rho_1)} d\rho_1^2\right].$$

On voit que les cyclides possèdent la propriété, que nous avons déjà reconnue aux surfaces du second degré (n° 121), d'être divi-

sibles en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure. On pourra donc faire la carte d'une région quelconque tracée sur l'une de ces surfaces.

155. Dans la théorie des systèmes conjugués et des lignes asymptotiques, l'emploi des coordonnées homogènes nous a permis de reconnaître immédiatement, et sans calcul, que les propriétés de ces systèmes et de ces lignes subsistent quand on soumet la surface à une transformation homographique ou à une transformation par polaires réciproques. Les coordonnées homogènes d'un point quelconque ne changent pas, en effet, quand on effectue une transformation homographique quelconque, pourvu que l'on suppose cette transformation effectuée sur le tétraèdre de référence en même temps que sur les points de l'espace. Le système des coordonnées pentasphériques jouit d'une propriété analogue par rapport à l'inversion. Voici comment on peut le démontrer.

Rappelons d'abord que la théorie du contact des sphères, celle des centres et des axes de similitude ont conduit les géomètres à considérer le rayon d'une sphère comme une quantité susceptible de signe; de sorte que, dans beaucoup de recherches, il y a le plus grand avantage à regarder comme distinctes deux sphères de même centre, mais dont les rayons sont égaux et de signes contraires. Nous allons voir, en particulier, que, si l'on soumet une sphère quelconque à une inversion, on peut déterminer rationnellement le rayon de la sphère transformée en fonction du rayon de la sphère proposée.

Soient, en effet,

$$(38)\quad x = \frac{k^2 X}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad y = \frac{k^2 Y}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad z = \frac{k^2 Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

les formules qui définissent l'inversion.

Par l'application de ces formules à la transformation d'une sphère (S), de centre x_0, y_0, z_0 et de rayon r, définie par l'équation

$$(39)\qquad S = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0,$$

on obtient l'identité

$$(40)\quad S = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}[(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 - R^2],$$

où X_0, Y_0, Z_0 sont donnés par les formules

$$(41) \qquad \frac{X_0}{x} = \frac{Y_0}{y} = \frac{Z_0}{z} = \frac{k^2}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2},$$

et où l'on a

$$R = \frac{\pm k^2 r}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2}.$$

On pourra prendre un signe arbitraire dans cette dernière formule; mais, si l'on convient de prendre constamment le même signe, par exemple le signe $+$, les formules (41) et la suivante

$$(42) \qquad R = \frac{k^2 r}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2}$$

détermineront, non seulement la position de la sphère transformée, mais encore le signe de son rayon. Dans cette hypothèse, la formule (40) deviendra

$$\frac{S}{r} = \frac{k^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} \frac{S'}{R},$$

S' désignant la puissance du point (X, Y, Z) par rapport à la sphère transformée, et l'on peut énoncer le résultat suivant :

Si l'on divise la puissance S *d'un point quelconque* M *par rapport à une sphère par le rayon* r *de cette sphère, et que l'on soumette la figure entière à une inversion, le quotient* $\frac{S}{r}$ *se reproduira multiplié par une quantité qui ne dépend pas de la sphère et ne contient que les coordonnées du point* M.

En particulier, les cinq quantités $\frac{S_i}{R_i}$ se reproduisent toutes multipliées par le même nombre et, comme les coordonnées x_i leur sont proportionnelles, on peut dire que ces coordonnées demeurent invariables, le facteur de proportionnalité étant seul changé, pourvu que l'on rapporte la nouvelle figure aux sphères orthogonales qui dérivent des sphères primitives par l'inversion considérée. On voit ainsi que toutes les propriétés établies pour une figure et indépendantes du choix des sphères coordonnées subsisteront nécessairement pour toutes les figures inverses de la figure considérée.

Cette proposition étant admise, le théorème du n° 154 montre

immédiatement que l'inversion conservera les lignes de courbure de la surface.

156. Nous terminerons en indiquant les formules principales relatives à la sphère. L'équation (21), qui donne la distance de deux points, nous permet d'écrire immédiatement l'équation d'une sphère dont le rayon est ρ et dont le centre a pour coordonnées $\alpha_1, \ldots, \alpha_3$, sous la forme

$$(43) \qquad 2\sum \alpha_k x_k + \rho^2 \sum \frac{\alpha_k}{R_k} \sum \frac{x_k}{R_k} = 0.$$

Cette équation est linéaire par rapport aux coordonnées x_i.

Réciproquement, toute équation de la forme

$$(44) \qquad \sum_1^5 m_k x_k = 0$$

représente une sphère ou un plan. Il suffit, pour le reconnaître, de remplacer les x_k par leurs expressions (18) en x, y, z. Pour obtenir le centre et le rayon de cette sphère, il faudra identifier les équations (43) et (44). On a ainsi les équations

$$(45) \qquad \mu m_k = 2\alpha_k + \frac{\rho^2}{R_k} \sum \frac{\alpha_k}{R_k} \qquad (k = 1, \ldots, 5),$$

où μ désigne le facteur de proportionnalité.

Comme on peut multiplier les α_k par un nombre quelconque, on peut remplacer le facteur μ par un nombre arbitrairement choisi; nous ferons, par exemple,

$$\mu = 2.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (45) par $\frac{1}{R_k}$ et ajoutons les équations correspondant aux diverses valeurs de l'indice k. En tenant compte de la relation

$$\sum \frac{1}{R_k^2} = 0,$$

déjà signalée dans la note du n° 152, nous aurons

$$\sum \frac{\alpha_k}{R_k} = \sum \frac{m_k}{R_k}.$$

D'autre part, si nous ajoutons encore les équations (45), après avoir élevé leurs deux membres au carré, nous trouverons

$$\sum_1^5 m_k^2 = \rho^2 \left(\sum \frac{\alpha_k}{R_k} \right)^2.$$

Le rapprochement des deux formules précédentes nous donnera

$$\rho = \frac{\sqrt{\Sigma m_k^2}}{\sum \frac{m_k}{R_k}}, \tag{46}$$

et, en portant cette valeur de ρ dans l'équation (45), nous aurons

$$\alpha_k = m_k - \frac{1}{2R_k} \frac{\Sigma m_k^2}{\sum \frac{m_k}{R_k}}. \tag{47}$$

Telle est la formule qui fera connaître les coordonnées pentasphériques du centre.

Une sphère est complètement déterminée si l'on connaît les rapports des cinq quantités m_k que, pour cette raison, on peut appeler les *coordonnées homogènes de la sphère*. Mais, dans toutes les questions où le signe du rayon entre en considération, il est nécessaire d'introduire une coordonnée nouvelle, propre à faire connaître la valeur du radical qui figure dans l'expression du rayon. Nous poserons, en désignant par m_6 cette sixième coordonnée,

$$i m_6 = \sqrt{\sum_1^5 m_k^2}, \tag{48}$$

afin que la relation entre les six coordonnées prenne la forme très symétrique

$$\sum_1^6 m_k^2 = 0. \tag{49}$$

Deux sphères ayant même centre et des rayons égaux et de signes contraires auront les mêmes coordonnées $m_1, \ldots, m_5$; mais les coordonnées m_6 seront égales et de signes contraires. On aura,

d'après la formule (46),

$$\rho = \frac{i m_6}{\sum_1^5 \frac{m_k}{R_k}}. \tag{50}$$

Cela posé, considérons deux sphères (S), (S′), de coordonnées m_k, m'_k respectivement, et soient d la distance de leurs centres, ρ, ρ' leurs rayons. Les formules (21) et (47) nous permettent de calculer d et nous donnent

$$d^2 - \rho^2 - \rho'^2 = \frac{-2\sum_1^5 m_k m'_k}{\sum_1^5 \frac{m_k}{R_k} \sum_1^5 \frac{m'_k}{R_k}}. \tag{51}$$

Si donc nous voulons calculer l'angle V des deux sphères, en le définissant d'une manière précise par la relation

$$d^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos V, \tag{52}$$

nous aurons, en appliquant les formules (50), (51),

$$m_6 m'_6 \cos V = -\sum_1^5 m_k m'_k \tag{53}$$

et, par conséquent,

$$2 m_6 m'_6 \sin^2 \frac{V}{2} = \sum_1^6 m_k m'_k. \tag{54}$$

Ces formules vont nous conduire à plusieurs conséquences et, en particulier, à la définition géométrique des coordonnées de la sphère.

Supposons que la sphère (S′) se réduise à la sphère coordonnée (S_k), on aura

$$m'_1 = 0, \quad \ldots, \quad m'_k = 1, \quad \ldots, \quad m'_5 = 0,$$

et la formule (50), où l'on fera $\rho = R_k$, nous donnera

$$m'_6 = -i;$$

l'équation (53) deviendra donc

$$m_k = i m_6 \cos V_k,$$

V_k désignant l'angle de la sphère (S) avec la sphère (S_k).

Ainsi, les cinq premières coordonnées $m_1, \ldots, m_5$ d'une sphère quelconque sont proportionnelles aux cosinus des angles de cette sphère avec les sphères coordonnées. De plus, la relation entre les six coordonnées prendra la forme

$$\sum_1^5 \cos^2 V_k = 1,$$

tout à fait analogue à celle qui relie les angles d'un plan avec les trois plans coordonnés dans la Géométrie de Descartes. La formule (53) pourra s'écrire aussi sous la forme

$$\cos V = \sum_1^5 \cos V_k \cos V'_k, \tag{55}$$

et son analogie avec celle qui donne le cosinus de l'angle de deux plans est également évidente.

La formule (54), si l'on tient compte de la relation identique entre les coordonnées, peut s'écrire

$$4 m_6 m'_6 \sin^2 \frac{V}{2} = -\sum_1^6 (m_k - m'_k)^2. \tag{56}$$

Si l'on suppose que les deux sphères sont infiniment voisines, leur angle dv sera donc fourni par la relation

$$m_6^2\, dv^2 = -\sum_1^6 dm_k^2. \tag{57}$$

Toutes les fois que deux sphères sont tangentes, elles se coupent sous l'angle zéro ou π; mais, dans les théories où l'on tient compte du signe du rayon, il y a avantage à considérer comme tangentes seulement celles qui se coupent sous l'angle zéro. Ainsi

entendue, la condition de contact s'exprime par la relation

$$(58)\qquad \sum_1^6 (m_k - m'_k)^2 = -2\sum_1^6 m_k m'_k = 0.$$

Quand les deux sphères sont infiniment voisines, la distinction relative au signe du rayon disparaît et la condition de contact devient

$$(59)\qquad \sum_1^6 dm_k^2 = 0.$$

157. La forme de la condition de contact conduit à un rapprochement capital entre la géométrie des sphères et celle des lignes droites. Reprenons les équations de la ligne droite, écrites sous la forme déjà employée au n° 139,

$$(60)\qquad \begin{cases} qz - ry + p_1 = 0, \\ rx - pz + q_1 = 0, \\ py - qx + r_1 = 0. \end{cases}$$

Les six coordonnées homogènes de la ligne droite satisfont, nous l'avons vu, à l'équation identique

$$(61)\qquad pp_1 + qq_1 + rr_1 = 0,$$

et réciproquement (n° 139), six quantités satisfaisant à cette relation définiront toujours une ligne droite. L'équation (61) est quadratique, comme la relation (49) entre les six coordonnées de la sphère, et l'on peut ramener ces relations l'une à l'autre en posant

$$(62)\qquad \begin{cases} p = m_1 + im_2, & q = m_3 + im_4, & r = m_5 + im_6, \\ p_1 = m_1 - im_2, & q_1 = m_3 - im_4, & r_1 = m_5 - im_6, \end{cases}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(63)\qquad \begin{cases} m_1 = \dfrac{p + p_1}{2}, & m_3 = \dfrac{q + q_1}{2}, & m_5 = \dfrac{r + r_1}{2}, \\ m_1 = i\dfrac{p_1 - p}{2}, & m_4 = i\dfrac{q_1 - q}{2}, & m_6 = i\dfrac{r_1 - r}{2}. \end{cases}$$

Les formules (62) ou (63), qui conduisent à l'identité

$$pp_1 + qq_1 + rr_1 = \sum_1^6 m_k^2,$$

font correspondre à toute droite une sphère et *vice versa*. De plus, si l'on considère deux sphères, de coordonnées m_k, m'_k respectivement, et les deux droites correspondantes, de coordonnées p, q, r, ...; p', q', r', ..., il résulte de l'identité précédente et de la forme linéaire des équations de correspondance l'identité plus générale

$$(64)\quad (p-p')(p_1-p'_1) + (q-q')(q_1-q'_1) + (r-r')(r_1-r'_1) = \sum_1^6 (m_k-m'_k)^2.$$

Le second membre de cette formule s'annule quand les deux sphères sont tangentes, et seulement dans ce cas; le premier membre s'annule quand les deux droites considérées se coupent. On voit donc que la transformation définie par les formules (62) ou (63) fait correspondre à deux sphères tangentes deux droites qui se coupent et *vice versa*.

Au reste, on peut définir cette transformation sans passer par les coordonnées homogènes qui ont été l'objet de nos études dans ce Chapitre; car, si l'on prend les équations d'une droite sous la forme

$$(65)\qquad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

la condition pour que deux droites différentes se coupent s'exprime par la relation bien connue

$$(a-a')(q-q') - (b-b')(p-p') = 0;$$

et si l'on pose

$$(66)\qquad \begin{cases} a = x + yi, & b = z + \mathrm{R}, \\ q = x - yt, & p = \mathrm{R} - z \end{cases}$$

et, de même,

$$a' = x' + y'i, \qquad b' = z' + \mathrm{R}',$$
$$q' = x' - y'i, \qquad p' = \mathrm{R}' - z',$$

cette condition devient

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - (\mathrm{R}-\mathrm{R}')^2 = 0.$$

Si donc on considère les formules (66) comme établissant une

correspondance entre la droite arbitraire représentée par les équations (65), et la sphère dont le rayon serait R et dont le centre aurait pour coordonnées cartésiennes x, y, z, on voit que ces formules font correspondre à deux droites qui se coupent deux sphères qui se touchent, et réciproquement.

Cette transformation, qui établit une liaison entre les lignes droites et les sphères, c'est-à-dire entre les éléments les plus essentiels de l'espace, est une des plus belles découvertes de la Géométrie moderne; elle est due à Sophus Lie qui, dans un Mémoire inséré au Tome V des *Mathematische Annalen* [1], l'a présentée avec ses plus importantes conséquences. Au nombre de ces conséquences, il faut surtout citer la suivante :

La transformation de Lie fait correspondre à l'ensemble des droites tangentes à une surface (S) *l'ensemble des sphères tangentes à une autre surface* (S'). *A toutes les droites qui sont tangentes en un point* M *de* (S) *correspondent toutes les sphères qui sont tangentes en un point* M' *de* (S'). *Quand le point* M *décrit une ligne asymptotique de* (S), *le point* M' *décrit une ligne de courbure de* (S'). *Par suite, à toute surface dont on sait déterminer les lignes asymptotiques, on peut faire correspondre par la transformation de Lie une autre surface dont on connaîtra les lignes de courbure et* vice versa.

Nous avons étudié ce théorème avec tous les détails nécessaires dans notre Cours de 1881-82, qui avait pour objet la théorie géométrique des équations aux dérivées partielles. Nous y serons conduit plus loin par une voie indirecte; mais, pour l'établir avec toute la largeur désirable, nous serions obligé de développer ici une théorie du contact qui nous éloignerait de notre objet et que nous réserverons pour une autre occasion.

---

[1] Sophus Lie, *Ueber Complexe. insbesondere Linien und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen* (*Mathematische Annalen*, t. V, 1871, p. 145-256).

CHAPITRE VII.

LES LIGNES DE COURBURE EN COORDONNÉES TANGENTIELLES.

Cas où la surface est définie par son équation tangentielle. — Application à la surface de quatrième classe, normale à toutes les positions d'une droite invariable dont trois points décrivent trois plans rectangulaires. — Cas où les coordonnées tangentielles sont exprimées en fonction de deux paramètres. — Première solution du problème ayant pour objet la détermination des surfaces admettant une représentation sphérique donnée pour leurs lignes de courbure. — Développements sur un système particulier de coordonnées tangentielles employé par O. Bonnet dans l'étude des surfaces.

---

158. Nous allons passer maintenant à l'examen du cas dans lequel la surface est définie par une propriété de ses plans tangents, et nous supposerons d'abord que l'on connaisse l'équation homogène qui relie les coordonnées du plan tangent

$$(1) \qquad f(u, v, w, p) = 0,$$

les axes étant rectangulaires. Le point de contact du plan tangent aura pour coordonnées

$$(2) \qquad x = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial p}}, \qquad y = \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial p}}, \qquad z = \frac{\frac{\partial f}{\partial w}}{\frac{\partial f}{\partial p}},$$

et les cosinus directeurs de la normale seront proportionnels à u, v, w. Pour obtenir l'équation différentielle des lignes de courbure, il suffira donc d'appliquer l'équation (4) du n° 138, ce qui donnera

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} d\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} d\frac{\partial f}{\partial p} & u & du \\ \frac{\partial f}{\partial p} d\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} d\frac{\partial f}{\partial p} & v & dv \\ \frac{\partial f}{\partial p} d\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} d\frac{\partial f}{\partial p} & w & dw \end{vmatrix} = 0$$

ou, sous une forme plus symétrique,

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & d\frac{\partial f}{\partial u} & u & du \\ \frac{\partial f}{\partial v} & d\frac{\partial f}{\partial v} & v & dv \\ \frac{\partial f}{\partial w} & d\frac{\partial f}{\partial w} & w & dw \\ \frac{\partial f}{\partial p} & d\frac{\partial f}{\partial p} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il importe de remarquer, en vue des applications, que l'équation précédente conserve encore sa forme, alors même que l'équation (1) n'est pas homogène, pourvu que l'on suppose u, v, w égaux aux cosinus directeurs de la normale et liés par l'équation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

Pour le démontrer, supposons que l'équation (1) ne soit pas homogène. On peut toujours la rendre homogène et de degré zéro, par exemple en divisant u, v, w, p par la quantité

$$h = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

qui est égale à l'unité. Alors il faudra mettre, à la place de $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$ dans l'équation (3),

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{u}{h},\quad \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{v}{h},\quad \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{w}{h},$$

ce qui équivaut à ajouter aux deux premières colonnes du déterminant (3) les deux dernières multipliées par des coefficients convenablement choisis, et ne change pas, par conséquent, la valeur du déterminant.

159. Considérons, par exemple, la surface de quatrième classe définie par l'équation

$$(4)\qquad p = \frac{au^2 + bv^2 + cw^2}{2},$$

où u, v, w sont les cosinus directeurs de la normale; p désigne donc la distance de l'origine au plan tangent. En rendant, pour un instant, l'équation homogène et appliquant les formules (2), on

trouvera, pour les coordonnées du point de contact du plan tangent, les valeurs

$$(5) \qquad x = (p-a)u, \qquad y = (p-b)v, \qquad z = (p-c)w$$

et, pour celles d'un point de la normale situé à la distance λ du pied de cette normale,

$$(6) \quad X = (p+\lambda-a)u, \qquad Y = (p+\lambda-b)v, \qquad Z = (p+\lambda-c)w.$$

Les points où la normale coupe les trois plans coordonnés correspondent aux valeurs

$$(7) \qquad \lambda = a-p, \qquad \lambda = b-p, \qquad \lambda = c-p,$$

dont les différences sont constantes. On a donc déjà cette élégante proposition :

Lorsque trois points d'une droite invariable décrivent trois plans rectangulaires et que, par conséquent, tous les autres points décrivent des ellipsoïdes, la droite demeure constamment normale à une famille de surfaces parallèles représentées par une équation de la forme

$$(8) \qquad p = \frac{(a+k)u^2 + (b+k)v^2 + (c+k)w^2}{2},$$

où k désigne la constante qui varie quand on passe d'une des surfaces à la surface parallèle [1].

On peut, d'ailleurs, obtenir très aisément une construction par points de ces surfaces. Cherchons le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur la normale. La valeur λ correspondant à ce point sera déterminée par l'équation

$$uX + vY + wZ = 0,$$

qui donne, en appliquant les formules (6),

$$\lambda = p.$$

Soient P ce point, M le point où la normale coupe le plan des yz et qui correspond, nous l'avons vu, à la valeur $\lambda = a - p$. Le milieu du segment PM correspond évidemment à une valeur de λ qui est la demi-somme des valeurs précédentes et, par suite, égale

---

[1] G. Darboux, *Sur une nouvelle définition de la surface des ondes* (*Comptes rendus*, t. XCII, 1881, p. 446).

à $\frac{a}{2}$. Cette valeur étant constante, le milieu du segment décrira une surface parallèle à la proposée. Ainsi, *si l'on considère toutes les positions de la droite invariable mobile, le milieu du segment formé par le point où cette droite coupe l'un des plans coordonnés et par le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite décrit l'une des surfaces normales à la droite dans ses diverses positions* (1).

Proposons-nous maintenant de déterminer les lignes de courbure. L'équation (3) prend ici la forme

$$\begin{vmatrix} u & du & a\,du \\ v & dv & b\,dv \\ w & dw & c\,dw \end{vmatrix} = 0,$$

et son intégrale, qu'on trouvera aisément, est définie par l'équation

$$\frac{u^2}{a-\rho} + \frac{v^2}{b-\rho} + \frac{w^2}{c-\rho} = 0,$$

où ρ désigne la constante arbitraire. Ce résultat s'interprète comme il suit :

La représentation sphérique des deux familles de lignes de courbure de la surface est donnée par un système d'ellipses sphériques homofocales (2).

---

(1) Dans un Article inséré au *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série t. IX, 1885, p. 137), Mannheim a retrouvé tous ces résultats par des considérations de pure Géométrie.

(2) Nous ne voulons pas insister sur cette étude particulière, et nous nous contenterons d'énoncer ici les deux propositions suivantes :

1° *Considérons l'ellipsoïde* (E) *défini par l'équation*

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1.$$

La transformation homographique définie par les formules

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{ma+n}} &= \frac{X}{m\sqrt{a}}, \\ \frac{y}{\sqrt{mb+n}} &= \frac{Y}{m\sqrt{b}}, \\ \frac{z}{\sqrt{mc+n}} &= \frac{Z}{m\sqrt{c}}, \end{aligned}\right.$$

où m et n désignent deux constantes quelconques, fait correspondre aux

160. Supposons maintenant qu'étant donnée une surface quelconque, on connaisse les expressions des coordonnées tangentielles en fonction de deux paramètres α, β. Les coordonnées du point de contact du plan tangent satisferont (n° 96) aux trois équations

$$(9)\qquad \begin{cases} ux + vy + wz + p = 0, \\ x\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} + y\dfrac{\partial v}{\partial \alpha} + z\dfrac{\partial w}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} = 0, \\ x\dfrac{\partial u}{\partial \beta} + y\dfrac{\partial v}{\partial \beta} + z\dfrac{\partial w}{\partial \beta} + \dfrac{\partial p}{\partial \beta} = 0. \end{cases}$$

Un point situé sur la normale à la distance λ de son pied aura pour coordonnées

$$(10)\qquad X = x + \frac{u\lambda}{h}, \qquad Y = y + \frac{v\lambda}{h}, \qquad Z = z + \frac{w\lambda}{h},$$

h désignant le radical

$$(11)\qquad h = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Remplaçons, dans les équations (9), x, y, z par leurs expres-

---

normales de (E) *celles de l'ellipsoïde* (E_1) *ayant pour équation*

$$\frac{X^2}{ma+n} + \frac{Y^2}{mb+n} + \frac{Z^2}{mc+n} = 1;$$

si l'on pose

$$n = m^2 k^2,$$

et si, laissant k^2 fixe, on fait croître m indéfiniment, l'ellipsoïde (E_1) *se transforme en une sphère de très grand rayon, et ses normales deviennent les droites invariables dont trois points décrivent les plans de symétrie de* (E). *Ces droites dérivent des normales de* (E) *par la transformation homographique*

$$x = \frac{kX}{\sqrt{a}}, \qquad y = \frac{kY}{\sqrt{b}}, \qquad z = \frac{hZ}{\sqrt{c}},$$

qui est comprise comme cas limite dans la première (α), *et s'en déduit lorsqu'on y introduit les hypothèses faites sur m et sur n.*

La surface étudiée dans le texte peut donc être considérée comme une surface parallèle à un ellipsoïde dont les axes ont grandi indéfiniment.

2° *Si une surface quelconque jouit de la propriété qu'il existe une transformation homographique, transformant ses normales dans les normales d'une autre surface et conservant le plan de l'infini, les lignes de courbure de cette surface peuvent toujours être déterminées et admettent pour représentation sphérique un système d'ellipses homofocales.*

sions tirées des formules (10); les équations ainsi obtenues

$$(12)\quad \begin{cases} uX + vY + wZ + p = h\lambda, \\ X\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} + Y\dfrac{\partial v}{\partial \alpha} + Z\dfrac{\partial w}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} = \lambda\dfrac{\partial h}{\partial \alpha}, \\ X\dfrac{\partial u}{\partial \beta} + Y\dfrac{\partial v}{\partial \beta} + Z\dfrac{\partial w}{\partial \beta} + \dfrac{\partial p}{\partial \beta} = \lambda\dfrac{\partial h}{\partial \beta} \end{cases}$$

définiront le point considéré de la normale. Pour trouver l'équation différentielle des lignes de courbure, nous écrirons encore qu'il existe un déplacement pour lequel le point correspondant à une valeur convenablement choisie de λ décrit une courbe tangente à la normale, c'est-à-dire pour lequel on a

$$(13)\quad \frac{dX}{u} = \frac{dY}{v} = \frac{dZ}{w} = d\theta,$$

$d\theta$ étant introduit pour l'homogénéité.

Si l'on différentie dans cette hypothèse les formules (12), la première donnera

$$u\,dX + v\,dY + w\,dZ + X\,du + Y\,dv + Z\,dw + dp = \lambda\,dh + h\,d\lambda,$$

ou, en tenant compte des deux suivantes et des formules (13),

$$(14)\quad h^2\,d\theta = h\,d\lambda, \qquad d\lambda = h\,d\theta;$$

la différentiation des deux dernières formules (12) nous conduira alors aux deux équations

$$(15)\quad \begin{cases} X\,d\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} + Y\,d\dfrac{\partial v}{\partial \alpha} + Z\,d\dfrac{\partial w}{\partial \alpha} + d\dfrac{\partial p}{\partial \alpha} = \lambda\,d\dfrac{\partial h}{\partial \alpha}, \\ X\,d\dfrac{\partial u}{\partial \beta} + Y\,d\dfrac{\partial v}{\partial \beta} + Z\,d\dfrac{\partial w}{\partial \beta} + d\dfrac{\partial p}{\partial \beta} = \lambda\,d\dfrac{\partial h}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Enfin, l'élimination de X, Y, Z, λ entre les équations (12), (15) nous donnera l'équation cherchée sous forme de déterminant

$$(16)\quad \begin{vmatrix} u & \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial u}{\partial \beta} & d\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} & d\dfrac{\partial u}{\partial \beta} \\ v & \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} & \cdots & \cdots & \cdots \\ w & \dfrac{\partial w}{\partial \alpha} & \cdots & \cdots & \cdots \\ p & \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} & \cdots & \cdots & \cdots \\ h & \dfrac{\partial h}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial h}{\partial \beta} & d\dfrac{\partial h}{\partial \alpha} & d\dfrac{\partial h}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0.$$

161. Cette équation différentielle offre la plus grande analogie avec celle que nous avons formée (n° **143**) pour les coordonnées ponctuelles, et la répétition des raisonnements employés aux n^{os} **143**, **144** nous conduit aux propositions suivantes :

Formons l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(17)\qquad A\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2}+B\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}+C\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}+D\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+E\frac{\partial\theta}{\partial\beta}+F\theta=0,$$

qui admet comme solutions particulières les cinq fonctions u, v, w, p, h, *de* α *et de* β. *Lorsqu'on l'aura obtenue d'une manière quelconque, les caractéristiques de cette équation, définies par l'équation différentielle*

$$(18)\qquad A\,d\beta^2-B\,d\alpha\,d\beta+C\,d\alpha^2=0,$$

seront les lignes de courbure de la surface; par suite, si les coefficients A *et* C *sont nuls,* α *et* β *seront les paramètres des lignes de courbure.*

Cette proposition générale entraîne comme conséquence le théorème suivant :

Étant donnée l'équation

$$(19)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}=A'\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+B'\frac{\partial\theta}{\partial\beta}+C'\theta,$$

où A′, B′, C′ *sont des fonctions quelconques de* α *et* β, *si l'on en connaît quatre solutions particulières* u, v, w, h *liées par la relation*

$$(20)\qquad u^2+v^2+w^2=h^2,$$

la surface enveloppe du plan

$$uX+vY+wZ+\theta=0,$$

où θ *désigne une solution quelconque de l'équation* (19), *sera rapportée au système de coordonnées curvilignes* (α, β) *formé par ses lignes de courbure.*

En effet, l'équation linéaire de la forme (17), à laquelle satisferont alors les cinq quantités u, v, w, p, h relatives à cette

surface, sera l'équation (19) et, par conséquent, α et β seront les paramètres des lignes de courbure.

Nous avons montré (n° 98) que, lorsqu'on a obtenu sur une surface un système conjugué quelconque, les coordonnées tangentielles u, v, w, p, considérées comme fonctions des paramètres α et β des deux familles conjuguées, doivent satisfaire à une équation linéaire de la forme (19). L'équation linéaire relative au système conjugué formé par les lignes de courbure se distingue, on le voit, de toutes les autres par la propriété d'admettre en outre la solution

$$h = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

On peut, ici encore, énoncer une proposition analogue à celle qui a été démontrée au n° 144 pour les coordonnées ponctuelles.

Si l'on connaît une équation de la forme (19) *admettant quatre solutions* $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ *liées par une relation quadratique homogène à coefficients constants*

$$\varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = 0,$$

on peut obtenir une infinité de surfaces admettant α *et* β *pour paramètres de leurs lignes de courbure.*

Il suffit de ramener par une substitution linéaire *quelconque* à coefficients constants la relation quadratique précédente à la forme

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \theta_4^2.$$

Alors, l'enveloppe du plan

$$\theta_1 X + \theta_2 Y + \theta_3 Z = \theta,$$

où θ désigne une solution quelconque de l'équation (19), est une surface admettant α et β comme paramètres de ses lignes de courbure.

162. Les théorèmes précédents permettent de former, d'une manière très simple, l'équation aux dérivées partielles dont dépend la recherche des surfaces qui admettent pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure deux familles de courbes orthogonales, choisies arbitrairement sur la sphère de rayon 1.

Soient, en effet, u, v, w, h les coordonnées homogènes d'un point de la sphère, qui seront liées par l'équation

$$u^2 + v^2 + w^2 = h^2,$$

et que nous supposerons exprimées en fonction des paramètres α, β des deux familles orthogonales. Un système orthogonal tracé sur la sphère étant, par cela même, un système conjugué, u, v, w, h satisferont à une équation de la forme

$$(21) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} + A \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + B \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + C\theta = 0,$$

équation qu'il sera facile d'obtenir d'une manière explicite, puisqu'on en connaît les quatre solutions particulières u, v, w, h. Cela posé, le plan tangent de la surface, étant parallèle au plan tangent correspondant de la sphère, sera représenté par une équation de la forme

$$uX + vY + wZ + p = 0,$$

où p devra satisfaire à la même équation linéaire que u, v, w, c'est-à-dire à l'équation (21). Il suffira donc, pour résoudre le problème, d'intégrer l'équation (21), et chaque solution particulière de cette équation donnera une solution particulière du problème posé.

Supposons, par exemple, que l'on se propose de déterminer les surfaces admettant pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure un système d'ellipses sphériques homofocales; ρ, ρ_1 désignant les paramètres de ces ellipses, on aura ici

$$u^2 = \frac{(a-\rho)(a-\rho_1)}{(a-b)(a-c)}, \quad v^2 = \frac{(b-\rho)(b-\rho_1)}{(b-a)(b-c)}, \quad w^2 = \frac{(c-\rho)(c-\rho_1)}{(c-a)(c-b)}.$$

L'équation à laquelle satisfont u, v, w sera la suivante :

$$(22) \qquad 2(\rho - \rho_1) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho \, \partial \rho_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} = 0,$$

et il suffira d'intégrer cette équation pour obtenir la solution complète du problème proposé.

La surface étudiée au n° 159 correspond à la solution

$$\theta = \rho + \rho_1.$$

Nous aurons l'occasion de revenir sur le problème général dont nous venons d'indiquer une solution.

163. Au lieu de poursuivre ces applications particulières, nous allons montrer comment on détermine les rayons principaux et les lignes de courbure quand on adopte un système spécial de coordonnées tangentielles que nous allons définir.

Lorsqu'on étudie la représentation sphérique, il est naturel de rechercher la définition géométrique des courbes de la surface qui admettent pour représentation sphérique les différentes génératrices rectilignes de la sphère. Soit d l'une de ces génératrices, coupant le cercle de l'infini en un point μ. La courbe qui lui correspond sur la surface sera évidemment le lieu des points de contact des plans tangents parallèles à d; en d'autres termes, ce sera la courbe de contact du cône de sommet β circonscrit à la surface.

Ces courbes de contact des cônes circonscrits dont le sommet se trouve sur le cercle de l'infini jouissent, relativement aux lignes de courbure, d'une propriété importante que nous allons signaler. D'abord, il en passe deux par chaque point M de la surface; car soient A et B les points où le plan tangent en M coupe le cercle de l'infini : les cônes circonscrits de sommets A et B toucheront la surface suivant deux courbes passant en M. Les deux tangentes à ces courbes de contact auront pour conjuguées les génératrices de ces deux cônes, c'est-à-dire les deux droites de longueur nulle du plan tangent, MA, MB. Or, ces deux droites MA, MB sont placées symétriquement par rapport à deux tangentes perpendiculaires quelconques et, en particulier, par rapport aux directions des lignes de courbure. Il en sera donc de même de leurs conjuguées qui sont les tangentes aux deux courbes de contact. De là le théorème suivant :

Les courbes de contact des cônes circonscrits qui ont leurs sommets sur le cercle de l'infini déterminent sur la surface un système de coordonnées curvilignes imaginaires, admettant pour image sphérique le système des génératrices rectilignes de la sphère. Les tangentes aux deux courbes coordonnées qui passent en un point quelconque de la surface admettent pour bissectrice les directions des lignes de courbure.

Par conséquent, si l'on emploie le système de coordonnées que nous venons de définir, l'équation des lignes de courbure pourra être ramenée à la forme simple

$$A\,d\alpha^2 + C\,d\beta^2 = 0$$

et ne contiendra plus le terme en $d\alpha\,d\beta$.

164. Voici comment on vérifie cet important résultat. Désignons toujours par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale en un point M de la surface; c, c', c'' seront les coordonnées du point m qui sert de représentation sphérique à M.

Les expressions de ces coordonnées en fonction des paramètres α, β des génératrices rectilignes de la sphère ont déjà été données (n° 15). Elles sont :

$$(23)\qquad c = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta},\qquad c' = i\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta},\qquad c'' = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.$$

Nous écrirons l'équation du plan tangent à la surface sous la forme

$$cx + c'y + c''z + \frac{\alpha-\beta}{\xi} = 0$$

ou, plus simplement,

$$(24)\qquad (1-\alpha\beta)x + i(1+\alpha\beta)y + (\alpha+\beta)z + \xi = 0.$$

On aura donc ici

$$u = 1-\alpha\beta,\qquad v = i(1+\alpha\beta),\qquad w = \alpha+\beta,\qquad p = \xi.$$

L'application des formules (9) nous donne d'abord les coordonnées du point de contact. On trouve ainsi

$$(25)\quad x - iy = \frac{q-p}{\alpha-\beta},\qquad x + iy = \frac{\alpha_2 p - \beta^2 q}{\alpha-\beta} - \xi,\qquad z = \frac{\beta q - \alpha p}{\alpha-\beta},$$

p et q désignant les dérivées premières de ξ, considérée comme fonction de α et de β. En appelant de même r, s, t les dérivées secondes, l'équation (16) des lignes de courbure devient ici

$$(26)\qquad dp\,d\alpha - dq\,d\beta = r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2 = 0,$$

et les formules générales (12) et (15), qui font connaître le centre

principal et le rayon de courbure correspondant, nous donnent

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} 2R &= (s+\sqrt{rt})(\alpha-\beta)+p-q,\\ X-iY &= s+\sqrt{rt},\\ 2Z &= (\alpha+\beta)(s+\sqrt{rt})-p-q,\\ X+iY &= -\alpha\beta(s+\sqrt{rt})+\alpha p+\beta q-\xi,\end{aligned}\right.$$

X, Y, Z, R désignant les coordonnées du centre principal et le rayon de courbure. Dans toutes ces formules, on a pris pour $\frac{d\beta}{d\alpha}$ la valeur $\sqrt{\frac{r}{t}}$, en sorte que $\sqrt{rt}$ est mis à la place de

$$t\frac{d\beta}{d\alpha}=r\frac{d\alpha}{d\beta}.$$

L'équation des lignes asymptotiques s'obtiendra aisément. Elle se présentera ici sous la forme suivante :

$$(28)\qquad (r\,d\alpha^2+2s\,d\alpha\,d\beta+t\,d\beta^2)(\alpha-\beta)+2(p-q)\,d\alpha\,d\beta=0.$$

Quant à l'élément linéaire de la surface, il sera donné par la formule

$$(29)\qquad ds^2=\left(dp+\frac{p-q}{\alpha-\beta}\,d\beta\right)\left(dq+\frac{p-q}{\alpha-\beta}\,d\alpha\right).$$

165. Les formules précédentes se prêtent à une foule d'applications intéressantes, tant à cause de leur simplicité que du choix des variables auxquelles elles se rapportent. On peut leur donner une autre forme, qu'il vaudra mieux employer dans certaines recherches.

Nous avons pris pour les cosinus directeurs de la normale les expressions (23). Les variables α, β possèdent ce grand avantage de se transformer par la même substitution linéaire quand on effectue, soit un changement d'axes, soit un déplacement de la surface. Mais, dans certaines applications où il s'agit de surfaces réelles à déterminer, les variables complexes α et β offrent un inconvénient résultant de ce qu'elles ne sont pas imaginaires conjuguées. Nous avons vu que, pour tout point réel, α a pour conjuguée $-\frac{1}{\beta}$. Nous changerons donc, dans les formules (23), β en $-\frac{1}{\beta}$, ce qui donnera pour les cosinus directeurs les expressions

suivantes, déjà employées au n° 27 :

$$c = \frac{\beta + \alpha}{1 + \alpha\beta}, \qquad c' = i\frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha\beta}, \qquad c'' = \frac{\alpha\beta - 1}{1 + \alpha\beta},$$

et nous prendrons pour l'équation du plan tangent

$$(30) \qquad (\alpha + \beta)x + i(\beta - \alpha)y + (\alpha\beta - 1)z + \xi = 0;$$

ξ sera maintenant une variable réelle et α, β des variables imaginaires conjuguées toutes les fois que la surface sera réelle, et qu'il s'agira de plans tangents réels.

Les coordonnées du point de contact du plan tangent auront maintenant pour expressions

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} z &= \frac{\xi - p\alpha - q\beta}{1 + \alpha\beta}, \\ x - iy &= -\frac{\beta(\xi - p\alpha - q\beta)}{1 + \alpha\beta} - p, \\ x + iy &= -\frac{\alpha(\xi - p\alpha - q\beta)}{1 + \alpha\beta} - q. \end{aligned} \right.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure sera

$$(32) \qquad dp\,d\alpha - dq\,d\beta = r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2 = 0,$$

comme dans le cas précédent.

Les formules faisant connaître le centre et le rayon de courbure deviendront

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2R &= \xi - p\alpha - q\beta + (1 + \alpha\beta)(s + \sqrt{rt}), \\ 2Z &= \xi - p\alpha - q\beta - (1 - \alpha\beta)(s + \sqrt{rt}), \\ X - iY &= -p + \beta(s + \sqrt{rt}), \\ X + iY &= -q + \alpha(s + \sqrt{rt}). \end{aligned} \right.$$

Sous cette forme, on reconnaît immédiatement qu'elles fourniront pour X, Y, Z, R des expressions essentiellement réelles.

On passera d'ailleurs du premier système de formules au second en faisant la substitution très simple

$$(34) \qquad \beta = -\frac{1}{\beta'}, \qquad \xi = \frac{\xi'}{\beta'}.$$

Enfin, on obtiendra également sans difficulté l'équation diffé-

rentielle des lignes asymptotiques, qui est ici

$$(35)\quad (1+\alpha\beta)(r\,d\alpha^2+2s\,d\alpha\,d\beta+t\,d\beta^2)+2\,d\alpha\,d\beta(\xi-p\alpha-q\beta)=0,$$

et l'expression de l'élément linéaire

$$(36)\qquad ds^2=(z\,d\alpha+dq)(z\,d\beta+dp),$$

qui se présente ainsi décomposé en ses deux facteurs.

166. Il ne sera pas inutile d'examiner, en vue des applications ultérieures, ce que deviennent les coordonnées α, β, ξ quand on change les axes coordonnés ou, ce qui est la même chose, quand on déplace la surface. Considérons d'abord le système primitif dans lequel l'équation du plan tangent est

$$(1-\alpha\beta)X+i(1+\alpha\beta)Y+(\alpha+\beta)Z+\xi=0.$$

Quand on imprimera à la surface une translation de composantes λ, μ, ν, il faudra, dans l'équation précédente, remplacer X, Y, Z par $X-\lambda$, $Y-\mu$, $Z-\nu$; la nouvelle valeur ξ' de ξ sera donc

$$(37)\qquad \xi'=\xi-\lambda(1-\alpha\beta)-i\mu(1+\alpha\beta)-(\alpha+\beta)\nu.$$

Imaginons maintenant que l'on fasse tourner la surface autour de l'origine des coordonnées. Si nous remarquons que, d'après leur définition, α et β sont les coordonnées symétriques du point m qui, sur la sphère de rayon 1, sert de représentation sphérique au plan tangent, il résultera des propositions développées (Livre I, Chap. III) que les nouvelles valeurs α_1, β_1 des coordonnées α, β s'obtiendront par une même substitution linéaire effectuée sur α et sur β. On aura

$$(38)\qquad \alpha=\frac{m\alpha_1+n}{p\alpha_1+q},\qquad \beta=\frac{m\beta_1+n}{p\beta_1+q}.$$

Désignons par ξ_1 la nouvelle valeur de ξ. La distance de l'origine au plan tangent n'ayant pas changé, on aura

$$(39)\qquad \frac{\xi_1}{\alpha_1-\beta_1}=\frac{\xi}{\alpha-\beta}$$

ou, en remplaçant α, β par leurs valeurs,

$$(40)\qquad \xi=\frac{\xi_1(mq-np)}{(p\alpha_1+q)(p\beta_1+q)}.$$

La question proposée est donc complètement résolue, en ce qui concerne le premier système de coordonnées.

167. En reprenant la même méthode pour le second, dans lequel le plan tangent a pour équation

$$X(\alpha+\beta)+iY(\beta-\alpha)+Z(\alpha\beta-1)+\xi=0,$$

ou bien en passant du premier système au second par la substitution (34), on verra qu'une translation (λ, μ, ν) de la surface donne la nouvelle valeur de ξ

$$\xi_1=\xi-\lambda(\alpha+\beta)-i\mu(\beta-\alpha)-\nu(\alpha\beta-1). \tag{41}$$

Et, de même, une rotation autour de l'origine des coordonnées sera définie par les formules

$$\alpha=\frac{m\alpha_1+n}{p\alpha_1+q}, \qquad \beta=\frac{p-q\beta_1}{n\beta_1-m}, \tag{42}$$

$$\xi=\frac{\xi_1(mq-np)}{(m-n\beta_1)(p\alpha_1+q)}, \tag{43}$$

α_1, β_1, ξ_1 désignant les nouvelles coordonnées. Si la rotation est réelle, on pourra prendre (n° 29)

$$q=m_0, \qquad p=-n_0,$$

m_0, n_0 désignant les imaginaires conjuguées de m et de n. Les équations précédentes donneront alors

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha=\frac{m\alpha_1+n}{-n_0\alpha_1+m_0}, \qquad \beta=\frac{m_0\beta_1+n_0}{-n\beta_1+m},\\ &\xi=\xi_1\frac{mm_0+nn_0}{(m-n\beta_1)(m_0-n_0\alpha_1)}. \end{aligned}\right. \tag{44}$$

Ces formules nous seront utiles dans la théorie des surfaces minima.

168. Nous ne terminerons pas cette étude de nos deux systèmes de coordonnées α, β, ξ sans signaler le *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes*, publié par O. Bonnet en 1860 dans le *Journal de Liouville*, 2e série, t. V, p. 153-266. Les variables dont Bonnet fait usage dans ce travail considérable ne sont pas autre chose que

des coordonnées tangentielles. L'éminent géomètre écrit l'équation du plan tangent à la surface qu'il veut étudier sous la forme

$$X \cos x + Y \sin x + Z i \sin y + z = 0,$$

X, Y, Z désignant les coordonnées courantes. On voit que, si m est le point de la sphère qui sert de représentation à un point quelconque de la surface, x désigne la longitude de ce point et y une fonction de la colatitude u liée à cette colatitude par la relation

$$y = \operatorname{Log} \operatorname{tang} \frac{u}{2}.$$

Bonnet reprend avec ces variables les principales questions de la théorie des surfaces. Mais le choix de la variable z et la présence des lignes trigonométriques ne permettent pas d'atteindre la simplicité qoe nous avons obtenue avec nos systèmes de coordonnées (α, β, ξ). Nous devons ajouter toutefois qu'en essayant de réduire l'équation différentielle des lignes de courbure, O. Bonnet est parvenu à notre équation différentielle (32). C'est le seul passage de son beau Mémoire dans lequel il soit fait usage de notre système de variables α, β, ξ.

CHAPITRE VIII.

APPLICATIONS DIVERSES.

La comparaison des résultats donnés précédemment pour les équations différentielles des lignes asymptotiques et des lignes de courbure conduit naturellement à une belle découverte de S. Lie, la transformation de contact dans laquelle les lignes de courbure d'une surface correspondent aux lignes asymptotiques de sa transformée. — Emploi du système de coordonnées tangentielles précédent pour définir une autre transformation découverte en 1870 par Ribaucour et dans laquelle, comme dans l'inversion, les lignes de courbure sont transformées. — Cette transformation a été nommée par Laguerre *transformation par directions réciproques*. — On donne sa construction géométrique et ses principales propriétés. — Parmi celles que l'on indique, il faut signaler la suivante : Les deux surfaces qui se correspondent peuvent être considérées comme les deux nappes de l'enveloppe d'une famille de sphères qui coupent un plan fixe sous un angle constant. — Les points homologues des deux surfaces sont sur un cercle qui coupe à angle droit le plan fixe; le rapport anharmonique de ces deux points et de ceux où le cercle coupe le plan fixe est un nombre constant. — Comme toutes les transformations de contact qui conservent les lignes de courbure, la transformation par directions réciproques résulte d'un certain nombre d'inversions et de dilatations.

Formules relatives à l'inversion dans le système de coordonnées tangentielles (α, β, ξ).

---

169. Nous aurons à faire différentes applications des systèmes de formules développés dans le Chapitre précédent. Dès à présent, nous allons étudier les suivantes, et, comme il s'agit de recherches générales, nous emploierons de préférence le premier système de formules étudié dans les n^{os} **164** et **166**.

Remarquons d'abord que l'équation différentielle (26) (n° **164**) des lignes de courbure est identique à l'équation différentielle des lignes asymptotiques donnée au n° **117**. De là ce premier résultat :

A toute surface dont on connaît les lignes asymptotiques on peut faire correspondre une surface dont on saura déterminer les lignes de courbure, et vice versa [1].

---

[1] Le rapprochement des formules données aux n°s 117 et 164 nous conduit au

Nous avons déjà signalé (n° 157) cette belle proposition due à S. Lie; nous nous contenterons de remarquer ici que dans l'équation (30) (n° 117) des lignes asymptotiques, α et β désignent des quantités réelles pour tout point réel de la surface, tandis que, dans celle des lignes de courbure, α et β sont des variables complexes, même pour un point réel; par conséquent, la correspondance définie par la proposition précédente ne saurait exister entre les éléments réels de deux surfaces réelles.

Envisageons maintenant l'équation différentielle des lignes de courbure

$$(1) \qquad dp\,d\alpha - dq\,d\beta = r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2 = 0;$$

elle possède de nombreuses propriétés qui, toutes, donnent naissance à des théorèmes de Géométrie.

D'abord, elle ne change pas de forme si l'on remplace ξ par la nouvelle variable

$$(2) \qquad \xi' = \xi + A\alpha\beta + B\alpha + C\beta + D,$$

A, B, C, D désignant des constantes quelconques.

Proposons-nous de définir géométriquement cette transformation.

On peut évidemment l'obtenir par la composition des deux

---

résultat suivant : Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point de la surface dont on connaît les lignes asymptotiques, et par p et q les dérivées de z considérées comme fonction de x et de y; soient X, Y, Z, P, Q les quantités analogues relatives à la surface transformée dont les lignes de courbure correspondent aux lignes asymptotiques de la première. On aura

$$X + iY = -z - x\frac{px + qy}{q - x}, \qquad P = \frac{qx - 1}{x + q},$$

$$X - iY = \frac{p + y}{q - x}, \qquad Q = -i\frac{1 + qx}{x + q},$$

$$Z = \frac{px + qy}{q - x}.$$

La théorie des transformations de contact permet, d'ailleurs, de déduire toutes ces formules des relations

$$X + iY = -z - xZ, \qquad x(X - iY) = Z - y,$$

qui contiennent seulement les coordonnées des points correspondants.

suivantes :

$$\xi' = \xi + A(\alpha + \beta) + C\alpha\beta + D,$$
$$\xi' = \xi + h(\alpha - \beta).$$

La première équivaut, on le reconnaît aisément, à une translation de l'origine des coordonnées; la seconde remplace la surface par une surface parallèle menée à la distance h de la première. On sait, en effet, que, sur deux surfaces parallèles, les lignes de courbure se correspondent. Ainsi, la première propriété de l'équation différentielle des lignes de courbure qui se présente à nous n'est que la traduction analytique d'une proposition géométrique importante, mais très connue.

170. Le déplacement le plus général de la surface proposée se traduirait par une substitution linéaire quelconque effectuée sur α et sur β. Cela nous conduit à la proposition générale suivante, qu'on vérifiera sans difficulté :

L'équation différentielle (1) *conserve encore sa forme si l'on substitue à* α, β, ξ *les variables* α', β', ξ' *définies par l'une ou l'autre des substitutions*

$$(3)\quad \alpha = \frac{A\alpha' + B}{C\alpha' + D}, \qquad \beta = \frac{A_1\beta' + B_1}{C_1\beta' + D_1}, \qquad \xi' = H\xi(C\alpha' + D)(C_1\beta' + D_1),$$

ou

$$(4)\quad \alpha = \frac{A\beta' + B}{C\beta' + D}, \qquad \beta = \frac{A_1\alpha' + B_1}{C_1\alpha' + D_1}, \qquad \xi' = H\xi(C\beta' + D)(C_1\alpha' + D_1),$$

où A, A_1, ..., H *désignent des constantes quelconques.*

Par conséquent, les formules (3) ou (4) font connaître une transformation de surfaces qui conserve les lignes de courbure. Nous laisserons au lecteur le soin de démontrer que cette transformation, quand elle est réelle, peut toujours être obtenue par l'emploi combiné d'un déplacement, d'une transformation homothétique et de la suivante qui, au premier abord, pourrait paraître trop particulière.

k désignant une constante quelconque, prenons

$$(5)\qquad \alpha' = \frac{1+k}{1-k}\beta, \qquad \beta' = \frac{1-k}{1+k}\alpha, \qquad \xi' = \xi.$$

Ces formules font correspondre au plan (P) défini par l'équation

$$(1-\alpha\beta)X + i(1+\alpha\beta)Y + (\alpha+\beta)Z + \xi = 0$$

un autre plan (P′) ayant pour équation

$$(1-\alpha\beta)X + i(1+\alpha\beta)Y + \left[\frac{1+k}{1-k}\beta + \frac{1-k}{1+k}\alpha\right]Z + \xi = 0.$$

Nous voyons déjà que l'intersection de deux plans correspondants se trouve dans un plan fixe, le plan des xy. Voici comment on achèvera de définir la transformation.

Associons au plan (P) de la première figure le point m dont les coordonnées sont les cosinus directeurs de la normale au plan

$$c = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \qquad c' = i\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \qquad c'' = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.$$

Ce point se trouve sur la sphère de rayon 1 ayant l'origine pour centre et, si le plan (P) enveloppe une surface (Σ), il est la représentation sphérique du point de contact de (P) et de (Σ).

Associons de même au plan (P′) le point m' dont les coordonnées sont

$$\frac{1-\alpha'\beta'}{\alpha'-\beta'}, \quad i\frac{1+\alpha'\beta'}{\alpha'-\beta'}, \quad \frac{\alpha'+\beta'}{\alpha'-\beta'},$$

et dont la relation à (P′) est la même que celle de m à (P). Les formules (5) expriment, on le vérifie sans difficulté, que les points m, m' sont en ligne droite avec un point fixe situé à la distance k sur l'axe des z. De là résulte la définition géométrique complète de la transformation.

Soient (Σ), (Σ') *deux surfaces correspondantes. Les plans tangents aux points correspondants se coupent dans un plan fixe* (II). *Les images sphériques des points correspondants sur la sphère de rayon* 1, *placée d'une manière quelconque dans l'espace, sont inverses l'une de l'autre par rapport à un point fixe* A, *situé sur le diamètre de la sphère qui est perpendiculaire au plan* (II).

Cette proposition permet évidemment de construire les plans tangents de (Σ') quand on connaît ceux de (Σ). En ce qui concerne les points de contact, nous ajouterons la remarque suivante qu'on

pourra vérifier, mais qui résultera aussi des propositions établies plus loin :

La droite qui joint les deux points de contact correspondants est parallèle à celle qui relie les images sphériques de ces deux points.

Les relations que nous venons d'indiquer entre les éléments correspondants sont évidemment réciproques et, par conséquent, la transformation est *involutive*. Cette propriété la rapproche de l'inversion; Laguerre, qui l'a étudiée d'une manière détaillée, lui a donné, pour cette raison, le nom de *transformation par directions réciproques* [1] que nous adopterons dans la suite. Mais la construction précédente donne lieu à une autre remarque essentielle; la transformation n'est pas *univoque* et elle fait, en général, correspondre à une surface (Σ) deux surfaces (Σ'), ou plutôt deux nappes différentes d'une même surface. En effet, si l'on considère une région de la surface (Σ) pour laquelle le sens de la normale soit parfaitement défini, chaque point de cette région aura une représentation sphérique, complètement déterminée par le sens de la normale; et la construction indiquée plus haut fera connaître, sans ambiguïté, le plan tangent de la surface correspondante; mais cette construction donnera évidemment des éléments différents si l'on change le sens de la normale en tous les points de (Σ). C'est ce que démontrent, du reste, les formules suivantes, équivalentes aux relations (5).

Soient

$$ux + vy + wz + p = 0,$$
$$u'x + v'y + w'z + p' = 0$$

les équations de deux plans correspondants; désignons, pour abréger, par h et par h' les radicaux

$$\pm\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \quad \pm\sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}.$$

Si nous posons

$$u = 1 - \alpha\beta, \quad v = i(1 + \alpha\beta), \quad w = \alpha + \beta, \quad p = \xi, \quad h = \alpha - \beta,$$
$$u' = 1 - \alpha'\beta', \quad v' = i(1 + \alpha'\beta'), \quad w' = \alpha' + \beta', \quad p' = \xi', \quad h' = \alpha' - \beta',$$

---

[1] LAGUERRE, *Sur la transformation par directions réciproques* (*Comptes rendus*, t. XCII, 1881, p. 71).

les formules (5) nous donneront

$$(6)\qquad \begin{cases} u' = u, & w' + h' = \dfrac{1+k}{1-k}(w-h), \\ v' = v, & w' - h' = \dfrac{1-k}{1+k}(w+h), \\ p' = p. \end{cases}$$

La présence du radical h montre bien qu'à un plan donné correspondent deux plans différents, qu'il sera impossible de séparer analytiquement tant que la variable h ne sera pas un carré parfait.

171. Puisque la transformation précédente conserve les lignes de courbure, elle fera correspondre nécessairement une sphère à une sphère. On vérifie cette proposition de la manière suivante.

L'équation tangentielle d'une sphère dont le rayon est R et dont le centre a pour coordonnées x, y, z est

$$(7)\qquad ux + vy + wz + p = \mathrm{R}h,$$

h ayant la signification déjà donnée; car cette équation exprime que la distance du centre au plan tangent est constante. Pour obtenir la surface correspondante, effectuons la substitution définie par les formules (6). Nous obtiendrons l'équation

$$\begin{aligned} u'x + v'y + \left[\frac{1+k}{1-k}(w'-h') + \frac{1-k}{1+k}(w'+h')\right]\frac{z}{2} + p \\ = \frac{\mathrm{R}}{2}\left[\frac{1+k}{1-k}(w'-h') - \frac{1-k}{1+k}(w'+h')\right] \end{aligned}$$

ou, en ordonnant et effaçant les accents,

$$ux + vy + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}z - \frac{2k\mathrm{R}}{1-k^2}\right)w + p = h\left(\frac{2kz}{1-k^2} - \frac{1+k^2}{1-k^2}\mathrm{R}\right).$$

Cette équation, de même forme que l'équation (7), représente une sphère dont le centre (x', y', z') et le rayon R′ sont définis par les formules

$$(8)\qquad \begin{cases} x' = x, & z' = \dfrac{1+k^2}{1-k^2}z - \dfrac{2k\mathrm{R}}{1-k^2}, \\ y' = y, & \mathrm{R}' = \dfrac{2kz}{1-k^2} - \dfrac{1+k^2}{1-k^2}\mathrm{R}, \end{cases}$$

qui donnent aussi

$$(9)\qquad \begin{cases} z' + R' = \dfrac{1+k}{1-k}(z - R), \\ z' - R' = \dfrac{1-k}{1+k}(z + R) \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - R'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - R^2.$$

Il suit de là qu'une sphère (S) de la première figure, représentée par l'équation ponctuelle

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2xX - 2yY - 2zZ + x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

correspond une sphère (S′) de la seconde, ayant pour équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2xX - 2yY - 2\left[\frac{z(1+k^2) - 2kR}{1-k^2}\right]Z + x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

On voit que les deux sphères (S) et (S′) coupent le plan des xy, c'est-à-dire le plan (Π) de la transformation, suivant un même cercle.

Appelons V, V′ les angles, définis par les formules

$$\cos V = \frac{z}{R}, \qquad \cos V' = \frac{z'}{R'},$$

que font les deux sphères avec le plan (Π). Les formules (9) nous donnent entre ces angles la relation

$$\frac{1 + \cos V'}{1 - \cos V'} = \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 \frac{1 - \cos V}{1 + \cos V},$$

qu'on peut ramener à la forme simple

$$(10)\qquad \operatorname{tang}\frac{V}{2}\operatorname{tang}\frac{V'}{2} = \frac{1-k}{1+k}.$$

Supposons que l'un des deux angles soit constant, il en sera de même de l'autre; de là résulte un moyen nouveau de déterminer la surface (Σ′) qui correspond à une surface (Σ) :

On construira les sphères (S) *tangentes à* (Σ) *et coupant le plan* (Π) *sous un angle constant* α. *Par l'intersection de chaque sphère* (S) *et du plan* (Π), *on fera passer une sphère* (S′) *cou-*

pant (II) *sous un angle donné* β. *L'enveloppe des sphères* (S′) *donnera la surface* (Σ') *qui correspond à* (Σ).

Une sphère de rayon nul doit être considérée comme coupant un plan ou une sphère quelconque sous un angle *infini*. La construction précédente contient donc la suivante comme cas particulier :

On construira les sphères (S) *tangentes à* (Σ) *et coupant le plan* (II) *sous un angle constant* α_1 (¹). *Les sphères de rayon nul passant par l'intersection de chaque sphère* (S) *et du plan* (II) *décriront une surface* (Σ') *correspondant à* (Σ) *avec conservation des lignes de courbure.*

Bien antérieurement aux études récentes sur les transformations qui conservent les lignes de courbure, et à une époque où l'on ne connaissait, parmi ces transformations, que l'inversion et la *dilatation* par laquelle on passe d'une surface à la surface parallèle, O. Bonnet avait fait connaître une transformation qui est comprise dans la précédente et qui correspond au cas particulier où l'angle α_1 est droit (²).

Mais on peut, si l'on emploie les sphères, obtenir une construction géométrique encore plus simple de la transformation. Les formules (9) nous montrent, en effet, qu'une sphère coïncidera avec sa transformée toutes les fois qu'on aura

$$z + R = \frac{1+k}{1-k}(z - R)$$

ou

$$\frac{z}{R} = \frac{1}{k}.$$

D'après cela, *si l'on considère toutes les sphères* (S) *tangentes à une surface* (Σ) *et coupant le plan* (II) *sous un angle con-*

(¹) Pour obtenir l'angle α_1, il suffit de faire, dans la formule (10), $\operatorname{tang}\frac{V'}{2} = \pm i$. On a ainsi

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha_1}{2} = \pm i\,\frac{k-1}{k+1}.$$

(²) O. Bonnet, *Note sur un genre particulier de surfaces réciproques* (*Comptes rendus*, t. XLII, 1856, p. 485).

stant, de cosinus égal à $\frac{1}{k}$, *elles envelopperont, en même temps que* (Σ), *la surface* (Σ') *homologue de* (Σ) *dans la transformation considérée* [1].

172. La dernière proposition que nous venons d'énoncer permet de donner une définition géométrique simple de la transformation plus générale qu'on obtient si l'on soumet une figure et sa transformée à une même inversion. A toutes les sphères qui coupaient le plan (II) sous un angle constant, l'inversion fait, en effet, correspondre des sphères ou des plans coupant une sphère fixe (S) sous un angle égal et constant. Ainsi :

Si l'on construit toutes les sphères tangentes à une surface (A) *et coupant une sphère fixe* (S) *sous un angle constant, elles envelopperont, en même temps que* (A), *une surface* (A') *qui correspondra à* (A) *avec conservation des lignes de courbure.*

Si la sphère (S) se réduit à un plan (II), on retrouve la transformation par directions réciproques.

Il n'est pas inutile de démontrer la proposition précédente d'une manière tout à fait élémentaire. Nous examinerons en premier lieu le cas où l'angle constant est droit.

Considérons toutes les sphères (U), qui ont leur centre sur une surface (Σ) et qui coupent à angle droit une sphère (S) de rayon R. Le centre O de (S) ayant la puissance constante R^2 par rapport à toutes les sphères (U), les axes radicaux de trois sphères quelconques (U), et, par suite, la corde de contact de chaque sphère avec son enveloppe, viendront passer par le point O. De là résulte la construction suivante de l'enveloppe :

Les deux points de contact de la sphère (U) *de centre* M *avec son enveloppe se trouvent à l'intersection de cette sphère et de la perpendiculaire abaissée du centre* O *de* (S) *sur le plan tangent en* M *à la surface lieu des centres* (Σ).

---

[1] Si la constante k est plus petite que l'unité, les sphères (S) ne coupent pas le plan (II); mais le rapport $\frac{z}{R}$ est toujours constant. C'est dans cette hypothèse qu'est tracée la figure 9, page 312.

Soient μ, μ' ces deux points, placés symétriquement par rapport au plan tangent de (Σ). On aura évidemment

$$\overline{O\mu}\,\overline{O\mu'} = R^2,$$

R désignant le rayon de (S); par conséquent, les deux nappes de l'enveloppe seront inverses l'une de l'autre par rapport au point O.

Moutard a donné le nom d'*anallagmatiques* [1] aux surfaces qui ne changent pas quand on les soumet à une inversion déterminée. Les deux nappes de l'enveloppe précédente constituent donc une surface qui est anallagmatique par rapport au pôle O, et, réciproquement, il serait aisé de le montrer, toute surface anallagmatique peut être obtenue par la génération précédente. D'ailleurs, comme les deux nappes de l'enveloppe sont inverses l'une de l'autre, les lignes de courbure tracées sur ces deux nappes se correspondent une à une.

Étudions maintenant le cas général où les sphères variables (U) coupent la sphère fixe (S) sous un angle constant qui n'est pas droit. Nous commencerons par établir le lemme suivant :

Si des sphères variables (U) *coupent une sphère fixe* (S) *sous un angle constant, différent de zéro et de* π, *on peut toujours, en ajoutant une constante à tous leurs rayons, les transformer en des sphères* (U′) *qui coupent à angle droit une sphère fixe* (S′) *concentrique à* (S).

Soient, en effet, ρ et R les rayons des sphères (U) et (S); d la distance de leurs centres; α l'angle constant sous lequel elles se coupent. On aura

$$d^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos\alpha,$$

ou encore

$$d^2 = (\rho - R\cos\alpha)^2 + R^2\sin^2\alpha.$$

Par suite, si l'on ajoute la quantité constante $-R\cos\alpha$ au rayon ρ de (U), ce qui donnera une sphère concentrique (U′),

---

(1) Moutard, *Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e serie, t. III, 1864, p. 306).

Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre (même Recueil, t. III, 1864, p. 536).

Lignes de courbures d'une classe de surfaces du quatrième ordre (*Comptes rendus*, t. LIX, 1864, p. 243).

cette sphère (U′) coupera à angle droit la sphère fixe (S′) concentrique à (S) et de rayon $R \sin \alpha$.

Ce lemme étant établi, si nous envisageons toutes les sphères (U) qui dépendent de deux paramètres et coupent (S) sous un angle donné, elles envelopperont une surface à deux nappes (A), (A′). Les sphères concentriques (U′), qui coupent à angle droit la sphère (S′), envelopperont une surface à deux nappes (B), (B′) respectivement parallèles à (A), (A′); et, comme les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes (B), (B′), qui sont inverses l'une de l'autre par rapport au centre commun des sphères fixes (S), (S′), il en sera de même en ce qui concerne les deux nappes (A) et (A′). La proposition que nous avions en vue se trouve ainsi établie dans toute sa généralité.

Soumettons maintenant la figure précédente à une inversion dont le pôle soit sur la sphère (S). Cette sphère se transformera en un plan (Π); les deux nappes (A), (A′) se transformeront en deux nappes (C), (C′), qui seront l'enveloppe commune d'une famille de sphères (U″) transformées des sphères (U) et coupant, par conséquent, le plan (Π) sous un angle constant. En d'autres termes, les nappes (C) et (C′) se déduiront l'une de l'autre au moyen de la transformation par directions réciproques la plus générale. Or, on peut passer de (C) à (C′) en effectuant les transformations suivantes : 1° une inversion qui transforme (C) en (A); 2° une dilatation qui transforme (A) en (B); 3° une inversion qui transforme (B) en (B′); 4° une dilatation qui transforme (B′) en (A′); 5° une inversion finale qui transforme (A′) en (C′). Ce résultat est conforme à une proposition générale de S. Lie [1] d'après laquelle toutes les transformations de contact qui conservent les lignes de courbure se ramènent à des inversions et à des dilatations.

---

[1] Dans le Mémoire déjà cité, inséré au Tome V des *Mathematische Annalen*, Lie a fait connaître toutes les transformations de contact qui conservent les lignes de courbure; il a même signalé (p. 186) le cas particulier de la transformation par directions réciproques; mais cette transformation avait été déjà donnée dans différents travaux de Ribaucour. *Voir*, en particulier, Ribaucour, *Note sur la déformation des surfaces* (*Comptes rendus*, t. LXX, 1870, p. 332).

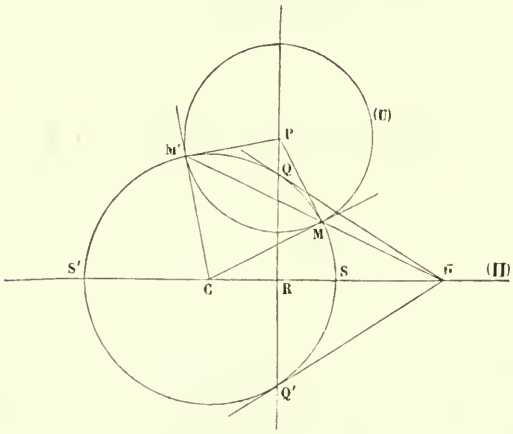
Sous une forme différente, elle a été l'objet des études de l'Auteur publiées dans les Notes V et IX du *Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, 1873.

Les transformations générales considérées par Lie dans son Mémoire peuvent

173. Revenons aux résultats que nous avons obtenus relativement à deux sphères qui se correspondent dans la transformation par directions réciproques. Ils vont nous permettre de compléter les constructions précédentes et de faire connaître de nouvelles relations entre les éléments correspondants.

Considérons dans la première figure une surface (Σ) et prenons pour plan du tableau (*fig.* 9) le plan mené par un point quelconque M de cette surface perpendiculaire à la fois au plan (II) de

Fig. 9.



la transformation et au plan tangent en M à (Σ). Soit MC la trace de ce dernier plan; si nous construisons la sphère (U) tangente en M à (Σ) et coupant le plan (II) sous un angle constant dont le cosinus soit $\frac{1}{k}$, nous savons qu'elle enveloppe, en même temps que (Σ), la surface (Σ') qui correspond à (Σ). Soit M′ le point de contact avec (Σ'); le plan tangent en M′ à (Σ') et le plan tangent

---

être définies d'une manière élégante si l'on emploie les six coordonnées de la sphère reliées par l'équation

$$\sum_{1}^{6} m_i^2 = 0$$

et définies au n° 156. Il suffit, pour les obtenir, de faire correspondre à une sphère de coordonnées m_i la nouvelle sphère dont les coordonnées m'_i se déduisent des précédentes par une substitution linéaire orthogonale à coefficients constants.

en M à (Σ) devant couper le plan (Π) suivant la même droite, le point M′ sera dans le plan du tableau et on l'obtiendra en menant du point C, où la droite MC rencontre le plan (Π), la seconde tangente au cercle suivant lequel la sphère (U) coupe le plan du tableau. Il suit de là que le cercle décrit du point C comme centre avec CM pour rayon passera par le point M′ et coupera normalement les surfaces (Σ), (Σ') en M et en M′. Ainsi, *si l'on construit tous les cercles normaux à la fois à* (Σ) *et au plan* (Π), *la surface* (Σ') *coupera tous ces cercles à angle droit.*

D'ailleurs, comme les deux plans tangents CM, CM′ se correspondent dans la transformation, on pourra leur appliquer la formule (10) établie pour deux sphères correspondantes quelconques et, si l'on désigne par V, V′ les angles de ces plans avec le plan (Π), on aura

$$\operatorname{tang}\frac{V}{2}\operatorname{tang}\frac{V'}{2}=\frac{1-k}{1+k}.$$

Si l'on tient compte du sens des normales aux deux plans, on aura

$$V=\widehat{MCS},\qquad V'=\widehat{M'CS}\pm\pi$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tang}\frac{\widehat{M'CS}}{2}=\frac{k+1}{k-1}\operatorname{tang}\frac{\widehat{MCS}}{2}.$$

Cette équation, qui définit le point M′ quand on connaît le point M, exprime que le rapport anharmonique formé sur le cercle par les quatre points M′, M, S, S′ est constant et égal à $\frac{k+1}{k-1}$. On obtient donc le théorème suivant, qui est dû à Ribaucour et qui est compris comme cas particulier dans une proposition générale sur laquelle nous aurons à revenir :

Étant donnée une surface (Σ), *on construit tous les cercles normaux à la fois à la surface et à un plan fixe* (Π). *Ces cercles sont normaux à une famille de surfaces* (Σ') *qui sont définies de la manière suivante : Pour chacune d'elles, le rapport anharmonique du point où elle coupe chaque cercle normal à* (Σ) *et des trois autres points où ce même cercle est coupé par* (Σ) *et par* (Π) *est un nombre constant. Les surfaces*

(Σ'), *sont celles qui dérivent de* (Σ) *dans les différentes transformations par directions réciproques qui admettent le même plan* (II).

On peut signaler encore d'autres relations géométriques. Si, du centre P de la sphère qui enveloppe à la fois (Σ) et (Σ') on abaisse une perpendiculaire PR sur le plan (II), elle coupe le cercle en un point Q qui décrit une surface normale au cercle, comme il est aisé de le démontrer. En effet, la tangente en Q et la ligne MM′ coupant l'axe SS′ en un même point H, on a, en vertu d'une proposition de Géométrie élémentaire,

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\widehat{QCS}}{2} = \operatorname{tang} \frac{\widehat{MCS}}{2} \operatorname{tang} \frac{\widehat{M'CS}}{2}$$

ou, en tenant compte de la formule donnée plus haut,

$$\operatorname{tang} \frac{\widehat{QCS}}{2} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{tang} \frac{MCS}{2}.$$

Le rapport anharmonique des points Q, M, S, S′ étant constant en vertu même de cette équation, la surface décrite par le point Q est bien normale au cercle en ce point, et elle correspond à (Σ) avec conservation des lignes de courbure. On a d'ailleurs

$$\overline{MP}^2 = PQ \times PQ' = \overline{PR}^2 - \overline{RQ}^2$$

ou, en remarquant que MP, PR sont liés par l'équation (11),

$$RQ = PR\sqrt{1-k^2};$$

on obtiendra donc la surface lieu du point Q en réduisant dans le rapport de $\sqrt{1-k^2}$ à 1 les ordonnées perpendiculaires au plan (II) de la surface lieu du point P. De là le théorème suivant :

Si l'on considère toutes les sphères (U) *dont les centres décrivent une surface* (S) *et qui coupent un plan* (II) *sous un angle constant, de cosinus égal à* $\frac{k}{1}$, *elles enveloppent une surface à deux nappes* (Σ), (Σ') *dont les lignes de courbure correspondent point par point à celles de la surface* (S′) *obtenue en*

réduisant, dans le rapport de $\sqrt{1-k^2}$ *à* 1, *les ordonnées perpendiculaires au plan* (II) *des différents points de* (S).

Si, par exemple, la surface (S) est du second degré, ce théorème permettra de déterminer immédiatement les lignes de courbure des deux nappes (Σ), (Σ'); elles correspondront, en effet, aux lignes de courbure de la surface (S′) qui sera ici du second degré.

174. Nous allons maintenant chercher ce que deviennent les formules relatives à la transformation par rayons vecteurs réciproques, quand on emploie le système de coordonnées (α, β, ξ).

Soient

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{k^2}{x^2+y^2+z^2}$$

les formules de la transformation. Au plan

$$uX + vY + wZ + p = 0 \tag{12}$$

correspondra la sphère

$$ux + vy + wz + \frac{p}{k^2}(x^2+y^2+z^2) = 0.$$

Nous pouvons obtenir l'équation tangentielle de cette sphère, c'est-à-dire la condition pour que le plan

$$u'x + v'y + w'z + p' = 0$$

lui soit tangent; l'application des méthodes élémentaires nous conduit à l'équation cherchée

$$-\frac{2pp'}{k^2} + uu' + vv' + ww' \pm \sqrt{u^2+v^2+w^2}\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2} = 0.$$

Introduisons les coordonnées ξ, α, β à la place de u, v, w, p et ξ', α', β' à la place de u', v', w', p'. L'équation précédente prendra la forme

$$\frac{2\xi\xi'}{k^2} + 2\alpha\beta + 2\alpha'\beta' - (\alpha+\beta)(\alpha'+\beta') \pm (\alpha-\beta)(\alpha'-\beta') = 0.$$

En prenant successivement le signe + et le signe —, nous aurons les deux équations

$$\xi\xi' = -k^2(\alpha-\alpha')(\beta-\beta') \tag{13}$$

ou

$$\xi\xi' = -k^2(\beta - \alpha')(\alpha - \beta'), \tag{14}$$

qui réalisent, en quelque sorte, le dédoublement de l'inversion. Ces formules se ramènent l'une à l'autre quand on échange α et β; et cet échange ne modifie en rien l'équation d'un plan dans le système (α, β, ξ); nous pourrons donc nous borner à considérer une seule des deux équations. Nous choisissons la formule (13).

Quand le plan défini par l'équation (12) enveloppe une surface (Σ), ξ est une fonction donnée de α et de β, et la sphère définie par l'équation (13) en α', β', ξ' enveloppe la surface (Σ') correspondant à (Σ). Pour avoir le point ou, plutôt, le plan de contact de cette sphère avec son enveloppe, il faut appliquer les principes généraux de la théorie des enveloppes et joindre à l'équation (13) ses deux dérivées par rapport à α et à β, ξ étant considérée comme une fonction de α et de β. En appelant p et q les dérivées premières de ξ, on trouve ainsi le système

$$\left\{\begin{aligned} \xi\xi' &= -k^2(\alpha - \alpha')(\beta - \beta'), \\ p\xi' &= -k^2(\beta - \beta'), \\ q\xi' &= -k^2(\alpha - \alpha'), \end{aligned}\right. \tag{15}$$

qui détermine α', β', ξ' en fonction de α et de β.

Si l'on différentie maintenant la première équation (15), en tenant compte des deux autres, on trouve

$$\xi\, d\xi' = k^2(\beta - \beta')\, d\alpha' + k^2(\alpha - \alpha')\, d\beta'.$$

On aura donc, en désignant par p', q' les dérivées de ξ' par rapport à α', β',

$$\xi p' = k^2(\beta - \beta'), \qquad \xi q' = k^2(\alpha - \alpha'). \tag{16}$$

Les formules (15), (16) définissent toutes les relations entre les éléments correspondants des deux surfaces. Elles fournissent le Tableau suivant :

$$\left\{\begin{aligned} &\xi' = -\frac{k^2\xi}{pq}, && p' = \frac{k^2}{q}, && \frac{\xi'}{p'} = -\frac{\xi}{p}, \\ &\alpha' = \alpha - \frac{\xi}{p}, && q' = \frac{k^2}{p}, && \frac{\xi'}{q'} = -\frac{\xi}{q}; \\ &\beta' = \beta - \frac{\xi}{q}, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

d'où l'on déduit, par un calcul facile,

$$dp'\,dx' - dq'\,d\beta' = -\frac{k^2}{pq}(dp\,dx - dq\,d\beta).$$

Cette équation établit de nouveau que l'inversion conserve les lignes de courbure.

Il importe d'établir nettement ce qui distingue, au point de vue géométrique, la formule (13) de la formule (14). Quand on échange α et β, l'équation du plan tangent ne change pas et, par conséquent, on a toujours la même surface; mais le sens positif de chaque normale est évidemment changé. Cela résulte des expressions

$$c = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \qquad c' = i\,\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \qquad c'' = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$

des cosinus directeurs de la normale. Par conséquent, les formules (13) ou (14), qui se déduisent l'une de l'autre par l'échange de α et de β, font bien correspondre à une surface (Σ) la même surface (Σ'); mais à un sens déterminé d'une normale à la surface (Σ) correspondront des sens opposés de la normale à la surface (Σ'), suivant qu'on adoptera la formule (13), ou la formule (14). Pour caractériser au point de vue géométrique chacune de ces formules, il suffira donc de donner la relation entre les sens positifs des deux normales, qui correspond, par exemple, à la formule (13). Pour cela, considérons deux surfaces homologues (Σ), (Σ'), et deux points correspondants M, M′ sur ces deux surfaces. A un point de (Σ) décrivant une courbe infiniment petite autour de M dans un sens déterminé, correspondra un point de (Σ') tournant également dans un sens déterminé autour de M′; attribuons aux deux normales un sens tel que les deux courbes paraissent être parcourues en sens contraire autour de leurs normales respectives; on aura ainsi la correspondance entre le sens des normales qui est définie par la formule (13) et par celles que nous en avons déduites.

Pour le démontrer, il suffit de considérer la sphère (S) de rayon R ayant pour centre l'origine des coordonnées et dont l'équation est

$$\xi = R(\alpha - \beta.$$

Les formules (17) nous donnent pour la sphère correspondante

$$\beta' = \alpha, \qquad \alpha' = \beta, \qquad \xi' = -\frac{k^2}{R}(\alpha' - \beta').$$

Les deux premières formules montrent que le sens positif de la normale se trouve changé, et la proposition précédente se vérifie dans ce cas particulier. Cela suffit; car, si l'on déforme progressivement la sphère (S) de manière à l'amener à coïncider avec une surface quelconque (Σ), la proposition établie pour la sphère (S) doit nécessairement se conserver, en vertu de la continuité, pour la surface (Σ).

LIVRE III.

LES SURFACES MINIMA.

CHAPITRE I.

RÉSUMÉ HISTORIQUE.

L'équation aux dérivées partielles de Lagrange. — Mémoire de Meusnier sur la courbure des surfaces. — Premières recherches de Monge. — Méthode rigoureuse de Legendre. — Détermination de quelques surfaces minima nouvelles par Scherk. — La surface minima réglée, le théorème de Catalan. — Recherches générales sur la théorie, par O. Bonnet, Catalan et Björling.

175. Avant de continuer l'exposition des théories générales, nous allons faire une application étendue des méthodes et des résultats développés dans les deux Livres précédents. Nous avons choisi les surfaces minima dont l'étude présente un intérêt véritablement exceptionnel; car elle touche à la fois au Calcul des variations, à la Physique mathématique et à la Théorie moderne des fonctions.

Dans le célèbre Mémoire intitulé : *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*, qui est inséré dans le Tome II des *Miscellanea Taurinensia,* années 1760-1761 ([1]), et qui contient les principes de son *Calcul des variations*, Lagrange, après avoir généralisé les résultats obtenus par Euler relativement aux intégrales simples, se propose de montrer, dans l'Appendice I, que sa méthode s'applique aussi aux intégrales doubles, et il choisit comme exemple celle qui exprime l'aire d'une portion de surface rapportée à des coordonnées rectangulaires

$$\int\int dx\,dy\,\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

([1]) *Voir* aussi *Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 335.

Il trouve ainsi que la surface minima passant par un contour donné doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0.$$

« Le problème se réduit donc, dit-il, à chercher p et q par ces conditions que

$$p\,dx+q\,dy \quad \text{et} \quad \frac{p\,dp-q\,dx}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

soient des différentielles exactes.

« Il est d'abord clair qu'on satisfera à ces conditions, en faisant p et q constantes, ce qui donnera un plan quelconque pour la surface cherchée; mais ce ne sera là qu'un cas particulier, car la solution générale doit être telle que le périmètre de la surface puisse être choisi à volonté. »

Lagrange se contente des remarques précédentes; car le but unique de son admirable Mémoire était la formation des équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les courbes et les surfaces qui donnent la solution des problèmes posés; et il termine l'Appendice consacré aux intégrales doubles en donnant l'équation aux dérivées partielles de la surface dont l'aire est minimum parmi celles qui circonscrivent des solides égaux.

La théorie si simple et si féconde que Lagrange avait substituée aux méthodes d'Euler ne fut pas immédiatement acceptée par tous les géomètres. En 1767, Borda fit imprimer, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, un travail intitulé : *Éclaircissement sur les méthodes de trouver les courbes qui jouissent de quelque propriété de maximum ou de minimum*, et il crut faire une œuvre utile en démontrant par une voie nouvelle, et sans rien lui ajouter, le résultat de Lagrange.

176. C'est dans un beau Mémoire de Meusnier [1] qu'est commencée, et de la manière la plus heureuse, l'étude de l'équation

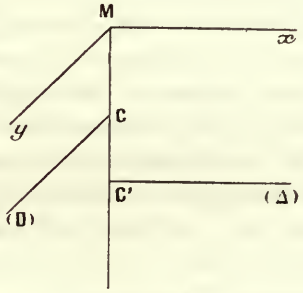
---

[1] *Mémoire sur la courbure des surfaces*, par M. Meusnier, Lieutenant en premier, surnuméraire au corps royal du Génie, Correspondant de l'Académie, lu les 14 et 21 février 1776 (*Mémoires des Savants étrangers*, t. X, 1875, p. 477).

aux dérivées partielles de Lagrange. Ce travail contient une théorie nouvelle de la courbure qui, à tous égards, aurait mérité d'être conservée à côté de celle d'Euler; Meusnier, après avoir rappelé qu'Euler avait publié en 1761, dans le Recueil de l'Académie de Berlin, le Mémoire qui contient les propositions devenues classiques sur la courbure des sections normales faites en un point donné d'une surface, ajoute que « l'on peut présenter la question sous un autre point de vue en la faisant dépendre d'une propriété intéressante, savoir, qu'il existe une génération qui convient à tout élément de surface ».

La génération dont veut parler Meusnier, et qu'il développe avec précision dans le cours de son travail, est la suivante : on peut, en négligeant seulement les infiniment petits du troisième ordre, considérer tout élément de surface dans le voisinage d'un point donné, comme engendré par la rotation infiniment petite d'un petit arc de cercle autour d'un axe situé dans son plan et parallèle au plan tangent de cet élément. Il nous est aisé, aujourd'hui, de retrouver les propositions de Meusnier et de nous rendre compte de sa méthode. Si, en effet, on considère (*fig.* 10)

Fig. 10.



un point quelconque M de la surface et les centres de courbure principaux C, C′ relatifs à ce point, toute surface aura en M un contact du second ordre avec la proposée si elle admet en M les mêmes directions principales Mx, My, et si, de plus, elle a les mêmes centres principaux correspondant aux deux directions principales. Si donc on veut obtenir un tore ayant un contact du second ordre avec la surface donnée, ce tore devra admettre, comme cercle générateur, soit le cercle principal de centre C et

de rayon CM décrit dans le plan CMx, soit le cercle de centre C′ et de rayon C′M décrit dans le plan C′My. De plus, si l'on considère, par exemple, le premier cercle décrit dans le plan CMx, le second centre de courbure principal devra se trouver sur l'axe du tore. Cet axe sera donc assujetti à la double condition de passer par le point C′ et de se trouver dans le plan CMx. En raisonnant de même pour le second centre de courbure, on reconnaît qu'il y aura deux séries de tores osculateurs en M; tous les tores d'une même série auront un même cercle générateur, décrit dans l'un des plans principaux ayant pour centre le centre de courbure relatif à ce plan; leurs axes, tous nécessairement situés dans ce plan, passeront par l'autre centre de courbure. Le mode de génération considéré par Meusnier revient à substituer à la surface, dans le voisinage du point M, le tore osculateur particulier dont l'axe est parallèle au plan tangent; les axes des deux tores qu'il obtient ainsi sont les droites D et Δ que Mannheim a retrouvées et introduites avec succès dans la théorie de la courbure des surfaces. On s'explique aussi, par les remarques précédentes, comment Meusnier, en partant d'un point de vue tout à fait différent de celui d'Euler, est conduit néanmoins à considérer les mêmes éléments géométriques.

Comme application de sa méthode générale, Meusnier détermine d'une manière très exacte la surface dont tous les points sont des ombilics et il cherche à établir par la Géométrie l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima. Par des raisonnements, qui sont à la vérité peu satisfaisants, il est conduit à cette condition, que la somme des rayons de courbure principaux doit être nulle en chaque point de la surface. C'est donc dans le Mémoire de Meusnier qu'apparaît pour la première fois l'interprétation géométrique de l'équation de Lagrange.

Pour trouver des surfaces satisfaisant à cette équation

$$(1) \qquad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

Meusnier remarque que, d'après un résultat déjà donné par Monge, l'équation

$$(2) \qquad q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$$

est celle des surfaces engendrées par une droite parallèle au plan

des xy. En l'adjoignant à l'équation (1), ce qui donne

$$r + t = 0. \tag{3}$$

on aura, s'il en existe, les surfaces minima engendrées par une droite parallèle à un plan. L'intégration simultanée des équations (2) et (3) conduit ainsi l'auteur à l'hélicoïde gauche à plan directeur.

Enfin, Meusnier détermine la surface minima de révolution, et il démontre qu'elle est engendrée par la rotation d'une chaînette autour de sa base. On voit que son travail a fait connaître, en même temps que l'interprétation géométrique de l'équation de Lagrange, deux surfaces minima, qui sont, aujourd'hui encore, au nombre des plus intéressantes et des plus simples. La méthode par laquelle est obtenu l'hélicoïde est féconde et a été souvent appliquée à la recherche de solutions particulières des équations aux dérivées partielles.

177. C'est dans son *Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles* (*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* pour 1784, p. 118) que Monge s'est occupé pour la première fois des surfaces minima et de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles de Lagrange. Monge commence par intégrer exactement l'équation différentielle des caractéristiques, ce qui est le point essentiel; mais il commet ensuite quelques erreurs de raisonnement qui le conduisent à présenter la solution sous une forme inacceptable; car les coordonnées rectangulaires x, y, z sont exprimées en fonction de deux paramètres a, a par des quadratures de la forme

$$\int (\mathrm{M}\, da + \mathrm{N}\, da'),$$

où M, N sont des fonctions de a et de a' ne satisfaisant pas à la condition d'intégrabilité.

Les erreurs commises par Monge pouvaient être facilement corrigées; et, en effet, dans un beau *Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux dérivées partielles* (*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences pour* 1787, p. 309), Legendre après avoir signalé les objections qu'on doit adresser à la méthode

primitive de Monge, ajoute ces quelques mots : Depuis, « ses recherches l'ont conduit à la vraie intégrale, qu'il a bien voulu me communiquer avec le procédé qu'il avait suivi; mais ce procédé tenant à quelques principes métaphysiques dont les géomètres ne conviennent pas encore, j'ai été curieux de chercher la même intégrale par la voie ordinaire, et j'y ai été engagé par M. Monge lui-même. On verra que j'y suis parvenu fort simplement par un changement de variables qui peut être utile dans d'autres occasions et que j'appliquerai même à des équations plus générales ».

Les « principes métaphysiques » dont il est question dans ce passage sont sans doute les idées de Monge sur la génération des surfaces par la méthode des enveloppes, idées qu'il a développées d'une manière systématique dans l'*Application de l'Analyse à la Géométrie*. Nous avons peine aujourd'hui à les comprendre, sinon dans leur esprit, au moins dans leur enchaînement et dans leurs détails. Il ne faut donc pas s'étonner que le procédé nouveau de Monge, qui coïncide sans doute avec celui qu'il a fait connaître plus tard dans son Ouvrage, ait donné naissance à de sérieuses objections [1].

178. La méthode de Legendre est élégante et irréprochable. Elle consiste à remplacer les variables x, y, z par p, q et

$$v = px + qy - z,$$

en considérant v comme une fonction de p et de q; ce qui revient, suivant une remarque de Chasles, à substituer à la surface sa polaire réciproque par rapport au paraboloïde ayant pour équation

$$2z = x^2 + y^2.$$

Legendre effectue la transformation de variables d'une manière très élégante. Il substitue aux deux expressions de Lagrange

$$p\,dx + q\,dy, \quad \frac{q\,dx - p\,dy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

---

[1] Si nous nous reportons à une indication donnée en 1832 par Poisson dans une Note très courte que nous citons plus loin (n° 180), ces objections auraient été formulées par Laplace et auraient donné naissance à de longues discussions entre les deux grands géomètres.

qui doivent être des différentielles exactes, les suivantes :

$$x\,dp + y\,dq = dv,$$

$$x\,d\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) - y\,d\left(\frac{p}{\sqrt{1+q^2+p^2}}\right),$$

et tout se réduit à écrire que l'expression

$$\frac{\partial v}{\partial p}\,d\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) - \frac{\partial v}{\partial q}\,d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)$$

est une différentielle exacte. On a ainsi l'équation linéaire

$$(4)\qquad (1+p^2)\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} + 2pq\frac{\partial^2 v}{\partial p\,\partial q} + (1+q^2)\frac{\partial^2 v}{\partial q^2} = 0,$$

qui, jointe aux suivantes,

$$(5)\qquad x = \frac{\partial v}{\partial p},\qquad y = \frac{\partial v}{\partial q},\qquad z = p\frac{\partial v}{\partial p} + q\frac{\partial v}{\partial q} - v,$$

suffit à déterminer complètement la surface.

L'équation (4) est de celles qu'il est possible d'intégrer par l'application des méthodes régulières; on peut obtenir les équations en termes finis des caractéristiques et appliquer ensuite la méthode de Laplace. Mais Legendre abrège beaucoup les calculs en formant l'équation

$$(1+p^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2} + 2pq\frac{\partial^2\theta}{\partial p\,\partial q} + (1+q^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial q^2} + 2p\frac{\partial\theta}{\partial p} + 2q\frac{\partial\theta}{\partial q} = 0,$$

à laquelle satisfont x, y, z considérées comme fonctions de p et de q; on pourra lire l'exposition complète de cette méthode dans le grand *Traité de Calcul différentiel et intégral* de Lacroix (2e édition, t. II, p. 625).

Nous devons remarquer que Legendre, après avoir donné les formules dont il devait la connaissance à Monge, fait connaître de nouvelles formules entièrement débarrassées de tout signe d'intégration, et qui auraient pu servir de base à une étude fructueuse des surfaces minima (*voir* plus loin Chapitre II).

179. La méthode d'intégration donnée par Monge dans l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* n'est pas la seule que nous

lui devions; le Traité de Lacroix en contient une autre qui repose sur une idée très ingénieuse et très féconde : elle consiste à transformer une équation aux dérivées partielles en considérant les trois coordonnées x, y, z comme des fonctions de deux paramètres a et b. L'équation des surfaces minima prend ainsi la forme

$$(6)\quad \left[\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2\right]\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial b^2}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial b^2}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial b^2}\right)$$
$$-2\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\right)\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial b}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial b}\right)$$
$$+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2\right]\left(X\frac{\partial^2 y}{\partial a^2}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial b}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial a^2}\right)=0.$$

X, Y, Z étant les cosinus directeurs de la normale déterminés par les équations

$$(7)\quad \begin{cases} X\dfrac{\partial x}{\partial a}+Y\dfrac{\partial y}{\partial a}+Z\dfrac{\partial z}{\partial a}=0,\\[2mm] X\dfrac{\partial x}{\partial b}+Y\dfrac{\partial y}{\partial b}+Z\dfrac{\partial z}{\partial b}=0;\end{cases}$$

et Monge remarque qu'on peut y satisfaire en prenant

$$(8)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial x}{\partial a}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial a}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial a}\right)^2=0,\\[2mm] \left(\dfrac{\partial x}{\partial b}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial b}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial b}\right)^2=0,\end{cases}$$

$$(9)\quad \frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}=\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial b}=\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial b}=0,$$

ce qui donne

$$x=A_1+B_1,\qquad y=A_2+B_2,\qquad z=A_3+B_3,$$

A_1, A_2, A_3 étant des fonctions de a et B_1, B_2, B_3 des fonctions de b, assujetties à vérifier les conditions

$$(10)\quad \begin{cases} dA_1^2+dA_2^2+dA_3^2=0,\\ dB_1^2+dB_2^2+dB_3^2=0.\end{cases}$$

Mais il est clair que cette méthode si élégante est encore sujette à des objections; car, si l'on prend pour a et b les paramètres des lignes de longueur nulle, l'équation (6) donne simplement

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial b}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial b}=0,$$

et non les trois équations (9).

180. La méthode de Legendre et celle qu'Ampère a donnée en 1820 dans le XVIIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* ont été pendant longtemps les seules conduisant sans objection possible à l'intégrale dont la découverte constitue un des plus beaux titres de Monge à notre admiration.

Si on laisse de côté certaines surfaces imaginaires trouvées par Poisson ([1]), on n'a connu, depuis 1776 jusqu'en 1830, que les deux surfaces minima obtenues en premier lieu par Meusnier. Pendant longtemps, on n'a fait aucun usage de l'intégrale de Monge et, dans un article de deux pages qui n'était pas de nature à encourager les géomètres ([2]), Poisson déclarait en 1832 que « malheureusement on ne saurait tirer aucun parti de cette intégrale qui se trouve compliquée de quantités imaginaires et exprimée par le système de trois équations entre deux variables auxiliaires et les coordonnées courantes de la surface ».

Deux ans après, en 1834, paraissait dans le *Journal de Crelle* un travail de Scherk ([3]) qui ajoutait des résultats importants à la théorie des surfaces minima et contenait les premiers exemples de surfaces minima déduites de l'intégrale de Monge et de Legendre.

L'auteur rentre d'abord dans la voie ouverte par Meusnier; il décompose l'équation aux dérivées partielles de Lagrange en deux autres qui auront des solutions communes. C'est ainsi, par exemple, qu'en supposant

$$s = 0,$$

il est conduit à la surface définie par l'équation

$$e^{az} = \frac{\cos ax}{\cos ay}. \tag{11}$$

([1]) Poisson, *Remarques sur une classe particulière d'équations aux différences partielles à trois variables* (*Correspondance de l'École Polytechnique*, t. II, 1813, p. 410).

([2]) Poisson, *Note sur la surface dont l'aire est un minimum entre des limites données* (*Journal de Crelle*, t. VIII, 1832, p. 361).

([3]) H. F. Scherk, *Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen* (*Journal de Crelle*, t. XIII, p. 185). Ce travail est la suite et le complément d'un Mémoire couronné par la Société des Sciences de Leipzig et inséré dans le Tome IV des *Acta Societatis Jablonovianæ*, p. 204-280.

En prenant les coordonnées semi-polaires z, ρ, θ et en supposant

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\theta} = 0,$$

il obtient tous les hélicoïdes qui sont des surfaces minima; ils sont déterminés par l'équation

$$(12)\qquad z = b\log\left[\sqrt{\rho^2+a^2}+\sqrt{\rho^2-b^2}\right] + a\,\text{arc tang}\,\frac{b\sqrt{\rho^2+a^2}}{a\sqrt{\rho^2+b^2}} + a\theta + c,$$

où a, b, c sont trois constantes quelconques (¹), et ils comprennent comme cas particuliers à la fois la caténoïde et l'hélicoïde à plan directeur, qui correspondent respectivement aux hypothèses $a = 0$ et $b = 0$. L'auteur montre quelles valeurs on devra attribuer aux fonctions arbitraires qui entrent dans les formules de Monge pour retrouver les surfaces précédentes. Mais de plus, et c'est là l'un des principaux mérites de son travail, il déduit par l'unique emploi de ces formules des surfaces nouvelles, assez compliquées, mais réelles. A la fin de son étude, il se propose, mais sans y réussir complètement, de déterminer toutes les surfaces minima engendrées par le mouvement d'une ligne droite. Cette question a été résolue pour la première fois par Catalan (²) qui a prouvé que la seule surface minima réelle engendrée par le mouvement d'une

---

(¹) En appliquant les méthodes du n° 73 à ces hélicoïdes, on trouve que leur élément linéaire a pour expression

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2 + b^2)\,d\theta^2.$$

Tous ceux pour lesquels la somme $a^2 + b^2$ est la même sont donc applicables les uns sur les autres.

(²) Catalan, *Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum* (*Journal de Liouville*, 1re série, t. VII, 1842, p. 203). — *Voir* aussi J.-A. Serret, *Note sur la surface réglée dont les rayons de courbure principaux sont égaux et dirigés en sens contraire* (*Journal de Liouville*, t. XI, 1846, p. 451).

Nous donnerons plus loin deux démonstrations de la proposition de *Catalan*. Mais nous pouvons, dès à présent, remarquer qu'elle est implicitement contenue dans les résultats donnés au Livre I, Chapitre I. Nous allons voir que toute surface minima est caractérisée par cette propriété d'avoir, en chaque point, ses tangentes asymptotiques rectangulaires. Si donc elle est réglée, une première famille de lignes asymptotiques étant formée par les génératrices rectilignes, la seconde famille le sera des trajectoires orthogonales de ces génératrices. Par suite, toutes ces trajectoires orthogonales admettront chacune les génératrices rectilignes comme normales principales. Elles seront donc, d'après les résultats

ligne droite est l'hélicoïde à plan directeur. On peut la rattacher d'ailleurs à une proposition plus générale, obtenue ultérieurement par Beltrami et M. Dini ([1]), et d'après laquelle les seules surfaces réglées pour lesquelles il existe une relation entre les deux rayons de courbure sont des hélicoïdes.

181. Nous laisserons de côté différentes recherches que nous aurons l'occasion de signaler au cours de cette étude et nous passerons immédiatement aux travaux d'Ossian Bonnet qui ont été publiés à partir de 1853 dans quatre Notes insérées aux *Comptes rendus* ([2]) et développées d'une manière complète dans le *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes*, déjà rappelé plus haut (n° 163). Ces recherches, où l'éminent géomètre emploie les variables que nous avons déjà indiquées, ont réalisé, on peut le dire, un progrès décisif dans l'étude des surfaces minima. Elles ont donné l'équation intégrale sous une forme qui a permis d'obtenir toutes les surfaces réelles et un nombre illimité de surfaces algébriques; elles ont fait connaître surtout un grand nombre de propriétés géométriques communes à toutes ces surfaces; elles ont enfin fourni la solution complète du problème suivant, qui est fondamental : *Déterminer la surface minima passant par une courbe quelconque et admettant en chaque point de cette courbe un plan tangent donné*. Nous compléterons d'ailleurs, dans notre exposition, ces indications rapides.

---

donnés au n° 11, des hélices tracées sur un cylindre circulaire droit, et la surface minima sera l'hélicoïde à plan directeur.

Cette démonstration ne s'appliquerait pas si les génératrices rectilignes allaient rencontrer le cercle imaginaire de l'infini. La surface se réduit alors à un cylindre imaginaire assujetti à l'unique condition d'avoir pour génératrices rectilignes des droites de longueur nulle.

([1]) Beltrami, *Risoluzione di un problema relativo alla teoria delle superfici gobbe* (*Annales de Tortolini*, t. VII, 1865, p. 105).

Dini (U.), *Sulle superficie gobbe nelle quali uno dei due raggi di curvatura principale è una funzione dell' altro* (même Volume, p. 205).

([2]) O. Bonnet, *Note sur la théorie générale des surfaces* (*Comptes rendus*, t. XXXVII, 1853, p. 529); *Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation intégrale des surfaces minima* (*Comptes rendus*, t. XL, 1855, p. 1107); *Observations sur les surfaces minima* (*Comptes rendus*, t. XLI, 1855, p. 1057); *Nouvelles remarques sur les surfaces à aire minima* (*Comptes rendus*, t. XLII, 1856, p. 532).

La méthode de Bonnet est directe et indépendante de l'intégrale de Monge. Dans un travail [1] publié par extraits dans les *Comptes rendus* en 1855, Catalan a fait connaître différentes transformations de cette intégrale et de l'équation aux dérivées partielles, qui l'ont conduit, en particulier, à un système de formules entièrement débarrassées d'imaginaires. Il a aussi indiqué les moyens d'obtenir un nombre illimité de surfaces algébriques.

182. Dans ses travaux, S. Lie a appelé l'attention des géomètres sur des recherches qui, malgré l'intérêt qu'elles présentent, étaient restées ignorées. En 1844, E. G. Björling, professeur à l'Université d'Upsal, a inséré dans les *Archives de Grunert* (t. IV, p. 290) un Mémoire de 25 pages intitulé : *In integrationem æquationis derivatarum partialium superficiei cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis æquales sunt signoque contrario.* Ce travail mérite une analyse détaillée. L'auteur y reprend d'abord la méthode de Legendre; mais, en choisissant des variables nouvelles, il est conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{2\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 0, \tag{13}$$

qui est plus élégante que celle de Legendre et qu'il intègre par l'application régulière de la méthode de Laplace. Il obtient ensuite des expressions très simples des coordonnées x, y, z en fonction des deux variables α et β, et de deux fonctions arbitraires. Puis il indique comment on détermine ces fonctions arbitraires de telle manière que la surface passe par une courbe donnée et y admette en chaque point un plan tangent donné. La solution de ce dernier problème, que Björling a eu le mérite de poser et de résoudre le premier, sans en apprécier peut-être toute l'importance, est ramenée dans son Mémoire à la détermination d'une fonction dont la dérivée troisième est connue.

Björling examine ensuite quelques autres problèmes qu'on peut

---

[1] Une rédaction développée des recherches de Catalan a paru en 1858 dans le XXXVIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* sous le titre suivant : *Mémoire sur les surfaces dont les rayons de courbure en chaque point sont égaux et de signes contraires.*

rattacher au précédent, par exemple le suivant : *Déterminer la surface minima qui coupe une surface donnée suivant une courbe telle qu'en chacun de ses points, p et q soient des fonctions, données à l'avance, de x, y, z.*

Le reste du Mémoire ne contient rien de nouveau.

183. Les importantes recherches de Weierstrass, publiées en 1866 (1), reposent sur l'emploi des formules de Monge, mises sous une forme qui est extrêmement élégante, et qui paraît la plus commode dans les applications. Weierstrass a résolu, le premier, plusieurs questions essentielles : il a, en particulier, donné le moyen de trouver toutes les surfaces minima réelles et algébriques. Ses formules établissent de la manière la plus claire le lien qui existe entre la théorie des fonctions d'une variable imaginaire et celle des surfaces minima, puisqu'elles montrent qu'à toute fonction de l'argument imaginaire correspond une surface minima réelle. Mais, comme nous ferons connaître les recherches de cet illustre géomètre, ainsi que les principaux travaux publiés depuis 1867, nous arrêterons ici cet exposé historique, en signalant toutefois un Mémoire de Beltrami *Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima*, inséré en 1868 dans le Tome VII des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Bologne* (2e série). Ce beau Mémoire, sur lequel nous aurons à revenir, contient une Notice historique très étendue qui nous a permis, du moins nous l'espérons, de n'oublier aucun résultat important publié sur notre sujet avant 1860. On consultera aussi avec le plus grand profit le Mémoire de M. Schwarz intitulé *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen*, inséré au Tome LXXX du *Journal de Crelle* (1875, p. 280) (2).

---

(1) Weierstrass, *Ueber die Flächen deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist* (*Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1866, p. 612, 855): *Ueber eine besondere Gattung von Minimalflächen* (même Recueil, 1867, p. 511).

(2) *Voir* aussi H. A. Schwarz, *Gesammelte mathematische Abbhandlungen*, t. I, p. 168.

CHAPITRE II.

LES SURFACES MINIMA EN COORDONNÉES PONCTUELLES.

Première condition à laquelle doit satisfaire la surface minima passant par un contour donné. — Pour que l'aire de cette surface soit plus petite que celle de toutes les autres surfaces infiniment voisines limitées au même contour, il faut que la somme des rayons de courbure soit égale à zéro. — On peut interpréter géométriquement cette propriété de la manière suivante : les deux familles de lignes de longueur nulle tracées sur la surface doivent former un réseau conjugué. — On déduit aisément de là que les surfaces minima sont des surfaces de translation, engendrées de deux manières différentes par la translation d'une ligne de longueur nulle. — Formules de Monge et de Legendre débarrassées de tout signe d'intégration. — Formules plus simples et plus élégantes d'Enneper et de Weierstrass. — Détermination de toutes les surfaces minima algébriques. — Détermination de toutes les surfaces minima réelles. — Relation établie par Weierstrass entre les surfaces minima et les fonctions d'une variable complexe. — A toute fonction de la variable complexe on peut faire correspondre une surface minima. Au contraire, à toute surface minima correspondent deux fonctions de la variable complexe, qui sont différentes en général.

---

184. Considérons une surface quelconque, ou plutôt une portion continue de surface (Σ) limitée par un contour, et proposons-nous de trouver la variation de l'aire quand on passe à une surface infiniment voisine. Soient x, y, z les coordonnées d'un point de (Σ); c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale en ce point. Nous prendrons pour coordonnées curvilignes u et v les paramètres des lignes de courbure de la surface. Alors, si l'on désigne par R, R′ les deux rayons de courbure au point considéré, les formules d'Olinde Rodrigues nous donneront

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{R}\dfrac{\partial c}{\partial u} = 0, & \dfrac{\partial y}{\partial u} + \mathrm{R}\dfrac{\partial c'}{\partial u} = 0, & \dfrac{\partial z}{\partial u} + \mathrm{R}\dfrac{\partial c''}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{R}'\dfrac{\partial c}{\partial v} = 0, & \dfrac{\partial y}{\partial v} + \mathrm{R}'\dfrac{\partial c'}{\partial v} = 0, & \dfrac{\partial z}{\partial v} + \mathrm{R}'\dfrac{\partial c''}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

On a, d'ailleurs,

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial u}\dfrac{\partial c}{\partial v} + \dfrac{\partial c'}{\partial u}\dfrac{\partial c'}{\partial v} + \dfrac{\partial c''}{\partial u}\dfrac{\partial c''}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Nous poserons, pour abréger,

$$(3)\quad \begin{cases} e = \left(\dfrac{\partial c}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial c'}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial c''}{\partial u}\right)^2, \\ g = \left(\dfrac{\partial c}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial c'}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial c''}{\partial v}\right)^2, \\ \mathrm{E} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ \mathrm{G} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2; \end{cases}$$

on aura évidemment

$$\mathrm{E} = \mathrm{R}^2 e, \qquad \mathrm{G} = \mathrm{R}'^2 g,$$

et l'on obtiendra pour l'élément linéaire de la surface (Σ) l'expression

$$(4)\qquad ds^2 = \mathrm{R}^2 e\, du^2 + \mathrm{R}'^2 g\, dv^2 = \mathrm{E}\, du^2 + \mathrm{G}\, dv^2.$$

Cela posé, considérons une surface (Σ') infiniment voisine de (Σ); la normale en un point M de (Σ) rencontre (Σ') en un point M'. Désignons par λ la distance MM'; la surface (Σ') sera, évidemment, définie si l'on donne λ en fonction de u et de v; alors les coordonnées X, Y, Z d'un point de (Σ') seront déterminées par les formules

$$\mathrm{X} = x + c\lambda, \qquad \mathrm{Y} = y + c'\lambda, \qquad \mathrm{Z} = z + c''\lambda,$$

qui donnent

$$(5)\quad \begin{cases} d\mathrm{X} = (\lambda - \mathrm{R})\dfrac{\partial c}{\partial u}\, du + (\lambda - \mathrm{R}')\dfrac{\partial c}{\partial v}\, dv + c\, d\lambda, \\ d\mathrm{Y} = (\lambda - \mathrm{R})\dfrac{\partial c'}{\partial u}\, du + (\lambda - \mathrm{R}')\dfrac{\partial c'}{\partial v}\, dv + c'\, d\lambda, \\ d\mathrm{Z} = (\lambda - \mathrm{R})\dfrac{\partial c''}{\partial u}\, du + (\lambda - \mathrm{R}')\dfrac{\partial c''}{\partial v}\, dv + c''\, d\lambda. \end{cases}$$

On en déduit, pour l'élément linéaire de (Σ'), l'expression

$$(6)\qquad ds'^2 = (\lambda - \mathrm{R})^2 e\, du^2 + (\lambda - \mathrm{R}')^2 g\, dv^2 + d\lambda^2,$$

et, pour l'élément superficiel de cette surface,

$$dS = \sqrt{EG}\left(1 - \frac{\lambda}{R}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{R'}\right)\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2}{e(\lambda - R)^2} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2}{g(\lambda - R')^2}}\,du\,dv.$$

185. Supposons maintenant que l'on considère une portion de (Σ) limitée par un contour (C) et que l'on veuille comparer l'aire de cette portion à celle d'une surface infiniment voisine (Σ') passant par le même contour. Alors λ devra être une fonction infiniment petite s'annulant en tous les points de (C). L'aire de (Σ') sera représentée par l'intégrale double

$$(7)\quad S = \iint \sqrt{EG}\left(1 - \frac{\lambda}{R}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{R'}\right)\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2}{e(\lambda - R)^2} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2}{g(\lambda - R')^2}}\,du\,dv$$

étendue à toutes les valeurs de u, v qui correspondent aux points de (Σ) situés à l'intérieur de (C); et cette aire, développée suivant les puissances de la quantité infiniment petite qui entre en facteur dans λ, pourra s'écrire

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} S = &\iint \sqrt{EG}\,du\,dv - \iint \sqrt{EG}\,\lambda\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)du\,dv \\ &+ \iint \sqrt{EG}\left[\frac{\lambda^2}{RR'} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2}{2eR^2} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2}{2gR'^2}\right]du\,dv, \end{aligned}\right.$$

les termes négligés étant du troisième ordre seulement. Si l'on fait $\lambda = 0$, on trouve l'aire de (Σ). L'accroissement de l'aire, quand on passe de (Σ) à (Σ'), sera donc déterminé par la formule

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta S = &-\iint \sqrt{EG}\,\lambda\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)du\,dv \\ &+ \iint \sqrt{EG}\left[\frac{\lambda^2}{RR'} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2}{2eR^2} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2}{2gR'^2}\right]du\,dv, \end{aligned}\right.$$

au même ordre d'approximation que précédemment.

Il résulte immédiatement de là qu'il faut, pour qu'une surface soit minima, que la somme de ses rayons de courbure principaux soit nulle en chaque point. En effet, supposons qu'il en soit

autrement, et prenons pour λ une expression de la forme

$$\lambda = m\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\varphi^2,$$

φ étant une fonction de u et de v qui devra s'annuler en tous les points du contour (C) et m une constante infiniment petite. L'expression (9) de ΔS prendra la forme

$$\Delta S = -m \iint \sqrt{EG}\,\varphi^2\left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R'}\right)^2 du\,dv,$$

les termes négligés étant de l'ordre de m^2. L'intégrale précédente n'est pas nulle, puisque tous ses éléments ont le même signe. On peut donc prendre m assez petit pour que les termes négligés, qui sont de l'ordre de m^2, soient plus petits que le précédent et, par conséquent, pour que chaque élément de ΔS ait le signe de $-m$. En donnant à m le signe positif, on trouvera pour ΔS une valeur négative; on obtiendra donc une surface dont l'aire sera plus petite que celle de (Σ).

Ainsi, la première condition pour que l'aire de (Σ) soit la plus petite possible est que la somme des rayons de courbure principaux soit nulle en chaque point de la surface, ou, ce qui est la même chose, que l'indicatrice soit partout une hyperbole équilatère. L'usage a prévalu d'appeler *surfaces minima* toutes celles qui satisfont à cette condition; mais la méthode que nous avons suivie montre bien que, si elle est nécessaire, elle ne sera pas toujours suffisante. Faisons, en effet, $R' = -R$ dans la formule (9); l'expression de ΔS deviendra

$$(10) \qquad \Delta S = \iint \sqrt{eg}\left[-\lambda^2 + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2}{2e} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2}{2g}\right] du\,dv,$$

les termes négligés étant du troisième ordre par rapport à λ; et il faudra que l'intégrale double qui figure dans le second membre de cette formule soit positive quand on y substituera une fonction quelconque, assujettie seulement à s'annuler en tous les points du contour de (Σ). Négligeant ici cette condition supplémentaire, nous nous attacherons à la détermination des surfaces pour lesquelles la somme des rayons de courbure est égale à zéro.

186. Nous venons de voir qu'on peut les définir encore en remarquant que l'indicatrice est une hyperbole équilatère ou que les lignes asymptotiques se coupent à angle droit. Il y a avantage à énoncer la propriété caractéristique des surfaces minima sous la forme suivante : *Les deux familles de lignes de longueur nulle tracées sur la surface doivent former un réseau conjugué.* On sait, en effet, que l'hyperbole équilatère est la seule conique admettant pour diamètres conjugués les deux droites de coefficients angulaires $+i$ et $-i$.

Ce point étant admis, prenons comme variables indépendantes α et β les paramètres de ces deux systèmes de lignes de longueur nulle. Puisqu'elles forment un réseau conjugué, les coordonnées rectangulaires x, y, z seront trois solutions particulières d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} - A\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - B\frac{\partial\theta}{\partial\beta} = 0.$$

On aura donc

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} - A\frac{\partial x}{\partial\alpha} - B\frac{\partial x}{\partial\beta} = 0,\\ &\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta} - A\frac{\partial y}{\partial\alpha} - B\frac{\partial y}{\partial\beta} = 0,\\ &\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} - A\frac{\partial z}{\partial\alpha} + B\frac{\partial z}{\partial\beta} = 0.\end{aligned}\right.$$

et de plus, par suite du choix particulier de α et de β,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^2 = 0,\\ &\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Les formules (11) et (12) expriment évidemment toutes les conditions résultant, et de la définition de la surface, et du choix des coordonnées.

Or, si l'on différentie la première des équations (12) par rapport à β, la seconde par rapport à α, et que l'on remplace les dérivées secondes par leurs valeurs tirées des équations (11), on trouvera

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)A = 0,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)B = 0.$$

Comme on ne peut avoir

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0,$$

sans quoi l'arc de toute courbe tracée sur la surface serait nul, il faut que A et B soient nuls; les équations (11) se réduiront aux suivantes :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0,$$

dont l'intégration est immédiate et nous donne

$$(13) \qquad \begin{cases} x = f_1(\alpha) + \varphi_1(\beta), \\ y = f_2(\alpha) + \varphi_2(\beta), \\ z = f_3(\alpha) + \varphi_3(\beta). \end{cases}$$

Mais pour que les équations (12) soient satisfaites, il faudra que l'on ait

$$(14) \qquad \begin{cases} f_1'^2(\alpha) + f_2'^2(\alpha) + f_3'^2(\alpha) = 0, \\ \varphi_1'^2(\beta) + \varphi_2'^2(\beta) + \varphi_3'^2(\beta) = 0. \end{cases}$$

Les formules (13) nous montrent que les surfaces minima appartiennent à la grande classe que nous avons déjà considérée (Liv. I, Ch. IX) des surfaces de translation. Nous reviendrons plus loin sur cette interprétation géométrique des formules (13) et nous indiquerons tout le parti qu'en a tiré S. Lie.

187. Comme on peut, sans changer le système de coordonnées, substituer à α et à β des fonctions quelconques de ces variables, on pourra supposer

$$f_1(\alpha) = \alpha, \qquad \varphi_1(\beta) = \beta.$$

On déduira alors les formules (14)

$$f_3'(\alpha) = i\sqrt{1 + f_2'^2(\alpha)}, \qquad \varphi_3'(\beta) = i\sqrt{1 + \varphi_2'^2(\beta)},$$

et, si l'on supprime les indices, les formules (13) prendront

la forme

$$(15)\qquad \begin{cases} x = \alpha + \beta, \\ y = f(\alpha) + \varphi(\beta), \\ z = i\int\sqrt{1+f'^2(\alpha)}\,d\alpha + i\int\sqrt{1+\varphi'^2(\beta)}\,d\beta, \end{cases}$$

qui est due à Monge [1].

Legendre et Monge ont aussi développé une autre manière de résoudre les équations (14). Supposons que l'on ait obtenu six fonctions satisfaisant à ces équations, et posons

$$\frac{f'_2(\alpha)}{f'_1(\alpha)} = \alpha_1, \qquad \frac{\varphi'_2(\beta)}{\varphi'_1(\beta)} = \beta_1,$$

ce qui donnera

$$f'_3(\alpha) = i f'_1(\alpha)\sqrt{1+\alpha_1^2}, \qquad \varphi'_3(\beta) = i\varphi'_1(\beta)\sqrt{1+\beta_1^2}.$$

Si l'on prend comme nouvelles variables α_1 et β_1, on pourra toujours donner à $f'_1(\alpha)$, $\varphi'_1(\beta)$ les formules suivantes :

$$f'_1(\alpha) = f''(\alpha_1)\frac{d\alpha_1}{d\alpha}, \qquad \varphi'_1(\beta) = \varphi''(\beta_1)\frac{d\beta_1}{d\beta},$$

et les formules (13) deviendront alors

$$\begin{aligned} x &= f(\alpha_1) + \varphi(\beta_1), \\ y &= \alpha_1 f'(\alpha_1) - f(\alpha_1) + \beta_1\varphi'(\beta_1) - \varphi(\beta_1), \\ z &= i\int\sqrt{1+\alpha_1^2}\,f''(\alpha_1)\,d\alpha_1 + i\int\sqrt{1+\beta_1^2}\,\varphi''(\beta_1)\,d\beta_1. \end{aligned}$$

Il y a encore des quadratures à effectuer. Voici comment Legendre

---

[1] *Analyse appliquée à la Géométrie*, p. 211. La méthode par laquelle nous avons obtenu les équations finies de la surface minima laisse de côté, comme la plupart de celles qui ont été employées, le cas exceptionnel où les deux systèmes de lignes de longueur nulle sont confondus dans toute l'étendue de la surface. Alors, nous l'avons déjà vu (n° 121), la surface sera une développable imaginaire circonscrite au cercle de l'infini; elle doit être considérée comme une surface minima; car elle satisfait à l'équation du premier ordre

$$1 + p^2 + q^2 = 0,$$

et, par suite, on le vérifiera aisément, à l'équation

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

qui caractérise les surfaces minima.

les fait disparaître. En intégrant par parties, on a

$$\int \sqrt{1+\alpha_1^2}\, f''(\alpha_1)\, d\alpha_1 = f'(\alpha_1)\sqrt{1+\alpha_1^2} - \frac{\alpha_1 f(\alpha_1)}{\sqrt{1+\alpha_1^2}} + \int \frac{f(\alpha_1)\, d\alpha_1}{(1+\alpha_1^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si donc on pose

$$f(\alpha_1) = (1+\alpha_1^2)^{\frac{3}{2}} F'(\alpha_1),$$

et de même

$$\varphi(\beta_1) = (1+\alpha_1^2)^{\frac{3}{2}} \Phi'(\beta_1),$$

les formules seront débarrassées de tout signe d'intégration. On les trouvera dans le Mémoire de Legendre et dans le Traité de Lacroix (t. II, p. 627).

188. Mais la solution la plus élégante des équations (14) est celle qui a été indiquée par Enneper [1] et complètement développée pour la première fois par Weierstrass dans les articles déjà cités (n°183) des *Monatsberichte*.

Posons

$$\frac{f'_1(\alpha) + i f'_2(\alpha)}{-f'_3(\alpha)} = u;$$

la première des équations (14) nous donnera

$$f'_1(\alpha) - i f'_2(\alpha) = \frac{f'_3(\alpha)}{u},$$

et par suite, les rapports des trois dérivées f'_1, f'_2, f'_3 seront déterminés par les formules

$$\frac{f'_1(\alpha)}{1-u^2} = \frac{f'_2(\alpha)}{i(1+u^2)} = \frac{f'_3(\alpha)}{2u};$$

u est évidemment une fonction de α. Nous pouvons, par conséquent, en écartant, pour un instant, le cas exceptionnel où u serait une constante, représenter la valeur commune des rapports précédents par

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}(u)\frac{du}{d\alpha}.$$

---

[1] Enneper (A.), *Analytisch-geometrische Untersuchungen* (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. IX, 1864, p. 107).

Nous aurons alors

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2}\int (1-u^2)\mathcal{F}(u)\,du,$$

$$f_2(\alpha) = \frac{i}{2}\int (1+u^2)\mathcal{F}(u)\,du,$$

$$f_3(\alpha) = \int u\mathcal{F}(u)\,du.$$

On trouverait de même, en posant

$$\frac{\varphi'_1(\beta) - i\varphi'_2(\beta)}{-\varphi'_3(\beta)} = u_1, \tag{16}$$

et en suivant une méthode analogue pour ce qui concerne β,

$$\varphi_1(\beta) = \frac{1}{2}\int (1-u_1^2)\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,$$

$$\varphi_2(\beta) = -\frac{i}{2}\int (1+u_1^2)\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,$$

$$\varphi_3(\beta) = \int u_1\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1.$$

Les formules qui définissent la surface seront alors

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int (1-u^2)\mathcal{F}(u)\,du + \frac{1}{2}\int (1-u_1^2)\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,\\ y &= \frac{i}{2}\int (1+u^2)\mathcal{F}(u)\,du - \frac{i}{2}\int (1+u_1^2)\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,\\ z &= \int u\mathcal{F}(u)\,du + \int u_1\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Il suffira de remplacer $\mathcal{F}(u)$ par la dérivée troisième d'une fonction $f(u)$ de u, et de même $\mathcal{F}_1(u_1)$ par la dérivée troisième d'une fonction $f_1(u_1)$ pour obtenir les formules suivantes, débarrassées de toute quadrature,

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1-u^2}{2}f''(u) + uf'(u) - f(u)\\ &\quad + \frac{1-u_1^2}{2}f''_1(u_1) + u_1f'_1(u_1) - f_1(u_1),\\ y &= i\frac{1+u^2}{2}f''(u) - iuf'(u) + if(u),\\ &\quad - i\frac{1+u_1^2}{2}f''_1(u_1) + iu_1f'_1(u_1) - if_1(u_1),\\ z &= zf''(u) - f'(u) + u_1f''_1(u_1) - f'_1(u_1), \end{aligned}\right. \tag{18}$$

qui ont été données par Weierstrass.

189. Avant de poursuivre l'application des formules précédentes, nous remarquerons qu'elles laissent de côté le cas où l'une des quantités u, u_1, définies par les formules (15) ou (16), ne pourrait être choisie comme variable indépendante et se réduirait à une constante. Supposons, par exemple, que u soit constante. On aura alors

$$\frac{f_1'(\alpha)}{1-u^2} = \frac{f_2'(\alpha)}{i(1+u^2)} = \frac{f_3'(\alpha)}{2u},$$

et si l'on désigne par $\frac{1}{2}\theta'(\alpha)$ la valeur commune de ces rapports, il faudra substituer aux formules (17) les suivantes :

$$x = \frac{1-u^2}{2}\theta(\alpha) + \frac{1}{2}\int(1-u_1^2)\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,$$

$$y = i\frac{1+u^2}{2}\theta(\alpha) - \frac{i}{2}\int(1+u_1^2)\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,$$

$$z = u\theta(\alpha) + \int u_1\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1.$$

Les courbes $u_1 = \text{const.}$ seront des droites parallèles allant rencontrer le cercle de l'infini. La surface correspondante sera donc un cylindre imaginaire [1].

Si u et u_1 étaient toutes les deux constantes, la surface, on le reconnaîtra aisément, se réduirait à un plan.

190. Après avoir signalé ce cas exceptionnel, revenons aux formules (17) et (18). Nous allons indiquer d'abord comment on en déduit toutes les surfaces algébriques.

Si les fonctions désignées par $f(u)$, $f_1(u_1)$ dans les formules (18) sont algébriques, la surface minima correspondante le sera aussi. Nous allons démontrer la proposition réciproque et prouver que la surface minima ne peut être algébrique que si les fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$ sont algébriques.

Les formules (17) nous donnent les relations

$$(19)\qquad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u} + i\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial z}{\partial u}} = -u, \qquad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u_1} - i\dfrac{\partial y}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial z}{\partial u_1}} = -u_1,$$

---

[1] Les surfaces de cette nature sont celles qui ont été signalées par Poisson dans le Tome II de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*. Voir n° 180.

dont les premiers membres peuvent être calculés, car ils se rapportent à des déplacements effectués suivant les lignes de longueur nulle de la surface; p et q désignant les dérivées partielles de z, considérée comme fonction de x et y, les équations

$$(20)\qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \end{cases}$$

déterminent deux systèmes différents de valeurs pour les différentielles dx, dy, dz. Soient

$$\delta x,\quad \delta y,\quad \delta z;\quad \delta' x,\quad \delta' y,\quad \delta' z$$

ces deux systèmes différents; u et u_1 seront évidemment définis, soit par les formules

$$(21)\qquad \frac{\delta x + i\,\delta y}{\delta z} = -u, \qquad \frac{\delta' x - i\,\delta' y}{\delta' z} = -u_1,$$

soit par les suivantes :

$$(22)\qquad \frac{\delta' x + i\,\delta' y}{\delta' z} = -u, \qquad \frac{\delta x - i\,\delta y}{\delta z} = -u_1,$$

et seront, par conséquent, dans le cas qui nous occupe, des fonctions algébriques de x et de y. Réciproquement, x, y et, par suite, z seront des fonctions algébriques de u et u_1. Soit

$$\varphi(u) + \varphi_1(u_1)$$

l'expression de l'une quelconque des coordonnées; on aura une relation algébrique

$$F[\varphi(u) + \varphi_1(u_1),\ u,\ u_1] = 0.$$

Il résulte de là, évidemment, que $\varphi(u)$ et $\varphi_1(u_1)$ seront des fonctions algébriques; car si, dans l'équation précédente, on donne à u_1, par exemple, une valeur fixe quelconque, $\varphi_1(u_1)$ prendra une valeur constante, et il restera une équation algébrique déterminant $\varphi(u)$.

En appliquant cette proposition aux trois coordonnées, nous voyons que les parties de leurs expressions qui ne dépendent

que de u,

$$\alpha = \frac{1-u^2}{2} f''(u) + u f'(u) - f(u),$$

$$\beta = i\frac{1+u^2}{2} f''(u) - iu f'(u) + i f(u),$$

$$\gamma = u f''(u) - f'(u),$$

doivent être des fonctions algébriques de u; il en sera donc de même de la combinaison

$$\alpha(1-u^2) + \beta i(1+u^2) + 2\gamma u = -2f(u),$$

c'est-à-dire de $f(u)$. Comme le raisonnement s'applique également à la fonction $f_1(u_1)$, la proposition de Weierstrass est complètement démoutrée.

191. Recherchons maintenant à quelles conditions la surface représentée par les équations (17) ou (18) sera réelle. Considérons d'abord les formules (17); si l'on y prend pour $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ des fonctions imaginaires conjuguées et si, de plus, les intégrales relatives à u et u_1 sont prises suivant des chemins imaginaires conjugués, les expressions des différentes coordonnées seront évidemment réelles; car, à chaque élément de l'intégrale relative à u, on pourra faire correspondre, dans chacune des trois formules, un élément imaginaire conjugué de l'autre intégrale. Nous allons montrer que ces conditions, qui sont suffisantes, sont aussi nécessaires.

Reportons-nous, en effet, aux formules (20) à (22). Pour tout point réel d'une nappe réelle, on pourra supposer que les deux systèmes de rapports δx, δy, δz; δ'_x, δ'_y, δ'_z, définis par les formules (20) se déduisent l'un de l'autre par le changement de i en $-i$. Par suite, les valeurs de u et de u_1 déduites de l'un ou l'autre des systèmes (21), (22) seront imaginaires conjuguées.

On déduit, d'autre part, des formules (17) les suivantes :

$$\frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial u} = \mathcal{F}(u), \qquad \frac{\partial x}{\partial u_1} + i\frac{\partial y}{\partial u_1} = \mathcal{F}_1(u_1).$$

Comme les premiers membres de ces relations sont imaginaires conjugués, il en sera de même des seconds. Les fonctions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ doivent donc être imaginaires conjuguées, ainsi que les arguments u, u_1.

Il résulte de là que les nappes réelles de la surface minima seront représentées par les équations

$$(23)\qquad \begin{cases} x = \mathcal{R}\int (1-u^2)\mathcal{F}(u)\,du. \\ y = \mathcal{R}\int i(1-u^2)\mathcal{F}(u)\,du. \\ z = \mathcal{R}\int 2u\mathcal{F}(u)\,du, \end{cases}$$

le signe $\mathcal{R}$ indiquant que l'on prend seulement la partie réelle de la fonction. Les deux variables réelles dont dépend la position du point sont alors la partie réelle et la partie imaginaire de l'argument u.

En ce qui concerne la recherche des surfaces réelles, les formules (18) présentent une légère difficulté. Il est clair que, si l'on y substitue pour $f(u)$, $f_1(u_1)$ deux fonctions imaginaires conjuguées, la surface correspondante aura des nappes réelles, que l'on obtiendra en donnant à u et à u_1 des valeurs imaginaires conjuguées; mais la proposition réciproque n'est pas exacte. Pour que la surface minima soit réelle, il n'est pas nécessaire que $f(u)$ et $f_1(u_1)$ soient des fonctions imaginaires conjuguées. En effet, les expressions de x, y, z ne changent pas, on le vérifie aisément, si l'on y remplace $f(u)$ et $f_1(u_1)$ respectivement par

$$f(u) + A(1-u^2) + Bi(1+u^2) + 2Cu = \varphi(u),$$
$$f_1(u_1) - A(1-u_1^2) + Bi(1+u_1^2) - 2Cu_1 = \varphi_1(u_1),$$

A, B, C désignant des constantes quelconques. En admettant même que $f(u)$ et $f_1(u_1)$ soient des fonctions imaginaires conjuguées, la même propriété ne saurait appartenir aux fonctions $\varphi(u)$, $\varphi_1(u_1)$ pour toutes les valeurs des constantes A, B, C. Mais on peut démontrer que, dans le cas où la surface minima est réelle, parmi toutes les déterminations possibles du système des deux fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$, il en existe toujours une infinité pour lesquelles les deux fonctions sont imaginaires conjuguées.

En effet, les équations

$$(24)\qquad \begin{cases} x = \mathcal{R}\ [(1-u^2)f''(u) + 2uf'(u) - 2f'(u)]. \\ y = \mathcal{R}i[(1+u^2)f''(u) - 2uf'(u) + 2f(u)]. \\ z = \mathcal{R}\ [2uf''(u) - 2f'(u)] \end{cases}$$

représentent évidemment une surface réelle; et pour toute fonction $f(u)$ satisfaisant à l'équation

$$f'''(u) = \mathcal{F}(u), \tag{25}$$

les différentielles des coordonnées déduites des formules (24) sont identiques à celles que l'on obtient au moyen des formules (23); par conséquent, les équations (23) et (24) représentent deux nappes réelles, que l'on pourra toujours faire coïncider par une simple translation imprimée à l'une d'elles. Ce point étant admis, substituons à la place de $f(u)$, dans les formules (24), la fonction plus générale qui satisfait encore à l'équation (25)

$$f(u) + A(1 - u^2) + B\,i(1 + u^2) + 2Cu.$$

Les expressions de x, y, z s'y trouveront augmentées respectivement de

$$-4\mathcal{R}A, \quad -4\mathcal{R}B, \quad -4\mathcal{R}C.$$

On pourra disposer des parties réelles des constantes A, B, C de manière à faire coïncider les deux surfaces représentées par les formules (23) et (24); quant aux parties imaginaires de ces constantes, elles demeureront entièrement arbitraires. On pourra donc, sans changer la surface, substituer à la valeur obtenue pour $f(u)$ l'une quelconque des fonctions comprises dans l'expression générale

$$f(u) + ai(1 - u^2) + b(1 + u_2) + ciu,$$

où a, b, c sont trois constantes *réelles* quelconques.

192. Revenons aux formules (23). Elles établissent, comme l'a fait remarquer Weierstrass, le lien le plus étroit entre la théorie des fonctions imaginaires et celle des surfaces minima. En effet, à toute fonction $\mathcal{F}(u)$, ces formules font correspondre une surface minima réelle dont les différentes propriétés donneront la représentation géométrique la plus parfaite et la plus élégante de toutes les relations analytiques auxquelles la fonction donne naissance.

Cette surface minima est pleinement déterminée de forme et d'orientation; mais elle peut être déplacée parallèlement à elle-même, si l'on ajoute des constantes quelconques aux intégrales qui figurent dans les formules (23). On peut donc dire qu'à une

fonction $\mathcal{F}(u)$ de l'argument imaginaire correspond une seule surface minima, mais la proposition réciproque n'est pas vraie en général. Il suffit, pour le reconnaître, de remarquer que les formules (21) et (22) du n° 190 nous conduisent à deux systèmes différents de valeurs pour u et u_1, et, par conséquent, à deux expressions, différentes en général, pour la fonction $\mathcal{F}(u)$.

On arrive au même résultat par le raisonnement suivant. Reprenons les formules (17) et cherchons si l'on peut leur substituer d'autres formules semblables, où u et u_1 soient remplacées par v et v_1 et $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ par d'autres fonctions $\mathcal{G}(v)$, $\mathcal{G}_1(v_1)$. Les paramètres u et u_1 étant, comme v et v_1, ceux des lignes de longueur nulle de la surface, il faudra que v soit fonction de u et que v_1 soit fonction de u_1, ou bien que v soit fonction de u_1 et que v_1 soit fonction de u. La première hypothèse nous donnerait évidemment

$$v = u, \qquad v_1 = u_1, \qquad \mathcal{G}(v) = \mathcal{F}(u), \qquad \mathcal{G}_1(v_1) = \mathcal{F}_1(u_1).$$

La seconde se traduira par les équations

$$\begin{aligned}
(1-u^2)\mathcal{F}(u)\,du &= (1-v_1^2)\mathcal{G}_1(v_1)\,dv_1,\\
(1-u_1^2)\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1 &= (1-v^2)\mathcal{G}(v)\,dv,\\
(1+u^2)\mathcal{F}(u)\,du &= -(1+v_1^2)\mathcal{G}_1(v_1)\,dv_1,\\
(1+u_1^2)\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1 &= -(1+v^2)\mathcal{G}(v)\,dv,\\
u\mathcal{F}(u)\,du &= v_1\mathcal{G}(v_1)\,dv_1,\\
u_1\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1 &= v\mathcal{G}(v)\,dv,
\end{aligned}$$

qui donnent

$$v_1 = -\frac{1}{u}, \qquad v = -\frac{1}{u_1},$$

$$\mathcal{G}_1(v_1) = -\frac{1}{v_1^4}\mathcal{F}\left(-\frac{1}{v_1}\right), \qquad \mathcal{G}(v) = -\frac{1}{v^4}\mathcal{F}_1\left(-\frac{1}{v}\right).$$

Si l'on se borne aux surfaces réelles, on voit qu'à une même surface minima on peut faire correspondre les deux fonctions

$$\mathcal{F}(u) \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{u^4}\mathcal{F}_1\left(-\frac{1}{u}\right),$$

qui sont différentes en général. Nous aurons à revenir sur ce point très important, pour l'étudier d'une manière détaillée.

CHAPITRE III.

LES SURFACES MINIMA EN COORDONNÉES TANGENTIELLES.

Formules relatives au plan tangent et à la normale. — Nouvelle méthode d'intégration de l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima; on emploie le système de coordonnées tangentielles étudié au n° 165. — Équation finie qui représente la surface minima la plus générale quand on adopte un système quelconque de coordonnées tangentielles. Quand la surface minima est donnée *a priori*, on indique comment on obtiendra les expressions des fonctions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$, $f(u)$, $f_1(u_1)$ qui caractérisent cette surface. — Application à l'hélicoïde gauche à plan directeur.

Détermination des lignes de courbure et des lignes asymptotiques des surfaces minima. Théorème de Michael Roberts. Cette détermination se fait par des quadratures, qui sont les mêmes pour les deux séries de lignes. Les formules relatives aux coordonnées tangentielles permettent de résoudre une question importante et d'indiquer les transformations que subissent les fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$, $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ quand on déplace la surface ou, ce qui revient au même, lorsqu'on effectue un changement de coordonnées. — Application des résultats obtenus à la détermination de toutes les surfaces minima qui sont des hélicoïdes, des surfaces de révolution ou des surfaces spirales.

Détermination de toutes les surfaces minima qui peuvent, d'une infinité de plusieurs manières, et par conséquent ici, d'une infinité de manières, être considérées comme des surfaces de translation.

---

193. Après avoir indiqué les formules qui définissent les points de la surface minima, nous allons étudier celles qui concernent le plan tangent et la normale.

Soient c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale. Ils seront définis par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} c\dfrac{\partial x}{\partial u} + c'\dfrac{\partial y}{\partial u} + c''\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0, \\[2ex] c\dfrac{\partial x}{\partial u_1} + c'\dfrac{\partial y}{\partial u_1} + c''\dfrac{\partial z}{\partial u_1} = 0. \end{cases}$$

Si l'on remplace les dérivées de x, y, z par leurs valeurs tirées des formules (17) (n° 188), on trouvera, en attribuant un sens

déterminé à la normale,

$$(2)\qquad c = \frac{u+u_1}{1+uu_1}, \qquad c'' = i\frac{u_1-u}{1+uu_1}, \qquad c'' = \frac{uu_1-1}{1+uu_1}.$$

Si l'on écrit l'équation du plan tangent sous la forme

$$(3)\qquad (u+u_1)X + i(u_1-u)Y + (uu_1-1)Z + \xi = 0,$$

on aura

$$-\xi = (u+u_1)x + i(u_1-u)y + (uu_1-1)z.$$

En substituant à la place des x, y, z leurs valeurs déduites des mêmes formules (17), on aura

$$(4)\quad \xi = \int^{u}(\alpha-u)(1+\alpha u_1)\mathcal{F}(\alpha)\,d\alpha + \int^{u_1}(\alpha_1-u_1)(1+\alpha_1 u)\mathcal{F}_1(\alpha_1)\,d\alpha_1,$$

les intégrales relatives à α et à α_1 devant être prises suivant les mêmes chemins que celles qui se rapportent à u et à u_1. Si, pour ne pas avoir de quadrature, on emploie les formules (18) du Chapitre précédent, on trouvera

$$(5)\qquad \xi = 2u_1 f(u) + 2u f_1(u_1) - (1+uu_1)[f'(u) + f_1'(u_1)].$$

194. Les variables u, u_1, ξ constituent ce système particulier de coordonnées tangentielles que nous avons étudié au Chapitre VII du Livre précédent. Avant de continuer, nous montrerons que les formules établies (n° 165), relativement à ce système de coordonnées, permettent de déterminer toutes les surfaces minima par une méthode qui revient, au fond, à celle de Legendre.

Reprenons, en effet, ces équations en y remplaçant α par u, β par u_1. D'après la première des formules (33) (n° 165) qui fait connaître les rayons de courbure de la surface, nous reconnaissons immédiatement que l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima sera

$$(6)\qquad \xi - pu - qu_1 + (1+uu_1)s = 0,$$

p, q, s désignant, suivant l'usage, les dérivées de ξ. Cette équation aux dérivées partielles s'intègre par les procédés réguliers et, en particulier, par la méthode de Laplace; mais on peut encore opérer comme il suit :

Prenons la dérivée seconde du premier membre par rapport à u et à u_1; nous trouverons

$$(1 + uu_1)\frac{\partial^2 s}{\partial u\,\partial u_1} = 0;$$

s sera donc la somme d'une fonction de u et d'une fonction de u_1. D'ailleurs, en différentiant l'équation (6) par rapport à u ou par rapport à u_1, on obtient les deux équations

$$(7)\qquad \begin{cases} r = \left(\dfrac{1}{u} + u_1\right)\dfrac{\partial s}{\partial u}, \\ t = \left(\dfrac{1}{u_1} + u\right)\dfrac{\partial s}{\partial u_1}, \end{cases}$$

qui permettent de calculer r et t quand s est connue. On pourra donc trouver p et q par l'intégration de deux différentielles à deux variables.

Écrivons s sous la forme

$$(8)\qquad s = f'(u) - uf''(u) + f_1(u_1) - u_1 f_1''(u_1);$$

nous aurons, en vertu des équations (7),

$$(9)\qquad r = -(1 + uu_1)f'''(u), \quad t = -(1 + uu_1)f_1'''(u_1),$$

et, par conséquent,

$$(10)\qquad \begin{cases} p = \displaystyle\int (r\,du + s\,du_1) \\ \quad = 2f_1(u_1) - u_1 f_1'(u_1) + u_1 f'(u) - (1 + uu_1)f''(u), \\ q = \displaystyle\int (s\,du + t\,du_1) \\ \quad = 2f(u) - uf'(u) + uf_1'(u_1) - (1 + uu_1)f_1''(u_1). \end{cases}$$

Il est inutile d'ajouter aux valeurs de p et de q des constantes que l'on peut toujours supposer réunies à $f(u)$ et $f_1(u_1)$. Si l'on porte ces valeurs de p et q, jointes à celles de s, dans l'équation (6), on retrouve précisément la valeur de ξ donnée par la formule (5).

195. L'équation (5) doit être regardée comme l'équation de la surface, écrite dans un système particulier de coordonnées tangentielles; mais, si l'on prend l'équation du plan tangent sous sa

forme la plus générale,

$$UX + VY + WZ + P = 0,$$

on peut aussi obtenir la relation entre U, V, W, P qui caractérise les surfaces minima.

En identifiant l'équation précédente avec la suivante :

$$X(u + u_1) + iY(u_1 - u) + Z(uu_1 - 1) + \xi = 0,$$

on trouve, en effet,

$$\frac{U}{u + u_1} = \frac{V}{i(u_1 - u)} = \frac{W}{uu_1 - 1} = \frac{P}{\xi} = \frac{\pm\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}{uu_1 + 1}$$

et, par conséquent,

$$u = \frac{U + iV}{H + W}, \qquad u_1 = \frac{U - iV}{H - W}, \qquad \xi = \frac{2P}{H - W},$$

H désignant le radical

$$H = \pm\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (5), nous trouverons

$$\begin{aligned} P = \quad & (U - iV) f\left(\frac{U + iV}{H - W}\right) \\ & + (U - iV) f_1\left(\frac{U - iV}{H - W}\right) - H\left[f'\left(\frac{U + iV}{H - W}\right) + f_1'\left(\frac{U - iV}{H - W}\right)\right]. \end{aligned}$$

Si l'on suppose la surface réelle, les fonctions f et f_1 seront imaginaires conjuguées. Posons

$$f\left(\frac{U + iV}{H - W}\right) = F_1 + iF_2,$$

F_1 et F_2 étant la partie réelle et la partie imaginaire de f. On obtiendra, par un calcul facile, l'équation

$$(11) \qquad P = -2H^3 \frac{\partial}{\partial W}\left[\frac{UF_1 + VF_2}{H(W + H)}\right],$$

d'où les imaginaires ont complètement disparu.

On peut aussi employer la forme

$$(12) \qquad P = 2UF_1 + 2VF_2 - 2(U^2 + V^2 + W^2)\left(\frac{\partial F_1}{\partial U} + \frac{\partial F_2}{\partial V}\right),$$

qui a été donnée par Weierstrass (article cité, n° 183).

Supposons, par exemple,

$$f(u) = u^3:$$

on aura

$$F_1 = \frac{U^3 - 3UV^2}{(H - W)^3}, \qquad F_2 = \frac{-V^3 + 3VU^2}{(H - W)^3};$$

$$P = -2H^3 \frac{\partial}{\partial W}\left[\frac{U^2 - V^2}{H(H - W)^2}\right] = \frac{2W - 4H}{(H - W)^2}(U^2 - V^2).$$

Pour $f(u) = u^m$, on aurait

$$P = \frac{(1 - m)H + W}{(H - W)^{m-1}}[(U + Vi)^{m-1} + (U - Vi)^{m-1}].$$

196. Nous présenterons encore une remarque sur l'équation en coordonnées tangentielles des surfaces minima. Écrivons-la avec les variables u, u_1, ξ; les formules (9) nous permettront sans difficulté d'obtenir les fonctions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ relatives à la surface. On aura

$$(13) \qquad \begin{cases} \mathcal{F}(u) = f'''(u) = \dfrac{-r}{1 + uu_1}, \\ \mathcal{F}_1(u_1) = f_1'''(u_1) = \dfrac{-t}{1 + uu_1}; \end{cases}$$

il suffira donc de calculer les dérivées secondes r et t et d'éliminer ξ au moyen de l'équation de la surface pour obtenir les équations qui donnent les deux fonctions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$.

Considérons, par exemple, l'hélicoïde

$$z = k \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x},$$

dont l'équation en coordonnées tangentielles est

$$\frac{P}{W} = k \operatorname{arc\,tang} \frac{U}{V};$$

si l'on remplace U, V, W, P par leurs expressions en fonction des variables u, u_1, ξ, elle deviendra

$$\xi = k(uu_1 - 1) \operatorname{arc\,tang} i \frac{u + u_1}{u - u_1} = k \frac{uu_1 - 1}{2} i \mathrm{L}\left(\frac{u_1}{u}\right).$$

On aura ici

$$r = \frac{ik(1 + uu_1)}{2u^2}, \qquad t = \frac{-ik(1 + uu_1)}{2u_1^2}$$

et, par conséquent,

$$\mathcal{F}(u) = \frac{-ik}{2u^2}, \qquad \mathcal{F}_1(u_1) = \frac{ik}{2u_1^2}.$$

La détermination des fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$ correspondant à une surface minima donnée peut aussi être obtenue, mais d'une manière moins complète, puisque nous avons vu au n° 191 qu'à une même surface minima correspondent une infinité de systèmes de valeurs des fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$.

La combinaison des formules (5) et (10) nous donne la relation nouvelle

$$\begin{aligned} q(1+uu_1) - \xi u = {} & 2f(u) - 2u^2 f_1(u_1) \\ & + 2u(1+uu_1)f_1'(u_1) - (1+uu_1)^2 f_1''(u_1). \end{aligned}$$

Si l'on donne à u_1 une valeur constante quelconque a_1, le second membre devient égal à $2f(u)$ augmenté d'un polynome du second degré en u. On aura donc

$$f(u) = \left[\frac{q(1+uu_1) - \xi u}{2}\right]_{u_1=a_1} + \mathrm{P}(u).$$

P désignant un polynome de second degré en u.

De même, on pourra prendre

$$f_1(u_1) = \left[\frac{p(1+uu_1) - \xi u_1}{2}\right]_{u=a} + \mathrm{P}_1(u_1).$$

Écrivons P et P_1 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(u) &= \mathrm{A}(1-u^2) + \mathrm{B}i(1+u^2) + 2\mathrm{C}u, \\ \mathrm{P}_1(u_1) &= \mathrm{A}_1(1-u_1^2) - \mathrm{B}_1 i(1+u_1^2) + 2\mathrm{C}_1 u_1. \end{aligned}$$

En substituant les expressions de $f(u)$ et de $f_1(u_1)$ dans l'expression de ξ donnée par la formule (5), on trouvera un résultat de la forme

$$\begin{aligned} \theta(u, u_1, a, a_1) = {} & 2(\mathrm{A}+\mathrm{A}_1)(u+u_1) \\ & + 2(\mathrm{B}+\mathrm{B}_1)i(u_1-u) + 2(\mathrm{C}+\mathrm{C}_1)\ (uu_1=1), \end{aligned}$$

où le premier membre sera complètement connu. Cette identité permet évidemment de déterminer, autant qu'elles peuvent l'être (n° 191), les constantes A, A_1, ... et par suite les fnctions $f(u)$, $f_1(u_1)$. S'il s'agit d'une surface réelle, on pourra supposer a et a_1

imaginaires conjugués, et prendre

$$A_1 = A, \qquad B_1 = B, \qquad C_1 = C;$$

les valeurs de A, B, C seront alors réelles.

En appliquant cette méthode à l'hélicoïde, on obtiendra les expressions suivantes :

$$f(u) = k\frac{ui}{2}\,\mathrm{L}u, \qquad f_1(u_1) = -k\frac{u_1 i}{2}\,\mathrm{L}u_1,$$

pour l'un des systèmes de valeurs de $f(u)$ et de $f_1(u_1)$.

197. L'équation en coordonnées tangentielles obtenue pour les surfaces minima conduit à la détermination la plus simple des lignes de courbure et des lignes asymptotiques de ces surfaces.

Lorsqu'on emploie les variables u, u_1, ξ, l'équation différentielle des lignes de courbure prend la forme (n° 165)

$$r\,du^2 - t\,du_1^2 = 0.$$

Remplaçons r, t par leurs valeurs (9) et nous aurons

$$\mathcal{F}(u)\,du^2 - \mathcal{F}_1(u_1)\,du_1^2 = 0.$$

Les lignes de courbure s'obtiennent donc par des quadratures et ont pour équation

$$(14) \qquad \int\sqrt{\mathcal{F}(u)}\,du \pm \int\sqrt{\mathcal{F}_1(u_1)}\,du_1 = \text{const.}$$

Si l'on écrit

$$\mathcal{F}(u)\frac{du_1}{du} = \sqrt{\mathcal{F}(u)\,\mathcal{F}_1(u_1)},$$

cette équation déterminera le signe qu'il faut attribuer au radical pour chacune des lignes de courbure, et les formules (33) (n° 165) nous donneront les coordonnées X, Y, Z du centre de courbure et le rayon principal R correspondant à la ligne de courbure considérée. On a ainsi :

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} 2R &= (1 + uu_1)^2\sqrt{\mathcal{F}(u)\,\mathcal{F}_1(u_1)},\\ Z &= z + \frac{u^2u_1^2 - 1}{2}\sqrt{\mathcal{F}(u)\,\mathcal{F}_1(u_1)},\\ X - iY &= x - iy + u_1(1 + uu_1)\sqrt{\mathcal{F}(u)\,\mathcal{F}_1(u_1)},\\ X + iY &= x + iy + u(1 + uu_1)\sqrt{\mathcal{F}(u)\,\mathcal{F}_1(u_1)}, \end{aligned}\right.$$

x, y, z, étant les coordonnées rectangulaires du point de la surface.

L'équation différentielle des lignes asymptotiques s'obtient également sans difficulté, soit avec les coordonnées ponctuelles, soit avec les coordonnées tangentielles. Si l'on emploie, par exemple, l'équation (35) que nous avons donnée (n° 165) relativement au système (u, u_1, ξ)

$$(1 + uu_1)(r\,du^2 + 2s\,du\,du_1 + t\,du_1^2) + 2\,du\,du_1(\xi - pu - qu_1) = 0,$$

le coefficient de $du\,du_1$ sera nul en vertu de l'équation aux dérivées partielles de la surface, et il restera

$$\mathcal{F}(u)\,du^2 + \mathcal{F}_1(u_1)\,du_1^2 = 0.$$

On voit que les lignes asymptotiques se déterminent encore par des quadratures [1]. On a, pour leur équation en termes finis,

$$(16) \qquad \int \sqrt{\mathcal{F}(u)}\,du \pm i \int \sqrt{\mathcal{F}_1(u_1)}\,du_1 = \text{const.},$$

et les quadratures sont celles qui figurent déjà dans l'équation des lignes de courbure.

Pour obtenir des surfaces minima algébriques dont les lignes de courbure et les lignes asymptotiques soient algébriques, il suffira donc de connaître deux fonctions algébriques $f(u)$, $f_1(u_1)$, telles que les quadratures suivantes :

$$\int \sqrt{f'''(u)}\,du, \qquad \int \sqrt{f_1'''(u_1)}\,du_1$$

soient aussi algébriques.

Lorsque la surface est réelle, les équations des lignes de courbure peuvent s'écrire

$$\mathcal{R}\int \sqrt{\mathcal{F}(u)}\,du = \text{const.}, \qquad \mathcal{R}i\int \sqrt{\mathcal{F}(u)}\,du = \text{const.},$$

---

[1] La détermination des lignes de courbure et des lignes asymptotiques est due à Michael Roberts qui l'a donnée dans un Mémoire *Sur la surface dont les rayons de courbure sont égaux, mais dirigés en sens opposé*, inséré en 1846 au *Journal de Liouville*, t. XI, 1re série, p. 300. Ce beau travail contient aussi des recherches sur l'aire de la surface ainsi que sur la surface minima réglée la plus générale.

et celles des lignes asymptotiques

$$\mathcal{R}\int\sqrt{i\mathcal{F}(u)}\,du = \text{const.}, \qquad \mathcal{R}\int\sqrt{-i\mathcal{F}(u)}\,du = \text{const.}$$

198. Les formules relatives aux coordonnées tangentielles permettent de résoudre simplement une question essentielle et de reconnaître comment se transforment les fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$, $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ quand on effectue un changement de coordonnées ou, ce qui est la même chose, quand on déplace la surface en conservant les axes.

Supposons d'abord que l'on soumette la surface à une translation dont les composantes soient λ, μ, ν. L'équation du plan tangent

$$(u+u_1)X + i(u_1-u)Y + (uu_1-1)Z + \xi = 0$$

deviendra

$$(u+u_1)X + i(u_1-u)Y + (uu_1-1)Z + \xi' = 0,$$

ξ' ayant pour valeur (n° 167)

$$\xi' = \xi - \lambda(u+u_1) - i\mu(u_1-u) - \nu(uu_1-1).$$

On obtiendra cette nouvelle valeur de ξ' en substituant aux fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$ les suivantes :

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(u) &= f(u) - \frac{\lambda}{4}(1-u^2) - \frac{i\mu}{4}(1+u^2) - \frac{\nu u}{2}, \\ \varphi_1(u_1) &= f_1(u_1) - \frac{\lambda}{4}(1-u_1^2) + \frac{i\mu}{4}(1+u_1^2) - \frac{\nu u_1}{2}, \end{aligned}\right.$$

qui sont imaginaires conjuguées si $f(u)$, $f_1(u_1)$ le sont aussi. Les valeurs des fonctions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ ne seront pas changées, comme cela était évident *a priori*.

Imaginons maintenant que l'on imprime à la surface une rotation quelconque autour de l'origine des coordonnées. Un point quelconque M de la surface viendra occuper une certaine position M'. Soit

$$(v+v_1)X + i(v_1-v)Y + (vv_1-1)Z + \xi' = 0$$

l'équation du plan tangent en M'. On aura (n° 167)

$$(18)\qquad u = \frac{mv + n}{m_0 - n_0 v}, \qquad u_1 = \frac{m_0 v_1 + n_0}{m - n v_1},$$

$$(19)\qquad \xi = \xi' \frac{m m_0 + n n_0}{(m - n v_1)(m_0 - n_0 v)}.$$

Si l'on désigne par $g(v)$, $g_1(v_1)$ les fonctions analogues à $f(u)$, $f_1(u_1)$ et relatives à la surface déplacée, ξ' aura pour expression

$$\xi' = 2 v_1 g(v) + 2 v g_1(v_1) - (1 + v v_1)[g'(v) + g'_1(v_1)].$$

et l'on aura à déterminer $g(v)$, $g_1(v_1)$ par la condition

$$\left\{ 2 u_1 f(u) + 2 u f_1(u_1) - (1 + u u_1)[f'(u) + f_1(u_1)] \right\} \frac{(m - n v_1)(m_0 - n_0 v)}{m m_0 + n n_0}$$
$$= 2 v_1 g(v) + 2 v g_1(v_1) - (1 + v v_1)[g'(v) + g'_1(v_1)].$$

Pour déduire de cette équation les expressions des fonctions $g(v)$, $g_1(v_1)$, on pourrait appliquer la méthode générale du n° 196; mais, avec quelque attention, on aperçoit la solution suivante :

$$g(v) = \frac{f(u)}{\delta}(m_0 - n_0 v)^2,$$

$$g_1(v_1) = \frac{f_1(u_1)}{\delta}(m - n v_1)^2,$$

où δ désigne le déterminant de la substitution

$$\delta = m m_0 + n n_0,$$

et que l'on vérifiera aisément. Si l'on remplace u et u_1 par leurs expressions en v, v_1, on aura

$$(20)\qquad \left\{ \begin{aligned} g(v) &= \frac{(m_0 - n_0 v)^2}{\delta} f\left(\frac{m v + n}{m_0 - n_0 v}\right), \\ g_1(v_1) &= \frac{(m - n v_1)^2}{\delta} f_1\left(\frac{m_0 v_1 + n_0}{m - n v_1}\right). \end{aligned} \right.$$

199. La question que nous nous étions proposée est ainsi complètement résolue; car, pour obtenir les résultats relatifs au déplacement le plus général, il suffira de considérer ce déplacement comme résultant d'une translation quelconque et d'une rotation autour de l'origine des coordonnées, et d'appliquer successivement les formules (17) et (20). Il nous reste seulement

à examiner ce que deviennent les fonctions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ après le déplacement le plus général et, pour cela, il suffira de différentier trois fois par rapport à v ou à v_1 les équations précédentes (20). On obtient ainsi, en désignant par $\mathcal{G}(v)$, $\mathcal{G}_1(v_1)$ les dérivées $g'''(v)$, $g_1(v_1)$, les équations suivantes :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{G}(v) &= \frac{\delta^2}{(m_0 - n_0 v)^4}\mathcal{F}(u) = \frac{\delta^2}{(m_0 - n_0 v)^4}\mathcal{F}\left(\frac{mv + n}{m_0 - n_0 v}\right),\\ \mathcal{G}_1(v_1) &= \frac{\delta^2}{(m - nv_1)^4}\mathcal{F}_1(u_1) = \frac{\delta^2}{(m - nv_1)^4}\mathcal{F}_1\left(\frac{m_0 v_1 + n_0}{m - nv_1}\right),\end{aligned}\right.$$

qui font connaître de la manière la plus simple la forme nouvelle des fonctions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$. Il est aisé d'en déduire quelques relations qui serviront de vérification à nos calculs.

Si l'on tient compte de l'identité

$$1 + uu_1 = \frac{\delta(1 + vv_1)}{(m_0 - n_0 v)(m - nv_1)},$$

on déduira des formules précédentes la relation

$$(1 + vv_1)^4 \mathcal{G}(v)\mathcal{G}(v_1) = (1 + uu_1)^4 \mathcal{F}(u)\mathcal{F}_1(u_1),$$

que nous aurions pu écrire *a priori*, puisque chacun des deux membres doit représenter quatre fois le carré du rayon de courbure principal.

D'autre part, on a

$$\frac{du}{dv} = \frac{\delta}{(m_0 - n_0 v)^2}, \qquad \frac{du_1}{dv_1} = \frac{\delta}{(m - nv_1)^2};$$

par conséquent, les formules (21) conduisent aux relations suivantes :

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{F}(u)\,du^2 &= \mathcal{G}(v)\,dv^2,\\ \mathcal{F}_1(u_1)\,du_1^2 &= \mathcal{G}_1(v_1)\,dv_1^2,\end{aligned}\right.$$

et l'on reconnaît ainsi que les équations différentielles (14) et (16) des lignes de courbure et des lignes asymptotiques ne subissent aucun changement de forme lorsqu'on effectue la transformation.

200. Nous allons donner une application des résultats précédents en cherchant toutes les surfaces minima qui sont en même temps des hélicoïdes ou des surfaces de révolution. Il suffira évi-

demment d'exprimer qu'il existe un déplacement hélicoïdal continu dans lequel la surface cherchée ne cesse pas de coïncider avec elle-même. Prenons pour axe des z l'axe de ce déplacement qui est aussi celui de l'hélicoïde. Si l'on fait tourner la surface d'un angle fini θ autour de cet axe, les formules (18) prendront ici la forme très simple

$$u = v e^{-i\theta}, \qquad u_1 = v_1 e^{i\theta},$$

qui convient à ce déplacement et l'on aura

$$m = e^{-i\frac{\theta}{2}}, \qquad n = 0, \qquad m_0 = e^{i\frac{\theta}{2}}, \qquad n_0 = 0.$$

En substituant ces valeurs des constantes dans les formules (21), on trouvera

$$(23) \qquad \mathcal{G}(v) = \mathcal{F}(v e^{-i\theta}) e^{-2i\theta}, \qquad \mathcal{G}_1(v_1) = \mathcal{F}_1(v_1 e^{i\theta}) e^{2i\theta},$$

et ces expressions de $\mathcal{G}(v)$, $\mathcal{G}_1(v_1)$ ne seront pas changées si l'on imprime à la surface dans sa nouvelle position la translation parallèle à l'axe des z qui l'amène à coïncider avec sa position primitive. On devra donc avoir

$$\mathcal{G}(v) = \mathcal{F}(v), \qquad \mathcal{G}_1(v_1) = \mathcal{F}_1(v_1);$$

par suite, $\mathcal{F}(v)$, $\mathcal{F}_1(v_1)$ devront satisfaire respectivement aux équations fonctionnelles

$$\mathcal{F}(v) = \mathcal{F}(v e^{-i\theta}) e^{-2i\theta}, \qquad \mathcal{F}_1(v_1) = \mathcal{F}_1(v_1 e^{i\theta}) e^{2i\theta},$$

et cela pour toutes les valeurs de θ.

Ces équations expriment que les produits $v^2 \mathcal{F}(v)$, $v_1^2 \mathcal{F}_1(v_1)$ demeurent invariables quand on y remplace v, v_1 respectivement par $v e^{-i\theta}$, $v_1 e^{i\theta}$ et sont, par conséquent, constants. On pourra donc poser

$$(24) \qquad \mathcal{F}(u) = \frac{a e^{i\alpha}}{u^2}, \qquad \mathcal{F}_1(u_1) = \frac{a e^{-i\alpha}}{u_1^2},$$

a et α désignant deux constantes qui seront réelles si la surface est réelle.

Les hélicoïdes qui correspondent à ces valeurs de $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ sont ceux qui ont été obtenus par Scherk et dont nous avons donné l'équation au n° 180. Nous les retrouverons plus loin. La

surface minima de révolution, qui est la caténoïde déjà étudiée au n° 66, correspond à la valeur o de α; l'hélicoïde gauche à plan directeur correspond (n° 196) à la valeur $\frac{\pi}{2}$ de la même constante.

201. Cherchons encore toutes les surfaces minima qui rentrent dans la classe des *surfaces spirales* signalées au n° 89 et découvertes par Maurice Lévy. Ces surfaces, nous l'avons vu, jouissent de la propriété de reprendre leur position initiale si on les fait tourner d'un angle quelconque θ autour de leur axe et si on les soumet ensuite à une transformation homothétique dont le pôle est sur cet axe et pour laquelle le rapport de similitude est $e^{a\theta}$, a désignant une constante. Si l'on a pris pour axe des z l'axe de la surface, il faudra donc que la fonction $\mathcal{G}(v)$ relative à la position nouvelle que prend cette surface, après la rotation d'angle θ, soit égale à

$$\mathcal{F}(v)e^{a\theta}.$$

En appliquant ici les formules (23), on aura l'équation fonctionnelle

$$e^{a\theta}\mathcal{F}(v) = \mathcal{F}(ve^{-i\theta})e^{-2i\theta}.$$

Posons

$$\mathcal{F}(v) = \frac{\lambda(v)}{v^m},$$

on devra avoir

$$\lambda(v)e^{a\theta} = \lambda(ve^{-i\theta})e^{-2i\theta}e^{mi\theta}$$

Si donc on prend

$$m = 2 - ai,$$

il viendra

$$\lambda(v) = \lambda(ve^{-i\theta}),$$

et, par conséquent, $\lambda(v)$ sera une constante.

On a donc

$$\mathcal{F}(v) = (A + Bi)v^{-2ai}; \tag{25}$$

on trouvera de même

$$\mathcal{F}_1(v_1) = (A - Bi)v_1^{-2-ai}. \tag{26}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'à ces expressions des fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ correspond une surface qui jouit effectivement des propriétés que nous avons recherchées. Si l'on suppose $a = 0$,

on retrouve, comme il fallait s'y attendre, les hélicoïdes du numéro précédent.

202. Nous terminerons ce Chapitre en recherchant avec S. Lie les surfaces minima qui peuvent, de plus d'une manière, être considérées comme des surfaces de translation [1].

Puisque les surfaces minima sont déjà des surfaces de translation engendrées par des courbes dont les tangentes rencontrent le cercle de l'infini, nous nous trouvons dans le cas, envisagé plus haut aux n°s 99 et 100, où le cône du quatrième ordre qui joue un rôle fondamental dans cette théorie se décompose en deux cônes du second degré. Ici l'un de ces cônes est le cône isotrope. Pour ne pas étendre outre mesure cette application, nous nous bornerons à étudier le cas général, celui où les deux cônes du second degré ont quatre génératrices distinctes. Nous savons qu'alors la surface minima cherchée sera la transformée homographique de la surface dont l'équation, donnée au n° 100, est

$$e^{x'} + e^{y'} + e^{z'} = 1. \tag{27}$$

Nous avons vu que x', y', z' peuvent être exprimées en fonction de deux variables par les formules

$$e^{x'} = \frac{(a-u)(a-v)}{(a-b)(a-c)}, \quad e^{y'} = \frac{(b-u)(b-v)}{(b-a)(b-c)}, \quad e^{z'} = \frac{(c-u)(c-v)}{(c-a)(c-b)}, \tag{28}$$

où a, b, c désignent des constantes quelconques; en sorte que la surface peut être engendrée par la translation de *toutes* les courbes définies par les équations

$$x' = \operatorname{Log}(a-u), \qquad y' = \operatorname{Log}(b-u), \qquad z' = \operatorname{Log}(c-u). \tag{29}$$

Les parallèles aux tangentes de ces courbes menées par l'origine engendrent, pour chaque système de valeurs de a, b, c, le cône ayant pour équation

$$(b-c)y'z' + (c-a\,z'x' + (a-b)\,x'y' = 0. \tag{30}$$

---

[1] On pourra consulter à ce sujet, en même temps que l'Ouvrage déjà cité plus haut : *Geometrie der Berührungstransformationen*, différents Mémoires de Lie et, en particulier, celui qui est intitulé : *Weitere Untersuchungen über Minimalflächen*.

Lorsque a, b, c varient, tous ces cônes forment un faisceau, et trois d'entre eux se réduisent à un système de deux plans.

Pour $a = b$, par exemple, on a le système de deux plans

$$z'(y' - x') = 0.$$

Dans ce cas, les formules générales (28) doivent être remplacées par les suivantes :

$$(31)\quad z' = \operatorname{Log} u, \quad x' = \operatorname{Log}(1 - u) + \operatorname{Log} v, \quad y' = \operatorname{Log}(1 - u) + \operatorname{Log}(1 - v),$$

et l'on obtient en donnant, soit à u, soit à v, des valeurs constantes, les deux courbes *planes* associées dont la translation peut engendrer la surface. En permutant x', y', z', on obtient deux autres systèmes qui ne diffèrent du précédent que par les notations.

Pour obtenir maintenant la surface minima cherchée, il n'y aura qu'à faire une transformation homographique conservant le plan de l'infini et faisant apparaître le cône isotrope parmi ceux qui sont définis par l'équation (30). Puisque le faisceau comprendra le cône isotrope, tous les cônes qui le composent auront les mêmes axes de symétrie. Et, si l'on prend pour axes coordonnés ces axes de symétrie, l'équation obtenue ne devra contenir que les carrés des nouvelles coordonnées. On verra facilement que cette condition ne sera réalisée que si les équations qui définissent la transformation homographique cherchée ont la forme suivante :

$$(32)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{y}{B} + \dfrac{z}{C} + \alpha, \\[2mm] y' = \dfrac{z}{C} + \dfrac{x}{A} + \beta, \\[2mm] z' = \dfrac{x}{A} + \dfrac{y}{B} + \gamma, \end{cases}$$

A, B, C, α, β, γ désignant six constantes. Alors l'équation (30) du faisceau des cônes prendra la forme

$$(33)\quad \frac{(b - c)}{A^2} x^2 + \frac{c - a}{B^2} y^2 + \frac{a - b}{C^2} z^2 = 0.$$

Et, pour que le cône isotrope soit compris dans le faisceau, il faudra que l'on puisse déterminer les constantes a, b, c de manière à obtenir

$$(34)\quad \frac{b - c}{A^2} = \frac{c - a}{B^2} = \frac{a - b}{C^2},$$

ce qui ne pourra avoir lieu que si les constantes A, B, C vérifient la condition

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0. \tag{35}$$

Si l'on ne fait pas la distinction entre les surfaces réelles et les surfaces imaginaires, la question peut être considérée comme résolue, et il n'y a qu'à porter dans l'équation (17) les valeurs de x', y', z' définies par les équations (32). Mais si, comme il est naturel, on recherche les surfaces minima réelles, il y aura lieu d'ajouter les remarques suivantes :

Pour toute surface réelle, les valeurs de A, B, C doivent être ou réelles, ou purement imaginaires. S'il en était autrement, si $\frac{1}{C}$, par exemple, était de la forme $h + ki$, comme on peut tirer de l'équation de la surface l'expression de $e^{\frac{z}{C}}$, en fonction de $e^{\frac{x}{A}}$, $e^{\frac{y}{B}}$, on en déduirait, en changeant i en $-i$, à la fois la valeur de e^{hz} et celle de e^{zki}, ce qui est évidemment inadmissible. Il faut donc que A^2, B^2, C^2 soient réelles, et comme elles sont liées par la relation (35), que deux d'entre elles soient de même signe, la troisième étant de signe contraire. On verra aisément que la seule hypothèse conduisant à une surface réelle est celle pour laquelle les deux quantités de même signe sont négatives. On peut toujours supposer que ces quantités soient A^2 et B^2; C^2 sera positif.

Alors, si l'on écrit l'équation de la surface

$$e^{\frac{y}{B}+\frac{z}{C}+\alpha} + e^{\frac{x}{A}+\frac{z}{C}+\beta} + e^{\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\gamma} = 1, \tag{36}$$

et si l'on y change i en $-i$, elle deviendra

$$e^{-\frac{y}{B}+\frac{z}{C}+\alpha_0} + e^{-\frac{x}{A}+\frac{z}{C}+\beta_0} + e^{-\frac{x}{A}-\frac{y}{B}+\gamma_0} = 1,$$

α_0, β_0, γ_0 étant les conjuguées de α, β, γ. Éliminons $e^{\frac{z}{C}}$ entre les deux équations précédentes, nous serons conduit à la relation

$$\frac{e^{\alpha+\frac{y}{B}} + e^{\beta+\frac{x}{A}}}{e^{\alpha_0+\frac{x}{A}} + e^{\beta_0+\frac{y}{B}}} = \frac{1 - e^{\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\gamma}}{e^{\frac{x}{A}+\frac{y}{B}} - e^{\gamma_0}}.$$

Pour que cette équation ait lieu identiquement, il faut que

l'on ait

$$e^{\alpha-\beta_0} = e^{\beta-\alpha_0} = -e^{\gamma} = -e^{-\gamma_0},$$

d'où l'on déduit que l'on peut prendre

$$\alpha = \frac{y_0}{B} + \frac{z_0}{C}, \qquad \beta = \frac{x_0}{A} + \frac{z_0}{C}, \qquad \gamma = i\pi + \frac{x_0}{A} + \frac{y_0}{B},$$

x_0, y_0, z_0 étant des constantes réelles, qu'on pourra faire disparaître par une simple translation réelle des axes.

On est donc conduit à l'équation

$$e^{\frac{z}{C}}\left(e^{\frac{x}{A}} + e^{\frac{y}{B}}\right) = 1 + e^{\frac{x}{A}+\frac{y}{B}},$$

à laquelle on peut donner la forme

$$(37) \qquad \frac{e^{\frac{z}{C}}+1}{e^{\frac{z}{C}}-1} = \frac{1+e^{\frac{x}{A}}}{1-e^{\frac{x}{A}}} \times \frac{1+e^{\frac{y}{B}}}{1-e^{\frac{y}{B}}}.$$

Si maintenant, pour tenir compte de la relation (35), on pose

$$(38) \qquad \frac{1}{C} = -\frac{2}{h}, \qquad A = \frac{hi}{2}\cos\sigma, \qquad B = \frac{hi}{2}\sin\sigma,$$

l'équation de la surface prendra la forme élégante

$$(39) \qquad \frac{e^{\frac{z}{h}} - e^{-\frac{z}{h}}}{e^{\frac{z}{h}} + e^{-\frac{z}{h}}} = \operatorname{tang}\frac{x}{h\cos\sigma}\operatorname{tang}\frac{y}{h\sin\sigma}.$$

C'est une de celles qui ont été découvertes par Scherk.

Les courbes gauches dont la translation engendre la surface seront définies par les équations

$$(40) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{2x}{A} &= \operatorname{Log}\frac{(b-u)(c-u)}{a-u}, \\ \frac{2y}{B} &= \operatorname{Log}\frac{(a-u)(c-u)}{b-u}, \\ \frac{2z}{C} &= \operatorname{Log}\frac{(a-u)(b-u)}{c-u}. \end{aligned}\right.$$

Elles deviendront *minima* si l'on a

$$(41) \qquad c = a\cos^2\sigma + b\sin^2\sigma.$$

Nous n'insisterons pas sur cette application particulière et nous nous bornerons, en terminant, à remarquer que les représentations sphériques des lignes asymptotiques de la surface sont des coniques homofocales. On peut aisément rattacher cette propriété, signalée par Lie, à des considérations de pure Géométrie.

CHAPITRE IV.

REPRÉSENTATIONS CONFORMES DES SURFACES MINIMA.

Élément linéaire de la surface minima et de sa représentation sphérique. — La représentation sphérique réalise un tracé géographique de la surface minima sur la sphère. — Cette propriété est caractéristique, et, si l'on fait abstraction de la sphère, pour laquelle elle est évidente, elle appartient aux seules surfaces minima. — En laissant de côté encore la sphère, les surfaces minima sont les seules pour lesquelles un système orthogonal, tracé sur la surface et différent de celui qui est formé par les lignes de courbure, ait pour représentation sphérique un système orthogonal. — Problème de Minding; extension à une surface quelconque de la définition des méridiens et des parallèles. Les méridiens sont les courbes pour lesquelles la normale est parallèle à un plan vertical; les parallèles sont les courbes pour lesquelles la normale fait un angle constant avec la verticale. — Recherche des surfaces pour lesquelles les méridiens et les parallèles forment un système orthogonal. Ce sont, ou bien des surfaces moulures, ou bien des surfaces minima.

Représentations conformes obtenues par Riemann de la surface minima sur le plan. Elles font correspondre aux lignes de courbure de la surface deux systèmes de droites rectangulaires dans le plan. — Dans le tracé géographique sur la sphère, les lignes de courbure qui forment sur la surface un système isotherme admettent nécessairement pour représentation sphérique un système isotherme. — Théorème de Bour. — Recherche des surfaces minima à lignes de courbure planes. — Si l'une des familles est composée de courbes planes, il en est de même de l'autre. — Surface transcendante d'Ossian Bonnet. — Surface algébrique d'Enneper. Sa construction et ses propriétés principales.

Autres représentations conformes sur le plan indiquées par Riemann et dans lesquelles une famille de sections de la surface par des plans parallèles est représentée par une famille de droites parallèles.

---

203. Les résultats obtenus dans les Chapitres précédents conduisent à un grand nombre de conséquences. Nous allons développer d'abord celles qui concernent les différentes représentations conformes de la surface.

Les formules (17) (n° 188) nous donnent d'abord pour l'élément linéaire de la surface l'expression suivante :

$$(1) \qquad ds^2 = (1 + uu_1)^2 \mathcal{F}(u)\, \mathcal{F}_1(u_1)\, du\, du_1,$$

à laquelle nous joindrons celle qui détermine l'élément linéaire de la représentation sphérique

$$(2) \qquad d\sigma^2 = dc^2 + dc'^2 + dc''^2 = \frac{4\,du\,du_1}{(1+uu_1)^2}.$$

La comparaison de ces formules met en évidence une proposition du plus haut intérêt, due à O. Bonnet. *La représentation sphérique de la surface minima réalise une représentation conforme, un tracé géographique de la surface sur la sphère.*

Il est aisé de démontrer que cette propriété caractérise les surfaces minima : *Toute surface autre que la sphère, pour laquelle l'angle de deux courbes est égal à celui de leurs représentations sphériques, est nécessairement une surface minima.* Cela résulte immédiatement de la proposition énoncée au n° 142. Nous avons vu que, si l'on considère une courbe passant en un point M de la surface et y admettant une tangente MT, elle a pour représentation sphérique une courbe qui passe au point m, image de M, en y admettant pour tangente une droite perpendiculaire à la tangente conjuguée de MT. Il suit de là que, si deux courbes issues du point M y admettent les deux tangentes MT, MT′, l'angle de leurs représentations sphériques en m sera égal à celui des tangentes MU, MU′ conjuguées de MT, MT′. L'indicatrice de la surface cherchée doit donc être une courbe telle que l'angle de deux quelconques de ses diamètres soit égal à celui des diamètres conjugués. Cette propriété n'appartient qu'au cercle et à l'hyperbole équilatère; la surface cherchée ne peut donc être qu'une sphère ou une surface minima.

Plus généralement, s'il existe sur une surface un système orthogonal admettant pour représentation sphérique un système orthogonal et ne se confondant pas avec celui qui est formé par les lignes de courbure, on arrivera à la même conclusion. Car l'hyperbole équilatère est la seule conique pour laquelle deux diamètres rectangulaires ne se confondant pas avec les axes puissent admettre comme conjugués deux diamètres rectangulaires.

Imaginons, d'après cela, qu'étant donné un système orthogonal (S) quelconque tracé sur la sphère de rayon 1, on propose de trouver toutes les surfaces (Σ) telles que, si l'on effectue leur

représentation sphérique sur la sphère précédente, les courbes de la surface qui correspondent à celles du système sphérique orthogonal (S) forment un système (S′) également orthogonal. Le problème ainsi posé sera susceptible d'une double solution : ou bien le système (S′) sera formé des lignes de courbure de la surface et alors la question sera ramenée à la suivante sur laquelle nous avons déjà donné quelques indications (n° 162) : *Trouver les surfaces dont les lignes de courbure admettent pour image sphérique les courbes d'un système orthogonal donné;* ou bien le système (S) ne sera pas formé des lignes de courbure et, dans ce cas, la surface devra être une surface minima, qui sera, d'ailleurs, quelconque.

Les remarques précédentes expliquent certains résultats obtenus par Minding dans un travail [1] publié en 1852. Ce savant géomètre commence par généraliser et étendre à une surface quelconque la notion des méridiens et des parallèles. Les méridiens sont les courbes pour lesquelles la normale à la surface est parallèle à un plan vertical fixe; les parallèles sont les courbes pour lesquelles le plan tangent fait un angle constant avec le plan horizontal. En d'autres termes, dans la représentation sphérique de la surface, les méridiens et les parallèles de la surface, tels que nous venons de les définir, correspondent aux méridiens et aux parallèles de la sphère. Minding se propose de rechercher toutes les surfaces sur lesquelles les méridiens et les parallèles forment un système orthogonal, et il obtient deux classes bien distinctes de surfaces satisfaisant aux conditions posées. Les unes sont les surfaces moulures déjà étudiées par Monge, les autres sont les surfaces minima. Ces résultats sont une conséquence directe des remarques qui précèdent; et nous pouvons ajouter que, sur toute surface minima, le réseau formé par les méridiens et les parallèles sera toujours isotherme, car il correspond à un système isotherme de la sphère. C'est ce que les formules (2) (n° 193) nous permettent d'ailleurs de vérifier. Les parallèles seront définis par l'équation

$$c'' = \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad uu_1 = \text{const.},$$

---

(1) MINDING, *Ueber einige Grundformeln der Geodäsie* (*Journal de Crelle*, t. XLIV, 1852, p. 66).

et les méridiens par l'équation

$$\frac{c}{c'} = \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad \frac{u}{u_1} = \text{const.}$$

Si donc on fait

$$u = \rho e^{i\omega}, \qquad u_1 = \rho e^{-i\omega},$$

l'élément linéaire de la surface aura pour expression

$$ds^2 = (1 + \rho^2)\, \mathcal{F}(\rho e^{i\omega})\, \mathcal{F}_1(\rho e^{-i\omega})\, (d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2).$$

Les courbes $\rho = \text{const.}$ sont les parallèles; les courbes $\omega = \text{const.}$ sont les méridiens de la surface, et l'expression de l'élément linéaire montre bien que ces deux familles de courbes constituent un système isotherme.

En particulier, si l'on a

$$\mathcal{F}(u) = \mathrm{A}\, u^m, \qquad \mathcal{F}_1(u_1) = \mathrm{A}_1 u_1^m,$$

l'élément linéaire deviendra

$$ds^2 = \mathrm{AA}_1 (1 + \rho^2)\, \rho^{2m} [d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2];$$

la surface sera applicable sur une surface de révolution, les méridiens et les parallèles se correspondant respectivement sur les deux surfaces.

204. Nous allons maintenant faire connaître d'autres représentations conformes de la surface minima qui ont été indiquées par Riemann dans un Mémoire important sur lequel nous aurons à revenir [1].

Faisons correspondre au point (u, u_1) de la surface le point d'un plan dont les coordonnées rectangulaires x_1 y_1 sont déterminées par les formules

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 + iy_1 = \displaystyle\int \sqrt{2\,\mathcal{F}(u)}\, du, \\ x_1 - iy_1 = \displaystyle\int \sqrt{2\,\mathcal{F}_1(u_1)}\, du_1. \end{cases}$$

---

[1] Riemann, *Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung* (*Œuvres complètes*, traduction Laugel, p. 305, et t. XIII des *Mémoires de la Société Royale de Gœttingue*, 1867).

Il résulte immédiatement des formules (22), établies au n° 199, que cette correspondance est indépendante de l'orientation de la surface. C'est ce que mettront, d'ailleurs, en évidence les propositions que nous allons obtenir.

L'élément linéaire de la surface, déterminé par la formule (1), prendra la forme

$$(4)\qquad ds^2 = \frac{1}{2}(1+uu_1)^2\sqrt{\mathcal{F}(u)\mathcal{F}_1(u_1)}\,(dx_1^2+dy_1^2) = \mathrm{R}(dx_1^2+dy_1^2),$$

R désignant le rayon de courbure principal déterminé par la première formule (15) (p. 302). L'élément linéaire $d\sigma$ de la représentation sphérique aura de même pour expression

$$(5)\qquad d\sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{R}}(dx_1^2+dy_1^2).$$

La première de ces deux formules démontre la propriété que nous avons annoncée. La représentation de la surface minima sur le plan constitue un tracé géographique de la surface, et, si nous nous reportons aux équations (14) et (16) du Chapitre précédent (n° 197), nous reconnaissons immédiatement que, dans ce tracé géographique de la surface minima, les lignes de courbure sont représentées par les droites

$$x_1 = \text{const.},\qquad y_1 = \text{const.},$$

parallèles aux axes, et les lignes asymptotiques par les droites

$$x_1+y_1 = \text{const.},\qquad x_1-y_1 = \text{const.},$$

parallèle aux bissectrices de ces axes.

Les formules (4) et (5) mettent encore en évidence une proposition intéressante, que l'on peut d'ailleurs rattacher à celles qui concernent le tracé géographique de la surface minima sur la sphère : *Les lignes de courbure qui forment, sur la surface, un système isotherme, admettent pour représentation sphérique un système qui est aussi isotherme.* Mais cette propriété, prise dans son énoncé le plus général, ne caractérise nullement les surfaces minima, elle appartient aussi, par exemple, aux surfaces de révolution et aux surfaces du second degré (n° 123).

205. On obtient d'autres propositions qui méritent d'être signalées en introduisant dans les formules les deux fonctions

$$(6) \qquad \alpha = x_1 + iy_1, \qquad \beta = x_1 - iy_1.$$

On aura alors

$$(7) \qquad \begin{cases} u = \varphi(\alpha) = A, & u_1 = \omega(\beta) = B, \\ \mathcal{F}(u) = \dfrac{1}{2A'^2}, & \mathcal{F}_1(u_1) = \dfrac{1}{2B'^2}, \end{cases}$$

A′, B′ désignant les dérivées des fonctions A et B; et les éléments linéaires ds et $d\sigma$ auront pour expressions nouvelles

$$(8) \qquad ds^2 = \frac{(1 + AB)^2\, d\alpha\, d\beta}{4A'B'}, \qquad d\sigma^2 = \frac{4A'B'\, d\alpha\, d\beta}{(1 + AB)^2}.$$

De là le théorème suivant :

Si l'on a mis, d'une manière quelconque, l'élément linéaire de la sphère sous la forme

$$d\sigma^2 = \lambda\, d\alpha\, d\beta,$$

l'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{1}{\lambda}\, d\alpha\, d\beta$$

sera celui d'une surface minima pour laquelle $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ *seront les paramètres des lignes de courbure,*

qui a été énoncé, pour la première fois, par Bour [1] et qui résulte aussi des belles recherches de Weingarten, sur lesquelles nous aurons à revenir, pour les exposer, dans tous leurs détails.

Introduisons, dans les formules de Weierstrass, les notations nouvelles définies par les équations (6) et (7); ces formules se changeront dans les suivantes :

$$(9) \qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{1 - A^2}{4A'}\, d\alpha + \int \frac{1 - B^2}{4B'}\, d\beta, \\ y = i \displaystyle\int \frac{1 + A^2}{4A'}\, d\alpha - i \int \frac{1 + B^2}{4B'}\, d\beta, \\ z = \displaystyle\int \frac{A}{2A'}\, d\alpha + \int \frac{B}{2B'}\, d\beta, \end{cases}$$

---

[1] Bour, *Théorie des déformations des surfaces* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIXe Cahier, 1862, p. 118-119).

qui, sous cette forme, ont été données par Enneper en 1864, dans l'Article cité plus haut [1]. Si on les rapproche du théorème de Bour, elles permettent de déterminer les surfaces, minima qui admettent pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure un système isotherme donné de la sphère. En effet, si ce système isotherme est donné de forme et de position, on connaîtra les fonctions A et B et les formules précédentes donneront la surface minima cherchée. Les surfaces homothétiques s'obtiendront en remplaçant α et β par $m\alpha$ et $m\beta$, m étant une constante.

206. Proposons-nous, par exemple, de trouver les surfaces minima admettant pour représentation sphérique les systèmes isothermes composés de deux familles de cercles. Le plus général de ces systèmes, dans lequel les cercles de chaque famille passent par deux points *distincts*, correspond, avec un choix convenable des axes, aux valeurs suivantes de A et de B :

$$A = \sqrt{\frac{1-h}{1+h}}\,\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}, \qquad B = \sqrt{\frac{1-h}{1+h}}\,\operatorname{tang}\frac{\beta}{2},$$

h désignant une constante réelle inférieure à 1. Les formules précédentes nous donneront alors

$$(10)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\sqrt{1-h^2}}[h(\alpha+\beta) + \sin\alpha + \sin\beta], \\ y = \dfrac{i}{2\sqrt{1-h^2}}[\alpha - \beta + h(\sin\alpha - \sin\beta], \\ z = -\dfrac{1}{2}[\cos\alpha + \cos\beta]. \end{cases}$$

L'élément linéaire de la surface sera déterminé par la formule

$$ds^2 = \frac{1}{1-h^2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + h\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]^2 d\alpha\, d\beta.$$

Si l'on pose

$$\alpha = \lambda + i\mu, \qquad \beta = \lambda - i\mu,$$

λ et μ seront les paramètres des lignes de courbure. Multiplions

---

[1] Elles se trouvent aussi, sous une forme légèrement différente, dans le Mémoire de Riemann (*Œuvres complètes*, traduction Laugel, p. 317).

par $\sqrt{1-h^2}$; les expressions des coordonnées prendront la forme suivante :

$$(11)\qquad \begin{cases} x = h\lambda + \sin\lambda\cos i\mu, \\ y = -\mu + hi\sin i\mu\cos\lambda, \\ z = \sqrt{1-h^2}\cos\lambda\cos\mu i, \end{cases}$$

et l'élément linéaire aura pour valeur

$$(12)\qquad ds^2 = [\cos i\mu + h\cos\lambda]^2(d\lambda^2 + d\mu^2).$$

Ces formules ont été données par O. Bonnet ([1]).

La surface précédente n'a pas encore été étudiée, croyons-nous. Parmi ses propriétés, nous signalerons les suivantes :

La section par le plan des xy se compose d'un nombre illimité de chaînettes toutes égales, ayant leurs bases parallèles à l'axe des y. Ces chaînettes sont des lignes de courbure planes de la surface. Par cette propriété d'avoir pour ligne de courbure une chaînette, propriété qui suffirait, nous le verrons, à la déterminer, la surface se rapproche de la caténoïde, qui correspond à l'hypothèse $h = 0$. Mais le plan de la chaînette n'est pas un plan de symétrie de la surface; il la coupe sous un angle constant, dont le cosinus est égal à h.

Les lignes de courbure $\mu =$ const. sont des courbes analogues à la cycloïde et dont on obtiendra la forme en projetant une cycloïde allongée sur un plan parallèle à la base de cette courbe. Elles sont définies dans leur plan par deux équations de la forme

$$x = h\lambda + a\sin\lambda,$$
$$y = \sqrt{a^2 - h^2}\cos\lambda,$$

où λ est le paramètre variable, et elles sont rectifiables.

207. L'application que nous venons de faire nous donne l'occasion d'examiner et de résoudre le problème suivant : *Déterminer toutes les surfaces minima pour lesquelles l'une au moins des deux familles de lignes de courbure est composée de courbes planes.* Sur une surface quelconque, une ligne de courbure plane est caractérisée, nous le verrons, par la propriété d'admettre

---

([1]) *Comptes rendus*, t. XLI, 1855, p. 1057.

comme représentation sphérique un cercle de la sphère. Pour les surfaces cherchées, le système sphérique isotherme qui sert de représentation sphérique aux lignes de courbure de la surface devra donc comprendre une famille de cercles. Or, la proposition démontrée au n° 127 relativement aux systèmes plans dont une famille est composée de cercles s'étend, par une simple inversion, aux systèmes sphériques; car, lorsque deux surfaces se correspondent point par point avec conservation des angles, à tout système isotherme de l'une correspond un système isotherme de l'autre. Nous pouvons donc conclure qu'il n'existe pas sur la sphère de système isotherme dont une seule famille soit formée de cercles. Par suite, toute surface minima admettant une famille de lignes de courbure planes devra avoir son autre famille de lignes de courbure composée de courbes planes. Et la représentation sphérique des lignes de courbure devra être un système isotherme exclusivement composé de cercles. Or, nous l'avons vu, il y a seulement deux systèmes isothermes composés de cercles, celui que nous avons considéré au numéro précédent et qui nous a conduit aux surfaces minima à lignes de courbure planes découvertes par O. Bonnet, et celui dans lequel les cercles de chaque famille, au lieu de passer par deux points distincts, sont tous tangents en un même point et ont pour projection stéréographique deux systèmes de droites rectangulaires. La surface correspondante, sera donc, avec la précédente dans laquelle elle est comprise comme cas limite, la seule surface minima à lignes de courbure planes. Signalée en 1864 par Enneper [1], elle présente les propriétés les plus intéressantes et mérite une étude détaillée.

Dans ce cas, il faudra faire

$$A = \alpha, \qquad B = \beta,$$

ou, ce qui est la même chose, remplacer dans les formules de Weierstrass $\mathcal{P}(u)$, $\mathcal{P}_1(u_1)$ par une même constante. Prenons cette constante égale à 3. Nous aurons

$$(13) \qquad x = \mathcal{R}(3u - u^3), \qquad y = \mathcal{R}\, i(3u + u^3), \qquad z = \mathcal{R}\, 3u^2,$$

---

[1] A. Enneper, *Analytisch-geometrische Untersuchungen* (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. IX, 1864, p. 108).

et si l'on pose

$$u = \alpha - i\beta,$$

α et β seront les paramètres des lignes de courbure.

On a d'abord, en développant les expressions des coordonnées,

$$(14) \qquad \begin{cases} x = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3, \\ y = 3\beta + 3\alpha^2\beta - \beta^3, \\ z = 3\alpha^2 - 3\beta^2. \end{cases}$$

La surface est algébrique et unicursale. Dans le tracé géographique sur le plan décrit par le point (α, β), les sections planes sont représentées par des courbes du troisième degré qui n'ont aucun point commun et, par conséquent, la surface est du neuvième degré.

Les plans des lignes de courbure ont respectivement pour équations

$$(15) \qquad \begin{cases} x + \alpha z - 3\alpha - 2\alpha^3 = 0, \\ y - \beta z - 3\beta - 2\beta^3 = 0. \end{cases}$$

Nous verrons comment on peut les construire géométriquement. Il résulte d'ailleurs des formules (14) que les lignes de courbure sont des courbes unicursales du troisième ordre; et nous allons montrer qu'elles sont *rectifiables*.

En effet, le calcul de l'élément linéaire de la surface nous donne ici

$$ds^2 = 9[1 + \alpha^2 + \beta^2]^2 (d\alpha^2 + d\beta^2)$$

et si l'on fait, par exemple, $\beta =$ const., on aura

$$ds = 3(1 + \alpha^2 + \beta^2)\, d\alpha,$$

et, en intégrant,

$$s = 3(1 + \beta^2)\alpha + \alpha^3.$$

Laissant au lecteur le soin de démontrer que les lignes asymptotiques sont à la fois des hélices et des cubiques gauches rectifiables, nous allons chercher ce que devient ici la génération que nous avons donnée au n° 113 pour toutes les surfaces à lignes de courbure planes.

L'équation du plan tangent au point de paramètres α, β prend ici la forme

$$(16) \qquad 2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - 1) z + 3\beta^2 - 3\alpha^2 + \beta^4 - \alpha^4 = 0.$$

Si, conformément aux méthodes du n° 113, on l'écrit de la manière suivante :

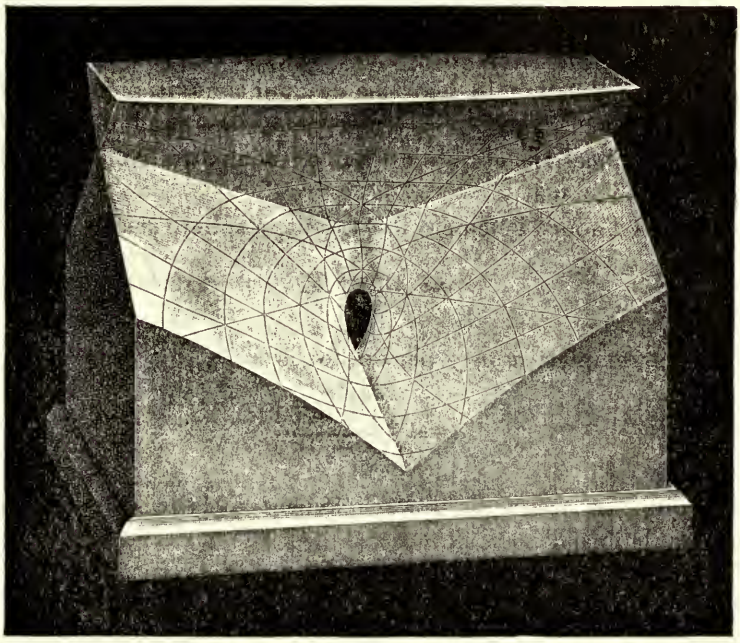
$$(x-4\alpha)^2+y^2+(z-2\alpha^2+1)^2-(y-4\beta)^2-x^2-(z+2\beta^2-1)^2=0,$$

on voit qu'il est le plan radical des deux sphères de rayon nul

$$(x-4\alpha)^2+y^2+(z-2\alpha^2+1)^2=0,$$
$$x^2+(y-4\beta)^2+(z+2\beta^2-1)^2=0,$$

dont les centres décrivent deux paraboles qui sont focales l'une de l'autre. L'application du théorème du numéro rappelé nous donne donc la génération suivante de la surface d'Enneper :

Fig. 11.



SURFACE MINIMA D'ENNEPER.

(D'après le modèle construit par M. G. Herting et faisant partie de la collection de M. L. Brill, à Darmstadt.)

Le réseau rectangulaire figuré sur la surface est composé de lignes de courbure; les courbes en diagonale sont des lignes asymptotiques.

Considérons dans l'espace deux paraboles qui sont focales l'une de l'autre. La surface est l'enveloppe des plans élevés

perpendiculairement sur les milieux des cordes qui joignent les points de l'une des courbes aux points de l'autre. Les plans normaux aux deux paraboles aux extrémités de l'une de ces cordes sont les plans des lignes de courbure qui passent par le point de contact de la surface et du plan perpendiculaire sur le milieu de la corde. La surface (fig. 11) est ainsi construite par plans et par points.

L'équation du plan tangent nous montre d'ailleurs que, dans le tracé géographique de la surface, les courbes de contact des cônes circonscrits à la surface sont représentées par des courbes du quatrième ordre ayant, on le reconnaîtra aisément, 10 points communs à l'infini. La classe de la surface sera donc égale à $4^2 - 10$ ou 6.

208. L'application du théorème de Bour conduit, pour l'élément linéaire des surfaces minima, à diverses formes que l'on rencontre dans les applications et qu'il est bon de connaître. Nous allons les signaler rapidement.

Prenons d'abord l'élément linéaire de la sphère sous la forme

$$d\sigma^2 = \frac{4\,dx\,dy}{(x-y)^2}.$$

Si l'on remplace x et y par des fonctions A et B de α et de β, on aura

$$d\sigma^2 = \frac{4\,A'B'\,d\alpha\,d\beta}{(A-B)^2}.$$

Par suite, on trouvera, pour l'élément linéaire de la surface minima, la forme

$$ds^2 = \frac{(A-B)^2}{4\,A'B'}\,d\alpha\,d\beta.$$

En substituant à α et à β les variables

$$\alpha_1 = \int \frac{d\alpha}{2A'}, \qquad \beta_1 = \int \frac{d\beta}{2B'},$$

on aura

$$ds^2 = (A_1 - B_1)^2\,d\alpha_1\,d\beta_1. \tag{17}$$

Cette forme a été obtenue par O. Bonnet et par Bour.

Si l'on emploie la forme

$$d^2\sigma = \frac{4\,dx\,dy}{(1+xy)^2},$$

pour l'élément linéaire de la sphère, on sera conduit de même à l'expression suivante de l'élément linéaire de la surface minima :

$$ds^2 = (1 + A_1 B_1)^2\, d\alpha_1\, d\beta_1, \tag{18}$$

qui a été donnée par Lie.

209. Nous terminerons ce Chapitre en signalant d'autres tracés géographiques de la surface sur lesquels Riemann et Beltrami [1] ont appelé l'attention.

Ils reposent sur la propriété suivante : *Les sections de toute surface minima par une série de plans parallèles constituent une famille de courbes isothermes de la surface.*

Employons, par exemple, les formules de Weierstrass. Toute fonction linéaire des coordonnées x, y, z d'un point de la surface sera de la forme

$$ax + by + cz = \Phi(u) + \Phi_1(u_1).$$

Par conséquent, les sections de la surface par les plans parallèles

$$ax + by + cz = \text{const.}$$

constituent une des deux familles du système défini par les équations

$$\Phi(u) + \Phi_1(u_1) = \text{const.},$$
$$\Phi(u) - \Phi_1(u_1) = \text{const.},$$

système qui est à la fois isotherme et orthogonal. Si l'on oriente la surface de manière que les plans sécants soient horizontaux, les trajectoires orthogonales deviennent les lignes de plus grande pente de la surface.

Il résulte des remarques développées au Chapitre II que l'on peut, si la surface est donnée, obtenir par des différentiations et

---

[1] B. Riemann, *Ueber die Fläche vom kleinstein Inhalt bei gegebener Begrenzung* (*Œuvres complètes*, traduction Laugel, p. 305). — E. Beltrami, *Sulle proprietà generali delle superficie d'aera minima* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Bologne*, 2e série, t. VII, 1868).

des éliminations les fonctions $\Phi(u)$, $\Phi_1(u_1)$. On pourra donc toujours déterminer, *sans aucune quadrature*, les lignes de plus grande pente de toute surface minima donnée.

Si l'on fait correspondre au point (u, u_1) de la surface le point d'un plan dont les coordonnées rectangulaires x_0, y_0 sont données par les relations

$$x_0 + iy_0 = \Phi(u), \qquad x_0 - iy_0 = \Phi_1(u_1),$$

on aura les tracés géographiques dont nous voulions parler, et pour lesquels une série de sections parallèles de la surface est représentée, sur la carte, par les droites parallèles à l'axe des y, tandis que les droites parallèles à l'axe des x représentent les lignes de plus grande pente de la surface.

Il existe évidemment une infinité de tracés géographiques de ce genre, puisque l'on peut choisir arbitrairement la direction des sections parallèles.

CHAPITRE V.

LA SURFACE ADJOINTE D'O. BONNET.

Définition des surfaces minima associées à une surface donnée. — La surface adjointe d'O. Bonnet. — Quand on connaît une surface minima, on peut obtenir la surface adjointe par des différentiations et des éliminations, sans aucun signe de quadrature; mais il importe de connaître des formules de M. Schwarz qui exigent, au contraire, l'emploi de deux quadratures.

Si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre et si les plans tangents aux points correspondants sont parallèles, elles sont nécessairement des surfaces minima associées. — Examen d'un problème posé par Mathet : Deux surfaces peuvent-elles se correspondre point par point avec similitude des éléments infiniment petits, les éléments correspondants faisant un angle constant.

Propriétés relatives aux lignes de courbure et aux lignes asymptotiques des surfaces associées. — Détermination de toutes les surfaces minima applicables sur une surface minima donnée, sur une surface de révolution, ou sur une surface spirale.

---

210. Considérons une surface minima, définie par les formules générales de Monge

$$(1)\qquad \begin{cases} x = A(t) + A_1(\tau), \\ y = B(t) + B_1(\tau), \\ z = C(t) + C_1(\tau), \end{cases}$$

où les fonctions A, B, C; A_1, B_1, C_1 satisfont respectivement aux deux conditions

$$(2)\qquad \begin{cases} dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0, \\ dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2 = 0. \end{cases}$$

L'élément linéaire de cette surface sera donné par la formule

$$ds^2 = 2(dA\,dA_1 + dB\,dB_1 + dC\,dC_1);$$

par conséquent, il aura la même expression pour toutes les surfaces minima définies par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} x = e^{i\alpha}A(t) + e^{-i\alpha}A_1(\tau), \\ y = e^{i\alpha}B(t) + e^{-i\alpha}B_1(\tau), \\ z = e^{i\alpha}C(t) + e^{-i\alpha}C_1(\tau), \end{cases}$$

où α désigne une constante quelconque. Toutes ces surfaces sont évidemment applicables les unes sur les autres, et les points

correspondants sur deux quelconques d'entre elles sont ceux qui sont déterminés par les mêmes valeurs de t et de τ. On reconnaîtra aisément qu'en ces points les plans tangents aux surfaces sont parallèles.

Nous dirons que les équations (3) définissent une famille de surfaces *associées*. Pour $\alpha = 0$, on retrouve la surface définie par les équations (1); pour $\alpha = \pi$, on obtient la symétrique de cette surface par rapport à l'origine des coordonnées.

Parmi les surfaces associées à une surface donnée, on doit distinguer particulièrement celle qui correspond à la valeur $\frac{\pi}{2}$ de α. Elle est définie par les formules

$$(4)\qquad \begin{cases} x_0 = i[A(t) - A_1(\tau)], \\ y_0 = i[B(t) - B_1(\tau)], \\ z_0 = i[C(t) - C_1(\tau)]. \end{cases}$$

Nous lui donnerons le nom de surface *adjointe* à la proposée. Elle a été découverte par O. Bonnet [1]. Ses relations avec la surface dont elle dérive jouent un rôle essentiel dans la théorie des surfaces minima.

Si, dans les formules (1), on remplace $A(t)$ par $A(t) - im$, $A_1(\tau)$ par $A_1(\tau) + im$, m désignant une constante, la surface primitive ne sera pas changée, mais la valeur de x_0 sera augmentée de $2m$. Comme on peut opérer des changements analogues pour y_0, z_0, on voit que la surface adjointe peut être déplacée parallèlement à elle-même et subir une translation quelconque. Si, d'ailleurs, on échange les termes relatifs à t et à τ, cette surface sera remplacée par sa symétrique relativement à l'origine des coordonnées. Ainsi, la surface adjointe à une surface donnée n'est pas complètement définie de position.

Quand on emploie les formules de Weierstrass

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \int \frac{1+u^2}{2} \mathcal{F}(u)\,du + \int \frac{1-u_1^2}{2} \mathcal{F}_1(u_1)\,du_1, \\ y = i\int \frac{1+u^2}{2} \mathcal{F}(u)\,du - i\int \frac{1+u_1^2}{2} \mathcal{F}_1(u_1)\,du_1, \\ z = \int u\mathcal{F}(u)\,du \qquad + \int u_1 \mathcal{F}_1(u_1)\,du_1, \end{cases}$$

---

[1] O. Bonnet, *Note sur la théorie générale des surfaces* (*Comptes rendus*, t. XXXVII, 1853, p. 529-532).

les surfaces associées s'obtiennent en remplaçant $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ respectivement par $\mathcal{F}(u)e^{i\alpha}$, $\mathcal{F}_1(u)e^{-i\alpha}$ [1].

En particulier, la surface adjointe est définie par les équations

$$(6)\quad \begin{cases} x_0 = \quad i\displaystyle\int \frac{1-u^2}{2}\mathcal{F}(u)\,du - i\int \frac{1-u_1^2}{2}\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1, \\ y_0 = -\displaystyle\int \frac{1+u^2}{2}\mathcal{F}(u)\,du - \int \frac{1+u_1^2}{2}\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1, \\ z_0 = \quad i\displaystyle\int u\mathcal{F}(u)\,du \qquad - i\int u_1\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1, \end{cases}$$

qui se déduisent des formules (5) par la substitution de $i\mathcal{F}(u)$ à $\mathcal{F}(u)$ et de $-i\mathcal{F}(u_1)$ à $\mathcal{F}_1(u_1)$. A chaque nappe réelle d'une surface minima correspondra évidemment une nappe réelle de la surface adjointe. Si la surface proposée est algébrique, il en sera de même, et des surfaces associées, et de la surface adjointe.

211. Quel que soit le système de détermination employé pour les valeurs de x, y, z; x_0, y_0, z_0, les coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface associée qui correspond à une valeur quelconque de α s'expriment de la manière suivante :

$$(7)\quad \begin{cases} X = x\cos\alpha + x_0\sin\alpha, \\ Y = y\cos\alpha + y_0\sin\alpha, \\ Z = z\cos\alpha + z_0\sin\alpha. \end{cases}$$

En écrivant que le carré de l'élément linéaire de cette surface

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

est indépendant de α, on est conduit aux relations

$$(8)\quad \begin{cases} dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2, \\ dx\,dx_0 + dy\,dy_0 + dz\,dz_0 = 0, \end{cases}$$

qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier. Ainsi, non seulement une surface minima et son adjointe sont applicables l'une sur l'autre et elles ont, comme deux surfaces associées quelconques, la propriété que leurs plans tangents aux points correspondants sont parallèles;

---

[1] Ce moyen si simple d'obtenir toute une famille de surfaces minima applicables sur une surface minima donnée est dû à M. Schwarz qui l'a donné dans l'Article déjà cité : *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen*, p. 286.

mais, de plus, les tangentes à deux courbes correspondantes sont toujours perpendiculaires. Nous dirons alors que les éléments correspondants des deux surfaces sont orthogonaux.

212. Avant de continuer l'étude des surfaces associées, nous remarquerons que les formules (8) ont conduit M. Schwarz à un procédé très élégant de détermination de la surface adjointe [1]. Nous avons déjà démontré que, si une surface minima est donnée par son équation, on peut obtenir, par des différentiations et des éliminations, et sans aucune quadrature, les expressions des coordonnées en fonction des variables u, u_1. Ces expressions une fois obtenues

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u) + \varphi_1(u_1), \\ y &= \psi(u) + \psi_1(u_1), \\ z &= \chi(u) + \chi_1(u_1), \end{aligned}$$

on en déduira immédiatement celles qui conviennent à la surface adjointe et qui sont

$$\begin{aligned} x_0 &= i[\varphi(u) - \varphi_1(u_1)], \\ y_0 &= i[\psi(u) - \psi_1(u_1)], \\ z_0 &= i[\chi(u) - \chi_1(u_1)]. \end{aligned}$$

Les formules données par M. Schwarz exigent, au contraire, l'emploi de trois quadratures, mais elles sont de la plus grande élégance et ont des applications très importantes. Nous allons les faire connaître.

Désignons maintenant par X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale, qui sont définis par les formules déjà données (n° **193**)

$$(9) \qquad X = \frac{u + u_1}{1 + uu_1}, \qquad Y = \frac{i(u_1 - u)}{1 + uu_1}, \qquad Z = \frac{1 - uu_1}{uu_1 - 1};$$

x, y, z; x_0, y_0, z_0 désignant les coordonnées de deux points correspondants, sur la surface minima donnée et sur la surface adjointe. On aura

$$(10) \qquad \begin{cases} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0, \\ X\,dx_0 + Y\,dy_0 + Z\,dz_0 = 0. \end{cases}$$

---

[1] Schwarz, *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen*, p. 287.

Si l'on joint la dernière des équations précédentes à la seconde des formules (8), on pourra déterminer les rapports mutuels de dx_0, dy_0, dz_0; ce qui donnera

$$\frac{dx_0}{Z\,dy - Y\,dz} = \frac{dy_0}{X\,dz - Z\,dx} = \frac{dz_0}{Y\,dx - X\,dy}.$$

La somme des carrés des numérateurs est égale, en vertu des formules (8) et (10), à la somme des carrés des dénominateurs. La valeur commune des rapports précédents est donc égale à ± 1. Mais, si l'on remplace dans l'un quelconque d'entre eux X, Y, Z, dx, ..., dx_0, ... par leurs valeurs déduites des formules (5), (6) et (9), on obtient -1 pour la valeur commune des trois rapports. On a donc

$$(11)\qquad \begin{cases} dx_0 = Y\,dz - Z\,dy, \\ dy_0 = Z\,dx - X\,dz, \\ dz_0 = X\,dy - Y\,dx; \end{cases}$$

et x_0, y_0, z_0 seront déterminés par l'intégration de ces trois différentielles à deux variables indépendantes, que l'on peut toujours former quand on connaît l'équation de la surface.

Lagrange, nous l'avons vu (n° 175), avait déjà remarqué que l'expression

$$X\,dy - Y\,dx = \frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

doit être une différentielle exacte.

213. Nous avons reconnu que deux surfaces associées sont applicables l'une sur l'autre, et que les plans tangents aux points correspondants sont parallèles. Réciproquement, *si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre et si les plans tangents aux points correspondants sont parallèles, elles sont nécessairement deux surfaces minima associées.* Pour établir cette proposition, nous emploierons le système de coordonnées tangentielles (α, β, ξ) du n° 165, dans lequel l'expression de l'élément linéaire est

$$ds^2 = (z\,d\beta + dp)(z\,d\alpha + dq).$$

Pour deux plans tangents parallèles, on peut toujours supposer que les coordonnées α et β ont la même valeur. Il faut donc

rechercher si deux valeurs différentes ξ, ξ_1 de la fonction ξ peuvent donner la même valeur de l'élément linéaire, c'est-à-dire si l'on peut avoir

$$(12)\qquad (z\,d\beta + dp)(z\,d\alpha + dq) = (z_1\,d\beta + dp_1)(z_1\,d\alpha + dq_1),$$

z et z_1 ayant d'ailleurs les valeurs suivantes, indiquées au n° 165 :

$$(13)\qquad z = \frac{\xi - p\alpha - q\beta}{1 + \alpha\beta}, \qquad z_1 = \frac{\xi_1 - p_1\alpha - q_1\beta}{1 + \alpha\beta}.$$

L'équation (12) peut être vérifiée de deux manières différentes. On peut avoir : soit

$$(14)\qquad \begin{cases} z\,d\beta + dp = \lambda(z_1\,d\beta + dp_1), \\ z\,d\alpha + dq = \frac{1}{\lambda}(z_1\,d\alpha + dq_1); \end{cases}$$

soit

$$(15)\qquad \begin{cases} z\,d\beta + dp = \lambda(z_1\,d\alpha + dq_1), \\ z\,d\alpha + dq = \frac{1}{\lambda}(z_1\,d\beta + dp_1), \end{cases}$$

λ désignant, dans les deux systèmes de formules, une fonction inconnue. Le premier système donne les équations

$$(16)\qquad \begin{cases} z + s = \lambda(z_1 + s_1), & z + s = \frac{1}{\lambda}(z_1 + s_1), \\ r = \lambda r_1, & t = \frac{1}{\lambda} t_1. \end{cases}$$

Si donc la somme $z + s$ n'est pas nulle, il faudra que λ soit égal à ± 1. Alors la fonction

$$\xi \pm \xi_1 = \Xi$$

devra satisfaire aux trois équations

$$R = 0, \qquad T = 0, \qquad \Xi - P\alpha - Q\beta + S(1 + \alpha\beta) = 0,$$

que l'on résoudra facilement et qui donnent

$$\Xi = A(\alpha\beta - 1) + B\alpha + C\beta,$$

A, B, C étant trois constantes quelconques.

On reconnaîtra aisément qu'en imprimant une translation convenable à l'une des deux surfaces, on peut annuler Ξ et avoir,

par conséquent,

$$\xi \pm \xi_1 = 0.$$

Les deux surfaces proposées sont donc égales ou symétriques. Cette solution pouvait être prévue *a priori*.

Mais, si l'on a

$$z + s = 0$$

et, par conséquent,

$$z_1 + s_1 = 0,$$

les deux surfaces considérées sont des surfaces minima (n° 194).

Revenons aux notations du Chapitre III et soient

$$\xi = 2u_1 f(u) + 2u f_1(u_1) - (1 + uu_1)[f'(u) + f'_1(u_1)],$$
$$\xi = 2u_1 \varphi(u) + 2u \varphi_1(u_1) - (1 + uu_1)[\varphi'(u) + \varphi'_1(u_1)]$$

les équations de nos deux surfaces. Si, dans les formules (16), nous remplaçons les dérivées r, t, r_1, t_1 par leurs valeurs, nous trouverons

$$f'''(u) = \lambda \varphi'''(u), \qquad f'''_1(u_1) = \frac{1}{\lambda} \varphi'''_1(u_1).$$

Ces deux équations montrent que λ est une constante. Si on la désigne par $e^{i\alpha}$, on passera de l'une des surfaces à l'autre en remplaçant $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$, par $e^{i\alpha}(u)$, $e^{-i\alpha}\mathcal{F}_1(u_1)$. C'est la substitution que nous étudions dans ce Chapitre.

Le système (15), que nous devons maintenant examiner, nous conduit aux équations

$$z + s = \lambda t_1, \qquad z + s = \frac{r_1}{\lambda},$$

$$r = (z_1 + s_1)\lambda, \qquad t = \frac{z_1 + s_1}{\lambda};$$

d'où l'on déduit, en particulier,

$$(z + s)^2 - rt \equiv r_1 t_1 - (z_1 + s_1)^2.$$

Cette équation exprime (n° 165) qu'aux points correspondants des deux surfaces, le produit des rayons de courbure principaux prend des valeurs égales et de signes contraires pour les deux surfaces. D'après le théorème fondamental de Gauss que nous démontrerons plus tard, il est impossible que les surfaces soient applicables l'une sur l'autre; et notre réciproque est ainsi complètement démontrée.

214. Les méthodes précédentes se prêtent à l'examen d'une question qui, sous un énoncé différent, a été l'objet des savantes recherches de Mathet [1].

Nous avons vu (Livre II, Chap. III) que, dans le plan, on peut imaginer une infinité de méthodes de transformation avec similitude des éléments infiniment petits, dans lesquelles, à tout élément linéaire passant par un point M correspond un élément passant par le point correspondant M′ et faisant avec son homologue un angle qui ne dépend que de la position du point M et demeure constant quand le premier élément tourne autour de M. Peut-on transporter ces propriétés à l'espace ? Est-il possible d'établir, entre deux surfaces différentes (Σ), (Σ_1), une correspondance point par point avec similitude des éléments infiniment petits, pour laquelle l'angle de deux éléments correspondants passant respectivement par deux points M, M′ des deux surfaces ne dépende que de la position de M ou de M′ et nullement de la direction de l'un des éléments? Telle est la question générale dont nous allons chercher la solution.

Soient x, y, z; x_1, y_1, z_1 les coordonnées de deux points correspondants sur les deux surfaces, qui seront six fonctions inconnues de deux paramètres. Les propriétés de la transformation se traduiront par les deux équations

$$(17)\quad \begin{cases} dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2), \\ dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = \lambda'\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\sqrt{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2}. \end{cases}$$

En tenant compte de la première, on peut remplacer la seconde par la suivante :

$$(17')\qquad dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = \mu(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

qui est rationnelle; λ et μ seront d'ailleurs des fonctions que l'énoncé de la question n'assujettit à aucune condition.

Prenons comme variables indépendantes les paramètres α, β des

---

[1] Mathet, *Solution d'un problème de Géométrie* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. VIII, 1863, p. 313); *Étude sur un certain mode de génération des surfaces d'étendue minimum* (même tome, p. 323).

lignes de longueur nulle de la surface (Σ). On aura

$$(18)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 = 0, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Les équations précédentes nous donneront les relations nouvelles

$$(19)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \alpha}\right)^2 = 0, & \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z_1}{\partial \alpha} = 0, \\ \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \beta}\right)^2 = 0, & \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial x_1}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial y_1}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial z_1}{\partial \beta} = 0. \end{cases}$$

Les deux premières de ces relations déterminent très simplement les rapports de $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial z_1}{\partial \alpha}$. En tenant compte des équations (18), on trouve

$$(20)\quad \frac{\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial x}{\partial \alpha}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial z}{\partial \alpha}},$$

et l'on aura, de même,

$$(21)\quad \frac{\frac{\partial x_1}{\partial \beta}}{\frac{\partial x}{\partial \beta}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial \beta}}{\frac{\partial y}{\partial \beta}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial \beta}}{\frac{\partial z}{\partial \beta}}.$$

Si l'on désigne respectivement par θ et θ_1 les valeurs communes des rapports précédents, on pourra écrire

$$(22)\quad \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} = \theta \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \beta} = \theta_1 \frac{\partial x}{\partial \beta},$$

et les équations analogues en y et z. En éliminant x_1, on obtiendra l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\theta \frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\theta_1 \frac{\partial x}{\partial \beta}\right),$$

$$(\theta - \theta_1)\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{\partial \theta}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0,$$

à laquelle satisferont également y et z. Par suite (n° 84), α et β seront les paramètres de deux familles conjuguées ; et la surface (Σ),

admettant pour lignes conjuguées ses lignes de longueur nulle, sera une surface minima. Il en sera évidemment de même de la surface (Σ_1). De plus, les formules (20) et (21) montrent qu'aux points correspondants des deux surfaces, les lignes de longueur nulle correspondantes auront la même direction; et, par conséquent, les plans tangents aux deux surfaces seront parallèles.

Réciproquement, si l'on prend deux surfaces minima *quelconques* et si l'on établit la correspondance entre les points de ces surfaces par la condition que les plans tangents y soient parallèles, pour ces points correspondants les quantités u et u_1 qui figurent dans les formules de Weierstrass auront les mêmes valeurs; et ces formules nous permettent de vérifier que toutes les relations (19) seront satisfaites. Ces deux surfaces donneront donc effectivement la solution générale du problème proposé.

Si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, la correspondance établie entre leurs points détermine évidemment un tracé géographique de l'une d'elles sur l'autre. La proposition que nous venons d'établir, jointe à celle que nous avons obtenue au n° 213, nous permet donc d'énoncer les résultats suivants :

Si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, de telle manière que les éléments correspondants fassent entre eux un angle constant, ce sont nécessairement deux surfaces minima associées et les plans tangents aux points correspondants sont parallèles.

Si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, avec orthogonalité des éléments correspondants, elles ne peuvent être que deux surfaces minima, dont l'une est adjointe à l'autre.

215. Nous ne quitterons pas ce sujet sans remarquer que les formules (7) donnent un nouvel exemple d'une surface se déformant d'une manière continue sans cesser d'être applicable sur elle-même. Lorsque α varie, chaque point de la surface décrit une ellipse ayant son centre à l'origine des coordonnées. Il y a ici une remarque essentielle à faire. Dans l'exemple du n° 77, une portion de la surface ne pouvait se déformer indéfiniment sans se plier ou se déchirer dès que l'on dépassait certaines positions

limites; dans l'exemple actuel, rien de pareil ne se produit et l'on peut continuer indéfiniment le mouvement de déformation d'une portion quelconque de surface jusqu'à ce que celle-ci revienne, lorsque α a crû de 2π, à sa position primitive. Nous laisserons au lecteur le soin de démontrer que cet exemple est le seul dans lequel une surface puisse se déformer de telle manière que ses différents points décrivent des coniques, et nous insisterons sur les propriétés géométriques suivantes, qui ont été signalées par O. Bonnet.

Nous avons vu que, si l'on considère la surface minima correspondante à un système de valeurs de $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ et si l'on pose

$$x_1 + iy_1 = \int \sqrt{2\mathcal{F}(u)}\, du, \qquad x_1 - iy_1 = \int \sqrt{2\mathcal{F}_1(u_1)}\, du_1,$$

les lignes de courbure sont définies par les équations

$$x_1 = \text{const.}, \qquad y_1 = \text{const.}$$

et les lignes asymptotiques par les équations

$$x_1 + y_1 = \text{const.}, \qquad x_1 - y_1 = \text{const.}$$

Pour passer de la surface précédente à toute autre surface associée, il faudra remplacer $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ par $\mathcal{F}(u)e^{i\alpha}$, $\mathcal{F}_1(u_1)e^{-i\alpha}$ et les nouvelles valeurs x'_1, y'_1 de x_1, y_1 seront définies par les formules

$$x'_1 + iy'_1 = e^{i\frac{\alpha}{2}}(x_1 + iy_1),$$

$$x'_1 + iy'_1 = e^{-i\frac{\alpha}{2}}(x_1 + iy_1),$$

qui donnent

$$(23) \qquad \begin{cases} x'_1 = x_1 \cos\dfrac{\alpha}{2} - y_1 \sin\dfrac{\alpha}{2}, \\ y'_1 = x_1 \sin\dfrac{\alpha}{\alpha} + y_1 \cos\dfrac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Par suite, les lignes de courbure de la surface associée seront définies par les équations

$$x_1 \cos\frac{\alpha}{2} - y_1 \sin\frac{\alpha}{2} = \text{const.}, \qquad x_1 \sin\frac{\alpha}{2} + y_1 \cos\frac{\alpha}{2} = \text{const.},$$

et les lignes asymptotiques par les équations

$$x_1 \cos\frac{2\alpha-\pi}{4} - y_1 \sin\frac{2\alpha-\pi}{4} = \text{const.},$$

$$x_1 \sin\frac{2\alpha-\pi}{4} + y_1 \cos\frac{2\alpha-\pi}{4} = \text{const.}$$

On voit que, sur la surface primitive, elles correspondent respectivement aux courbes qui coupent les lignes de paramètre x_1 sous les angles $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}$, $\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}$. Si l'on considère en particulier la surface adjointe, on aura $\alpha = \frac{\pi}{2}$; par suite, *les lignes de courbure de cette surface correspondront aux lignes asymptotiques de la proposée et* vice versa

Traitons, par exemple, le cas où l'on a

$$\mathcal{F}(u) = -\frac{1}{2u^2}, \qquad \mathcal{F}_1(u_1) = -\frac{1}{2u_1^2}.$$

Les formules qui définissent la famille de surfaces associées sont les suivantes :

$$(24)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{e^{i\alpha}}{4}\left(u+\dfrac{1}{u}\right) + \dfrac{e^{-i\alpha}}{4}\left(u_1+\dfrac{1}{u_1}\right), \\ Y = \dfrac{ie^{i\alpha}}{4}\left(\dfrac{1}{u}-u\right) - \dfrac{ie^{-i\alpha}}{4}\left(\dfrac{1}{u_1}-u_1\right), \\ Z = -\dfrac{e^{i\alpha}}{2}\,\mathrm{L}u \qquad - \dfrac{e^{-i\alpha}}{2}\,\mathrm{L}u_1 + C, \end{cases}$$

C désignant une constante quelconque. Posons

$$u_1 = e^{-\mu-i\nu}, \qquad u = e^{-\mu+i\nu},$$

et nous obtiendrons

$$(25)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{1}{2}e^{-\mu}\cos(\nu+\alpha) + \dfrac{1}{2}e^{\mu}\cos(\nu-\alpha), \\ Y = \dfrac{1}{2}e^{-\mu}\sin(\nu+\alpha) + \dfrac{1}{2}e^{\mu}\sin(\nu-\alpha), \\ Z = \mu\cos\alpha + \nu\sin\alpha. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0$, on trouve la caténoïde. Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on obtient l'hélicoïde gauche à plan directeur. Ces deux surfaces sont appli-

cables l'une sur l'autre avec orthogonalité des éléments, et les lignes de courbure de l'une correspondent aux asymptotiques de l'autre. Les surfaces qui correspondent à une valeur quelconque de α sont les hélicoïdes déjà rencontrées aux n°s 75 et 180.

216. Après avoir obtenu *une* famille de surfaces minima applicables sur une surface minima donnée, proposons-nous de rechercher, d'une manière générale, *toutes* les surfaces minima applicables sur une surface minima donnée (Σ). Soit

$$ds^2 = (1 + uu_1)^2 \mathcal{F}(u) \mathcal{F}_1(u_1)\, du\, du_1$$

l'élément linéaire de cette surface et soit

$$ds^2 = (1 + vv_1)^2 \mathcal{G}(v) \mathcal{G}_1(v_1)\, dv\, dv_1$$

l'élément linéaire d'une autre surface minima (Σ'). Pour qu'elles soient applicables l'une sur l'autre, il faudra que l'on puisse déterminer v, v_1 en fonction de u et de u_1, de manière à satisfaire à l'équation

$$(1 + vv_1)^2 \mathcal{G}(v) \mathcal{G}_1(v_1)\, dv\, dv_1 = (1 + uu_1)^2 \mathcal{F}(u) \mathcal{F}_1(u_1)\, du\, du_1.$$

Cette égalité ne peut être vérifiée (n° 121) que si l'on a

$$v = \varphi(u), \qquad v_1 = \psi(u_1),$$

ou

$$v = \varphi(u_1), \qquad v_1 = \psi(u),$$

φ et ψ désignant des fonctions à déterminer. En donnant un sens convenable aux normales des deux surfaces, on peut prendre

$$v = \varphi(u), \qquad v_1 = \psi(u_1),$$

et l'équation à vérifier prendra la forme

$$(1 + \varphi\psi)^2 \mathcal{G}(\varphi) \mathcal{G}_1(\psi) \varphi'\psi' = (1 + uu_1)^2 \mathcal{F}(u) \mathcal{F}_1(u_1).$$

Égalons les logarithmes des deux membres et prenons la dérivée seconde par rapport à u et à u_1. Nous aurons

$$\frac{\varphi'\psi'}{(1 + \varphi\psi)^2} = \frac{1}{(1 + uu_1)^2}$$

ou encore

$$\frac{4\, dv\, dv_1}{(1 + vv_1)^2} = \frac{4\, du\, du_1}{(1 + uu_1)^2}.$$

Cette égalité exprime que les représentations sphériques de deux figures correspondantes sur les deux surfaces sont égales ou symétriques (Livre I, Chap. III). Comme, par hypothèse, v est une fonction de u, ces représentations sont ici égales et, par conséquent, on pourra, en orientant convenablement la seconde surface, prendre

$$v = u, \qquad v_1 = u_1.$$

Il restera donc à satisfaire uniquement à l'équation

$$\mathcal{F}(u)\,\mathcal{F}_1(u_1) = \mathcal{G}(u)\,\mathcal{G}_1(u_1),$$

et cette équation ne peut être vérifiée que si l'on a

$$\mathcal{G}(u) = \mathcal{F}(u)\,e^{i\alpha},$$
$$\mathcal{G}_1(u_1) = \mathcal{F}_1(u_1)\,e^{-i\alpha},$$

α étant une constante quelconque. Les seules surfaces minima applicables sur une surface donnée sont donc les surfaces *associées* à la surface proposée [1].

217. Il nous reste maintenant à examiner une dernière question qui se rapproche de celles qui ont été étudiées dans ce Chapitre. Proposons-nous de déterminer toutes les surfaces minima applicables sur des surfaces de révolution. Comme une surface de révolution est applicable sur elle-même d'une infinité de manières, il suffira de rechercher les surfaces minima qui jouissent de la même propriété.

Reprenons les formules de Weierstrass et soient (u, u_1), (v, v_1) les valeurs de u et de u_1 relatives à deux points de la surface. Nous chercherons s'il est possible de satisfaire à l'équation

$$(1 + uu_1)^2\,\mathcal{F}(u)\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du\,du_1 = (1 + vv_1)^2\,\mathcal{F}(v)\,\mathcal{F}_1(v_1)\,dv\,dv_1,$$

en prenant pour v et v_1 des fonctions de u et de u_1 qui devront même contenir un paramètre variable et se réduire, pour une

---

[1] La détermination de toutes les surfaces minima applicables sur une surface minima donnée est due à O. Bonnet (*voir*, en particulier, le *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, inséré au XLIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 8 et suiv., p. 73 et suiv.; 1860, 1867).

valeur de ce paramètre, aux suivantes :

$$v = u, \qquad v_1 = u_1;$$

v ne pouvant dépendre que de u ou de u_1, sera, par suite, une fonction de u et, en raisonnant comme dans le numéro précédent, on trouvera encore

$$\frac{du\,du_1}{(1+uu_1)^2} = \frac{dv\,dv_1}{(1+vv_1)^2}.$$

La solution la plus générale de cette équation est donnée par les formules

$$v = \frac{mu+n}{-n_0u+m_0}, \qquad v_1 = \frac{m_0u_1+n_0}{-nu_1+m},$$

et l'équation à vérifier deviendra

$$\mathcal{F}(u)\mathcal{F}_1(u_1) = \frac{(mm_0+nn_0)^4}{(m-nu_1)^4(m_0-n_0u)^4}\mathcal{F}\left(\frac{mu+n}{-n_0u+m_0}\right)\mathcal{F}_1\left(\frac{m_0u_1+n_1}{-nu_1+m}\right).$$

Elle se décompose évidemment dans les suivantes :

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= \frac{(mm_0+nn_0)^2}{(m_0-n_0u)^4}\mathcal{F}\left(\frac{mu+n}{-n_0u+m_0}\right)e^{i\theta},\\ \mathcal{F}_1(u_1) &= \frac{(mm_0+nn_0)^2}{(m-nu_1)^4}\mathcal{F}_1\left(\frac{m_0u_1+n_0}{-nu+m}\right)e^{-i\theta},\end{aligned}\right.$$

où θ désigne une quantité nécessairement constante, puisqu'elle ne dépend, ni de u_1 en vertu de la première équation, ni de u en vertu de la seconde.

Les équations précédentes devront avoir lieu pour une infinité de systèmes de valeurs de m, n, m_0, n_0 fonctions continues d'un paramètre et se réduisant, pour une valeur déterminée de ce paramètre, aux valeurs suivantes : 1, 0, 1, 0. Différentions la première, par exemple, par rapport à ce paramètre. Nous aurons, en désignant par des lettres accentuées les dérivées par rapport à ce paramètre,

$$\frac{2(mm_0+nn_0)'}{mm_0+nn_0} - \frac{4(m'_0-n'_0u)}{m_0-n_0u} + i\theta'$$
$$+\frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}}\left[\frac{(m'u+n')(m_0-n_0u)+(mu+n)(m'_0-n'_0u)}{(m_0-n_0u)^2}\right] = 0.$$

Faisons dans cette équation

$$m = m_0 = 1, \qquad n = n_0 = 0,$$

elle se réduira à la suivante :

$$4n'_0 u + 2(m' - m'_0) + i\theta' + \frac{\mathcal{F}'(u)}{\mathcal{F}(u)}[m'u + n' - u(m'_0 - n'_0)(u)] = 0,$$

où l'on devra regarder m', m'_0, n', n'_0, θ' comme des constantes. On pourrait intégrer cette équation et déterminer $\mathcal{F}(u)$; mais il est préférable de montrer que l'on peut toujours choisir les axes, de telle manière que les constantes m', m'_0, n', n'_0 prennent des valeurs très simples

Reprenons les formules de substitution

$$v = \frac{mu + n}{-n_0 u + m_0}, \qquad v_1 = \frac{m_0 u_1 + n_0}{m - nu_1}.$$

Nous savons qu'elles définissent un déplacement à la surface de la sphère. Si, en particulier, nous prenons les valeurs de m, m_0, n, n_0, très voisines de 1, 1, 0, 0, elles définiront un déplacement infiniment petit du point (u, u_1) à partir de sa position initiale. Ainsi, les formules

$$v = \frac{(dm + 1)u + dn}{-u\,dn_0 + (1 + dm_0)}, \qquad v_1 = \frac{u_1(1 + dm_0) + dn_0}{-u_1\,dn + (1 + dm)}$$

représentent une rotation $d\alpha$ autour d'un certain diamètre de la sphère. Si nous prenons ce diamètre pour axe des z, il faudra que l'on ait

$$dn = dn_0 = 0, \qquad dm = i\frac{d\alpha}{2}, \qquad dm_0 = -i\frac{d\alpha}{2}$$

et, par conséquent,

$$n' = n'_0 = 0, \qquad m' = i\frac{\alpha'}{2}, \qquad m'_0 = -i\frac{\alpha'}{2}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation à laquelle doit satisfaire $\mathcal{F}(u)$, nous trouverons

$$2i\alpha' + i\theta' + \frac{\mathcal{F}'(u)}{\mathcal{F}(u)} i\alpha' u = 0$$

et, par suite,

$$\frac{u\mathcal{F}'(u)}{\mathcal{F}(u)} = k,$$

k désignant une constante. En intégrant, on a

$$\mathcal{F}(u) = \mathrm{C}u^k. \tag{27}$$

On trouverait de même

$$(27') \qquad \mathcal{F}_1(u_1) = C_1 u_1^k.$$

Les surfaces qui correspondent à ces valeurs des fonctions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ jouissent bien de la propriété indiquée et sont, nous l'avons déjà vu (n° 203), applicables sur des surfaces de révolution. La méthode par laquelle nous les avons obtenues a été indiquée par M. Schwarz [1].

Nous signalerons une remarquable propriété dont elles jouissent. Remplaçons, dans les formules de Weierstrass, $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ par leurs valeurs précédentes où, pour plus de netteté, on aura mis $m-2$ à la place de k, en sorte que l'on aura

$$\mathcal{F}(u) = C u^{m-2}, \qquad \mathcal{F}_1(u_1) = C_1 u_1^{m-2}.$$

Si l'on fait tourner la surface de l'angle α autour de l'axe des z, les nouvelles valeurs de $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ seront, d'après les formules (23) du n° 200,

$$\mathcal{F}(v) = C e^{-mi\alpha} v^{m-2},$$
$$\mathcal{F}_1(v_1) = C_1 e^{mi\alpha} v_1^{m-2}.$$

On voit que, lorsque m n'est pas nul, ces nouvelles valeurs conviennent à une des surfaces associées à la proposée. Le cas où m est nul correspond, nous le savons (n° 200), aux hélicoïdes. On est ainsi conduit au théorème suivant :

Si l'on considère toutes les surfaces minima, autres que les hélicoïdes, qui sont applicables sur des surfaces de révolution, elles sont superposables à leurs surfaces associées; si l'on fait tourner la surface d'un angle quelconque autour de son axe, on obtient l'une des surfaces associées.

Par suite, pour obtenir toutes les applications de la surface sur elle-même, il suffira de la faire tourner d'un angle quelconque autour de son axe et de faire correspondre dans les deux positions les points où les plans tangents sont parallèles.

---

[1] Schwarz, *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen*, p. 296. — *Voir* aussi Bour, *Théorie de la déformation des surfaces*, p 99.

Si l'on veut de même obtenir toutes les surfaces minima applicables sur une surface spirale, il faudra prendre [1]

$$(28) \qquad \mathcal{F}(u) = C u^{m+ni}, \qquad \mathcal{F}_1(u_1) = C_1 u_1^{m-ni};$$

l'application de la méthode précédente conduit, sans difficulté, à ce résultat que nous nous contentons de signaler. Le lecteur démontrera sans difficulté que les surfaces obtenues sont semblables à celles qui leur sont *associées*.

---

[1] S. Lie, *Beiträge zur Theorie de Minimalflächen* (*Mathematische Annalen*, t. XV, 1879, p. 503).

CHAPITRE VI.

LES FORMULES DE MONGE ET LEUR INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

Recherches de Lie. — Génération de toute surface minima pour la translation de deux courbes minima. — Étude de ce mode de génération, détermination nouvelle des surfaces algébriques et des surfaces réelles. — Surfaces minima doubles. — Détermination des surfaces doubles réelles. — Courbes minima qui sont identiques à leurs conjuguées. — Les surfaces minima dans le premier système de coordonnées tangentielles étudié au Livre II, Chap. VII. — Propriété géométrique qui distingue les surfaces doubles des surfaces simples. — Surfaces découvertes par Möbius et dans lesquelles on peut passer d'une face à l'autre par un chemin continu.

---

218. Les Chapitres précédents contiennent l'exposition d'une série de résultats qui reposent sur la forme particulière donnée aux formules de Monge par Weierstrass. Dans ses travaux plus récents ([1]), Lie est revenu aux équations de Monge; il en a donné l'interprétation géométrique la plus élégante et il a mis en évidence tout le parti que l'on peut en tirer dans l'étude et dans la théorie algébrique des surfaces minima. Nous allons développer, dans ce Chapitre, les principes de la méthode de Lie.

Reprenons les formules de Monge

$$(1)\qquad \begin{cases} x = A(t) + A_1(\tau), \\ y = B(t) + B_1(\tau), \\ z = C(t) + C_1(\tau), \end{cases}$$

où les fonctions A, ..., A_1, ... satisfont aux conditions

$$(2)\qquad \begin{cases} dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0, \\ dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2 = 0. \end{cases}$$

([1]) S. Lie, *Beitrage zur Theorie der Minimalflächen : I. Projectivische Untersuchangen über algebraische Minimalflächen* (*Mathematische Annalen*, t. XIV, 1878, p. 331). — II. *Metrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen*, même Recueil, (t. XV, 1879, p. 465). Les recherches de Lie avaient déjà été publiées en partie dans les *Archiv. for Mathematik og Naturvidenskab* (t. II, 1877, p. 157 et 338; t. III, p. 166, 224 et 340).

Elles nous montrent immédiatement que les surfaces minima sont des cas particuliers des surfaces de translation; seulement les courbes dont la translation engendre la surface sont ici imaginaires et leurs tangentes vont rencontrer le cercle de l'infini. Nous obtenons ainsi la génération suivante des surfaces minima, qui sert de base aux travaux de Lie :

La surface minima la plus générale peut être engendrée de deux manières différentes par la translation d'une courbe imaginaire dont les tangentes vont rencontrer le cercle de l'infini, le déplacement étant complètement défini par la condition qu'un point determiné de la courbe décrive une autre courbe quelconque de même définition que la première.

219. Cette interprétation évidente des formules de Monge offre l'avantage de montrer immédiatement que la théorie des surfaces minima dérive de celle des courbes dont les tangentes vont rencontrer le cercle de l'infini et auxquelles nous donnerons, avec Lie, le nom de *courbes minima*. En se plaçant à ce point de vue, on peut retrouver facilement les différents systèmes de formules qui ne contiennent aucun signe de quadrature et déterminent les points d'une surface minima.

En effet, puisque les tangentes d'une courbe minima rencontrent le cercle de l'infini, la développable qui est l'enveloppe des plans osculateurs de cette courbe devra contenir le cercle de l'infini.

Si l'on prend l'équation d'un plan tangent à cette développable sous la forme

$$x + \alpha y + i\sqrt{1+\alpha^2}\, z + f(\alpha) = 0,$$

le point correspondant de la courbe minima sera déterminé par les formules suivantes :

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha) + f''(\alpha)(1+\alpha^2), \\ y = -f'(\alpha) + \alpha f''(\alpha)(1+\alpha^2), \\ z = i f''(\alpha)(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

qui conduiraient aux équations de Legendre (n° 187).

Mais, le cercle de l'infini étant une courbe unicursale, on peut

prendre l'équation du plan tangent à la développable sous la forme rationnelle

$$(4) \qquad (1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2f(u) = 0,$$

qui donne, pour un point de l'arête de rebroussement, les expressions suivantes des coordonnées :

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1-u^2}{2} f''(u) + uf'(u) - f(u), \\ y = i\dfrac{1+u^2}{2} f''(u) - iuf'(u) + if(u), \\ z = uf''(u) - f'(u). \end{cases}$$

Si l'on associe ce système au système analogue où l'on changera i en $-i$, on retrouvera les formules de Weierstrass. Les deux courbes minima qui interviennent dans ces formules sont les arêtes de rebroussement des deux développables, enveloppes des plans

$$(6) \qquad \begin{cases} (1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2u\,z + 2f\,(u) = 0, \\ (1-u_1^2)x - i(1+u_1^2)y + 2u_1 z + 2f_1(u_1) = 0. \end{cases}$$

220. Revenons aux équations qui déterminent la surface minima sous leur forme la plus générale et au mode de génération employé par Lie. Si l'on veut éviter la considération d'une translation imaginaire, il suffira d'appliquer le théorème donné au n° 82; ce qui conduit à la proposition suivante :

Soient les deux courbes minima (Γ), (Γ_1), *définies respectivement par les équations*

$$\begin{aligned} x &= 2A(t), & x &= 2A_1(\tau), \\ y &= 2B(t), & y &= 2B_1(\tau), \\ z &= 2C(t), & z &= 2C_1(\tau). \end{aligned}$$

Le milieu de la droite qui joint un point quelconque de l'une à un point quelconque de l'autre décrit la surface minima la plus générale définie par les formules (1).

La surface demeurera la même si l'on substitue à (Γ), (Γ_1), les

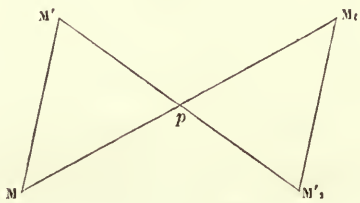
deux courbes suivantes :

$$x = 2A(t) + h, \qquad x = 2A_1(\tau) - h,$$
$$y = 2B(t) + k, \qquad y = 2B_1(\tau) - k,$$
$$z = 2C(t) + l, \qquad z = 2C_1(\tau) - l,$$

où h, k, l désignent trois constantes quelconques, c'est-à-dire si l'on imprime à la courbe (L) une translation déterminée quelconque, à la condition d'imprimer à (Γ_1) la translation égale et contraire.

Soit MM_1 (*fig.* 12) une droite dont les extrémités s'appuient sur les courbes (Γ), (Γ_1). Si le point M reste fixe, le milieu p de MM_1 décrira une courbe minima de la surface, homothétique à (Γ_1), le rapport de similitude étant $\frac{1}{2}$. Si, au contraire, le point M_1 reste fixe, le point P décrira une autre courbe minima homothétique à (Γ). Cette simple remarque, qui a déjà été présentée d'une

Fig. 12.



manière générale au n° 82, suffit à montrer que, si l'on a obtenu deux générations différentes de la surface au moyen de deux courbes (Γ), (Γ_1) et de deux autres courbes minima (Γ'_1), (Γ'_1), ces dernières ne sont autres que les précédentes déplacées parallèlement à elles-mêmes. Soient, en effet, MM_1, $M'M'_1$ deux droites appartenant aux deux modes différents et ayant leur milieu en un même point p de la surface. Si le point p décrit une des courbes minima de la surface, l'un des points M, M_1 et l'un des points M', M'_1 demeureront fixes. Supposons que ce soient les points M et M'. La droite $M_1M'_1$ demeurera constamment égale et parallèle à $M'M$. Par conséquent, la courbe (Γ'_1) se déduira de (Γ_1) par une translation constante et égale à $M'M$. Si le point p décrit maintenant l'autre courbe minima de la surface, M_1 et M'_1 demeureront fixes et la ligne $M'M$ demeurera constante en grandeur et en direction.

On voit donc que, si l'on a obtenu un mode de génération de la surface, on obtiendra tous les autres en imprimant aux deux courbes (Γ), (Γ_1) deux translations égales et opposées.

Le résultat précédent joue un rôle essentiel dans les développements qui vont suivre. Il permet en particulier de résoudre la question suivante :

Considérons un mode de génération de la surface, obtenu au moyen de deux courbes (Γ), (Γ_1). Est-il possible que les différents points de la surface soient donnés de plusieurs manières par cette génération, c'est-à-dire soient les milieux de deux ou plusieurs segments appuyant leurs extrémités sur ces deux courbes?

S'il en est ainsi, soient MM_1, $M'M'_1$ (*fig.* 12) deux droites donnant le même point p de la surface. La trajectoire de l'un des points M', M'_1, du point M' par exemple, se déduit de la trajectoire (Γ) du point M par une translation constante MM'. Cela posé, si le point M' appartient à la courbe (Γ_1), cette courbe devra dériver de (Γ) par une simple translation. Écartons ce cas intéressant qui sera soumis plus loin à une étude approfondie. Si, au contraire, le point M' appartient à la courbe (Γ), le point M'_1 appartiendra à (Γ_1) et les deux courbes (Γ), (Γ_1) pourront être soumises à deux translations égales et contraires MM', $M_1M'_1$, sans cesser de coïncider avec elles-mêmes. Elles seront deux courbes *périodiques* et, par conséquent, transcendantes, admettant la même période [1].

Réciproquement, toutes les fois que les courbes seront périodiques et admettront la même période, chaque point de la surface sera le milieu d'une infinité de segments. Car soient M_0, N_0 deux points pris respectivement sur les deux courbes : en appliquant dans les deux sens la translation à laquelle on peut soumettre les courbes, on en déduira deux séries de points en ligne droite (*fig.* 13)

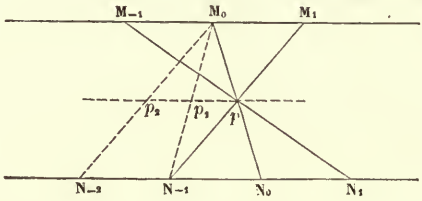
$$\begin{array}{cccccccc} \ldots, & M_{-2}, & M_{-1}, & M_0, & M_1, & M_2, & \ldots, \\ \ldots, & N_{-2}, & N_{-1}, & N_0, & N_1, & N_1, & \ldots. \end{array}$$

Les segments M_0N_0, M_1N_{-1}, $M_{-1}N_1$, ... auront évidemment le

(1) Nous donnerons ici, et dans la suite, le nom de *périodiques* aux courbes ou aux surfaces, nécessairement transcendantes, qui ne cessent de coïncider avec elles-mêmes quand on leur imprime une translation déterminée.

même milieu et donneront le même point de la surface. La considération des cordes M_0N_{-1}, M_0N_{-2} montre d'ailleurs que la surface minima sera périodique comme les courbes, et la translation pp_1 à laquelle on peut la soumettre sera la moitié de celle qui convient aux deux courbes.

Fig. 13.



En dehors du cas que nous venons de signaler et de celui où la courbe (Γ_1) n'est autre que la courbe (Γ) déplacée parallèlement à elle-même, les points de la surface qui sont les milieux de deux segments différents ne pourront s'étendre sur une nappe et formeront tout au plus une ou plusieurs courbes qui seront des lignes multiples et, en général, des lignes doubles de la surface.

221. Après avoir étudié d'une manière générale la construction géométrique qui sert de base aux travaux de Lie, proposons-nous d'obtenir toutes les surfaces algébriques et toutes les surfaces réelles. La surface sera évidemment algébrique si les deux courbes (K), (K_1), dont la translation peut engendrer la surface, sont elles-mêmes algébriques. Réciproquement, si la surface est algébrique, ces deux courbes doivent l'être aussi. Soient, en effet, (k), (k') deux positions de l'une d'elles. Il existe une translation qui amène (k) en (k'). Appliquée à la surface, cette translation l'amène dans une position nouvelle où elle contiendra encore (k'). La courbe (k'), étant l'intersection complète, ou une partie de l'intersection, de deux surfaces algébriques, sera nécessairement algébrique. Ainsi :

Pour obtenir toutes les surfaces algébriques, il faudra prendre pour les courbes (Γ), (Γ_1), *ou pour les courbes* (K), (K_1) *dont la translation engendre la surface, deux lignes algébriques.*

222. Proposons-nous maintenant d'obtenir toutes les surfaces réelles; désignons par (M) une telle surface et soit p un quelconque de ses points réels; soient

$$x = A(t), \qquad y = B(t), \qquad z = C(t)$$

les équations qui définissent l'une des deux courbes minima de la surface passant par le point p. La courbe conjuguée, qui est aussi minima, sera définie par les équations

$$x = A'(\tau), \qquad y = B'(\tau), \qquad z = C'(\tau),$$

où A', B', C' désignent les fonctions conjuguées de A, B, C. D'ailleurs, elle se trouve évidemment sur la surface, passe par le point p et y admet une tangente qui est imaginaire conjuguée de la tangente à la première courbe. Elle est donc la seconde courbe minima de la surface passant par le point p. Ce résultat étant admis, désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point p; les équations

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A'(\tau) - x_0, \\ y &= B(t) + B'(\tau) - y_0, \\ z &= C(t) + C'(\tau) - z_0 \end{aligned}$$

déterminent une surface minima qui contient les deux courbes précédentes et coïncide, par conséquent, avec la surface donnée (M). Si l'on augmente A, A' de $\frac{x_0}{2}$, B, B' de $\frac{y_0}{2}$, C, C' de $\frac{z_0}{2}$, on peut les écrire sous la forme plus simple

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A'(\tau), \\ y &= B(t) + B'(\tau), \\ z &= C(t) + C'(\tau), \end{aligned}$$

A, A'; B, B'; C, C' désignant encore des fonctions imaginaires conjuguées. Réciproquement, il est évident que les formules précédentes donneront toujours une surface réelle; car il suffit, pour obtenir des points réels, d'y remplacer t et τ par des imaginaires conjuguées. Ainsi :

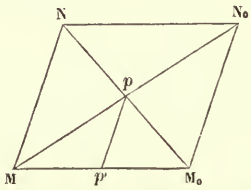
Pour obtenir toutes les surfaces réelles, on associera à une courbe minima quelconque la courbe imaginaire conjuguée, qui est aussi minima. Le milieu de la droite qui joint un point

quelconque de la première courbe au point imaginaire conjugué, nécessairement situé sur la deuxième courbe, décrira une nappe réelle de la surface minima réelle la plus générale.

223. Les raisonnements précédents laissent toutefois de côté une question dont l'examen offre quelque intérêt. Pour que le milieu de la droite qui joint deux points soit réel, il n'est pas nécessaire que les deux points soient imaginaires conjugués. Ne serait-il pas possible d'obtenir des nappes réelles en joignant les points de la première courbe à des points de la seconde qui ne seraient pas imaginaires conjugués des premiers? Les résultats obtenus au n° 220 donnent la réponse à cette question.

En effet, soient M un point pris sur la première courbe (Γ), N_0 un point pris sur la conjuguée (Γ′) (*fig.* 14), et soient M_0,

Fig. 14.



N les points imaginaires conjugués de M, N_0, le premier se trouvant sur la seconde courbe et le second sur la première. Si le milieu de la droite MN_0 est réel, il coïncidera avec le milieu de MN_0, et, par conséquent, chaque point de la nappe réelle étant obtenu de deux manières différentes, il faudra, d'après les résultats du n° 220, que l'une des droites MM_0, MN soit de grandeur et de direction constantes. Si cette propriété appartient à la droite MM_0, la courbe (Γ′) se déduira de (Γ) par une translation déterminée; nous avons déjà réservé (n° 220) cette hypothèse pour une discussion spéciale, et nous pouvons admettre ici que la droite dont la grandeur et la direction sont invariables est le segment MN. Comme la figure MNN_0M_0 est un parallélogramme, la droite MN est égale et parallèle à sa conjuguée M_0N_0 et elle est, par suite, de grandeur et de direction réelles. La courbe (Γ) sera donc une courbe périodique admettant une période réelle MN et il en sera de même de la courbe conjuguée (Γ′). La surface minima sera

aussi périodique et pourra être soumise à la translation réelle $\frac{MN}{2}$ sans cesser de coïncider avec elle-même. Quant au milieu p de MN_0, il se déduira du milieu p' de MM_0 par la même translation. Par suite, en joignant seulement les points imaginaires conjugués, M, M_0 par exemple, sur les deux courbes, on n'aura pas toute la partie réelle de la surface, mais on obtiendra du moins une portion de la surface dont on peut faire dériver toutes les autres en la soumettant à la translation $\frac{MN}{2}$.

224. Il nous reste à examiner l'hypothèse particulière, réservée dans les raisonnements qui précèdent, où les deux courbes (Γ), (Γ_1) peuvent se ramener l'une à l'autre par une simple translation. Cette étude nous conduira à la notion importante et nouvelle des surfaces doubles, qui est due tout entière à Lie.

Nous avons vu que l'on peut, dans la génération de la surface, substituer aux deux courbes (Γ), (Γ_1) deux autres courbes (Γ'), (Γ'_1) qui s'en déduisent respectivement par deux translations égales et opposées. D'après cela, si nous désignons par (d) la translation qui, dans le cas actuel, amène (Γ) à coïncider avec (Γ_1), nous pourrons imprimer à (Γ) la translation $\left(\frac{d}{2}\right)$ et à (Γ_1) la translation $-\left(\frac{d}{2}\right)$: nous obtiendrons ainsi une seule et même courbe (D) qui remplacera à la fois (Γ) et (Γ_1), en sorte que *la surface proposée deviendra le lieu des milieux de toutes les cordes de cette courbe minima* (D).

Réciproquement, si une surface admet la génération précédente au moyen de la courbe (D), il résulte de la proposition démontrée au n° 220 que l'on obtiendra tous les systèmes différents de courbes (Γ), (Γ_1) au moyen desquels on peut engendrer la surface en imprimant à la courbe (D) deux translations égales et opposées. Par suite, les courbes (Γ), (Γ_1) relatives à tout système de génération de la surface pourront toujours se déduire l'une de l'autre par une simple translation.

Revenons à la génération de la surface au moyen de la courbe unique (D); elle permet de reconnaître que les deux courbes minima dont la translation engendre la surface sont identiques l'une à l'autre. Si l'on considère, en effet, une corde MM_1 de la

courbe (D), les deux courbes minima de la surface passant par le milieu de cette corde sont les homothétiques de (D), avec le même rapport de similitude $\frac{1}{2}$, par rapport aux points M, M_1. Elles sont donc égales et peuvent être amenées à coïncider par une translation égale à $\frac{1}{2}MM_1$, imprimée à l'une d'elles. Nous pouvons ajouter que les deux séries de courbes minima tracées sur la surface ne peuvent plus être distinguées l'une de l'autre et forment *une seule famille, composée de toutes les courbes que l'on obtient en prenant les homothétiques de la courbe* (D) *par rapport à chacun de ses points.* Ces courbes sont évidemment tangentes à la courbe (D), chacune au centre d'homothétie qui lui correspond, et elles admettent cette courbe pour enveloppe. Mais, comme il en passe deux par chaque point de la surface, qui est ainsi engendrée deux fois, Lie a donné le nom de *surfaces doubles* à toutes les surfaces minima que nous étudions ici et qu'on peut caractériser, comme on le voit, en disant qu'elles sont le lieu des milieux des cordes d'une courbe minima (D).

Si la courbe (D) est définie par les équations

$$x = 2A(t), \qquad y = 2B(t), \qquad z = 2C(t),$$

la surface double correspondante le sera par le système

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A(\tau), \\ y &= B(t) + B(\tau), \\ z &= C(t) + C(\tau), \end{aligned}$$

où t et τ entrent symétriquement, en sorte que le même point de la surface correspond à deux systèmes différents de valeurs de t et de τ se déduisant l'un de l'autre par l'échange de ces deux variables.

225. La définition que nous avons adoptée permet de reconnaître qu'il existe des surfaces doubles réelles. Mais, pour faciliter cette recherche, nous commencerons par examiner s'il existe des surfaces doubles qui soient le lieu des milieux des cordes de deux courbes différentes (D), (D′).

Nous pouvons appliquer ici les résultats du n° 220 en considérant (Γ) et (Γ_1) comme confondues avec (D), (Γ') et (Γ'_1)

comme confondues avec (D′). Il faudra que (D) puisse se déduire de (D′) par deux translations égales et opposées et, par conséquent, que (D) soit une courbe périodique. Réciproquement, si la courbe (D) est périodique, soit (d) la translation à laquelle on peut la soumettre sans qu'elle cesse de coïncider avec elle-même. On reconnaîtra aisément qu'en lui imprimant une translation égale seulement à $\left(\frac{d}{2}\right)$, on obtient une nouvelle courbe (D′) qui donne la même surface que la première.

Un raisonnement analogue montrera que, si un point quelconque de la surface correspond à deux cordes différentes de la courbe (D), cette courbe est nécessairement périodique.

En dehors du cas exceptionnel où (D) est périodique, on peut donc affirmer qu'à chaque surface minima double correspond une seule courbe (D), et que les points de la surface qui sont les milieux de deux cordes ne peuvent former une nappe et se distribuent tout au plus sur certaines lignes, nécessairement multiples, de la surface.

Ce point étant établi, proposons-nous de trouver toutes les surfaces doubles réelles. Soit (D) la courbe au moyen de laquelle on peut engendrer la surface; on reconnaît immédiatement, en changeant i en $-i$, que la surface peut aussi être engendrée au moyen de la courbe imaginaire conjuguée (D′). Donc :

Pour que la surface minima double soit réelle, il est nécessaire que la courbe (D) *coïncide avec sa conjuguée, ou puisse, du moins, s'en déduire par une translation.*

Réciproquement, supposons que la condition énoncée soit remplie. Si la courbe coïncide avec sa conjuguée, elle contiendra, en même temps que le point imaginaire M, le point imaginaire conjugué M_0, et le milieu de la corde MM_0 décrira une nappe réelle.

Si, au contraire, la courbe (D) ne coïncide pas avec sa conjuguée (D′), mais peut s'en déduire par une translation, la surface double correspondante à la courbe (D) pourra, si elle est réelle, être engendrée aussi au moyen de la courbe (D′), et la remarque faite plus haut nous apprend qu'elle sera nécessairement transcendante et périodique. Nous sommes ainsi conduit au résultat suivant :

Pour obtenir toutes les surfaces doubles réelles non périodiques et, en particulier, toutes les surfaces doubles algébriques, il suffit de déterminer toutes les courbes minima qui sont identiques à leur conjuguée (¹).

226. On peut signaler d'abord une solution évidente du problème ainsi posé. Considérons la développable circonscrite à une surface réelle quelconque, transcendante ou algébrique, et au cercle imaginaire de l'infini. Cette développable sera, en général, indécomposable et, comme elle est définie par des équations réelles, son arête de rebroussement sera une courbe minima qui coïncidera avec sa conjuguée et donnera, par conséquent, naissance à une surface double réelle.

Soit

$$F(U, V, W, P) = 0 \tag{7}$$

l'équation tangentielle homogène d'une surface réelle quelconque.

(¹) On peut ajouter les remarques suivantes relatives au cas où la courbe (D) peut être amenée par une translation à coïncider avec sa conjuguée. Si la translation qui amène (D) en coïncidence avec (D′) est réelle, la surface minima correspondante le sera aussi. Soient, en effet, a, b, c les quantités réelles qui sont les composantes de la translation. A un point $M(x, y, z)$ de (D) correspond un point N de (D′) dont les coordonnées sont

$$x + a, \quad y + b, \quad z + c.$$

Le point N′, imaginaire conjugué de ce point, se trouvera évidemment sur la courbe (D) conjuguée de (D′) et il aura pour coordonnées

$$x_0 + a, \quad y_0 + b, \quad z_0 + c,$$

x_0, y_0, z_0 désignant les quantités conjuguées de x, y, z. Il suit de là que le milieu de la droite MN′, qui est une corde de (D), sera réel et décrira une nappe réelle de la surface.

Si la translation qui amène (D) sur (D′) est imaginaire, la surface ne sera pas nécessairement réelle. Considérons, par exemple, la courbe (D) définie par les équations

$$x = i \cos t, \qquad y = i \sin t, \qquad z = t + \beta i,$$

où β désigne une constante réelle. Cette hélice peut être amenée à coïncider avec sa conjuguée par une translation $\pi - 2\beta i$ parallèle à l'axe des z. La surface lieu des milieux de ses cordes n'est réelle que si la constante β est nulle.

L'équation d'un plan tangent au cercle de l'infini est

$$(8) \qquad (1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2\xi = 0.$$

Exprimons que ce plan est aussi tangent à la surface; nous aurons l'équation

$$(9) \qquad F[1-u^2,\ i(1+u^2),\ 2u,\ 2\xi] = 0,$$

ou plus simplement, en tenant compte de l'homogénéité,

$$(10) \qquad \Phi\left[\frac{1}{u} - u,\ i\left(\frac{1}{u} + u\right),\ \frac{\xi}{u}\right] = 0,$$

le symbole Φ désignant une fonction réelle quelconque. La valeur de ξ tirée de cette équation sera la fonction $f(u)$ qui figure dans les formules (5). En changeant i en $-i$, on aura la fonction conjuguée $f_1(u_1)$ et la surface minima correspondante sera pleinement déterminée.

Supposons, par exemple, que l'on considère la développable circonscrite à la fois au cercle de l'infini et à la parabole dont l'équation tangentielle est

$$U^2 = WP.$$

On aura ici

$$4uf(u) = (1-u^2)^2$$

et, par conséquent,

$$(11) \qquad f(u) = \frac{(1-u^2)^2}{4u} = f_1(u).$$

En substituant ces valeurs dans les formules (18) (n° 188), on aurait les équations qui déterminent la surface. C'est la plus simple des surfaces minima doubles; elle a été découverte par M. L. Henneberg [1]. Nous la retrouverons plus loin.

227. On peut se placer à un autre point de vue dans la recherche des surfaces doubles et se demander, par exemple, à

---

[1] L. Henneberg, *Ueber solche Minimalflächen welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben.* Zürich, 1875.

Ueber diejenige Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur geodätischen Linie hat (*Vierteljahrschrift der Zürcher Naturf. Ges.*, t. XXI).

Bestimmung der niedrigsten Classenzahl der algebraischen Minimalflächen (*Annali di Matematica*, 2e série, t. IX, 1877, p. 54).

quelle condition doivent satisfaire, si la surface est double, les fonctions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ de Weierstrass. Si nous considérons les deux courbes

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int (1-u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du,\\ y &= \frac{i}{2}\int (1+u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du,\\ z &= \int u\,\mathcal{F}(u)\,du,\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int (1-u_1^2)\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,\\ y &= -\frac{i}{2}\int (1+u_1^2)\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,\\ z &= \int u_1\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,\end{aligned}\right.$$

dont la translation engendre la surface, il faut exprimer que l'une d'elles se déduit de l'autre par une simple translation, c'est-à-dire qu'on peut prendre pour u_1 une fonction de u permettant de satisfaire aux relations

$$\begin{aligned} (1-u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du &= (1-u_1^2)\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,\\ i(1+u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du &= -i(1+u_1^2)\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,\\ u\,\mathcal{F}(u)\,du &= u_1\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1.\end{aligned}$$

En divisant membre à membre, on trouve les deux égalités

$$\frac{1-u^2}{1-u_1^2} = -\frac{1+u^2}{1+u_1^2} = \frac{u}{u_1},$$

qui donnent

$$u_1 = -\frac{1}{u}.$$

Si l'on porte cette valeur de u_1 dans l'une quelconque des équations précédentes, on obtient la relation

$$\mathcal{F}_1(u_1)\,u_1^2 = -u^2\,\mathcal{F}(u), \tag{12}$$

qu'on peut mettre aussi sous la forme

$$\mathcal{F}(u) = -\frac{1}{u^4}\,\mathcal{F}_1\left(-\frac{1}{u}\right).$$

C'est la condition cherchée, et le raisonnement prouve bien qu'elle est suffisante.

Si l'on applique un raisonnement analogue au cas où les deux courbes sont définies par leurs plans osculateurs

$$\begin{aligned} (1+u^2)x + i(1+u^2)y + 2u\,z + 2f(u) &= 0,\\ (1-u_1^2)x - i(1+u_1^2)y + 2u_1 z + 2f_1(u_1) &= 0,\end{aligned}$$

on trouvera, *en exprimant que ces deux plans coïncident*, les relations

$$(13) \qquad u_1 = -\frac{1}{u}, \qquad \frac{f(u)}{u} = \frac{f_1(u_1)}{u_1}.$$

Le problème de la recherche des surfaces doubles est ainsi complètement résolu.

228. Si l'on veut que la surface double soit réelle, il faudra que les deux fonctions f et f_1 ou $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ soient conjuguées. On est ainsi conduit à une équation fonctionnelle dont la solution est d'ailleurs très facile.

Posons, en effet,

$$\frac{f(u)}{u} = \Theta(u),$$

et désignons par $\Theta_1(u)$ la fonction conjuguée de $\Theta(u)$. On devra avoir

$$\Theta(u) = \Theta_1\left(-\frac{1}{u}\right).$$

Mettons en évidence la partie réelle $P(u)$ et la partie imaginaire $iQ(u)$ de la fonction Θ. Nous aurons

$$P(u) = \quad P\left(-\frac{1}{u}\right),$$

$$Q(u) = -Q\left(-\frac{1}{u}\right)$$

et, par conséquent,

$$P(u) = p(u) + p\left(-\frac{1}{u}\right),$$

$$Q(u) = q(u) - q\left(-\frac{1}{u}\right),$$

les symboles p et q désignant des fonctions réelles, d'ailleurs quelconques. On déduit de là, pour $\Theta(u)$, l'expression

$$\Theta(u) = p(u) + p\left(-\frac{1}{u}\right) + iq(u) - iq\left(-\frac{1}{u}\right)$$

ou, plus simplement,

$$(14) \qquad \frac{f(u)}{u} = \Theta(u) = \varphi(u) + \varphi_1\left(-\frac{1}{u}\right),$$

φ désignant une fonction imaginaire quelconque $p(u)+iq(u)$ et φ_1 la fonction conjuguée de φ.

On trouverait de même pour $\mathcal{F}(u)$ l'expression analogue

$$(15)\qquad u^2\mathcal{F}(u)=\varphi(u)-\varphi_1\left(-\frac{1}{u}\right).$$

En s'appuyant sur les résultats précédents, on peut démontrer que le procédé indiqué au n° 226 donne la courbe minima la plus générale coïncidant avec sa conjuguée. Prenons, en effet, l'équation du plan osculateur de cette courbe sous la forme

$$x\left(u-\frac{1}{u}\right)+iy\left(u+\frac{1}{u}\right)+2z+2\varphi(u)+\varphi_1\left(-\frac{1}{u}\right)=0,$$

où l'on a remplacé $f(u)$ par sa valeur tirée de l'équation (14). En identifiant l'équation précédente avec celle d'un plan quelconque

$$Ux+Vy+Wz+P=0,$$

on trouve

$$\frac{U+iV}{2W}=-\frac{1}{u},\qquad \frac{U-iV}{2W}=u,\qquad \frac{P}{W}=\varphi(u)+\varphi_1\left(-\frac{1}{u}\right)$$

et, par conséquent,

$$\frac{P}{W}=\varphi\left(\frac{U-iV}{W}\right)+\varphi_1\left(\frac{U+iV}{W}\right).$$

Cette équation définit évidemment une surface réelle à laquelle sera circonscrite la développable qui est l'enveloppe des plans osculateurs de la courbe considérée.

229. Jusqu'ici nous avons employé les formules de Weierstrass, qui sont parfaitement appropriées à l'étude des surfaces réelles. Dans la théorie des surfaces doubles, où il s'agit de comparer les deux courbes minima dont la translation engendre la surface, il sera avantageux de représenter les deux courbes minima de la même manière et de les considérer respectivement comme les enveloppes des deux plans

$$(1-u^2)x+i(1+u^2)y+2u\,z+2f(u)=0,$$
$$(1-u_1^2)x+i(1+u_1^2)y+2u_1z+2f_1(u_1)=0.$$

Alors, les deux plans seront parallèles si l'on a $u_1 = u$, et les deux courbes seront identiques si l'on a

$$f_1(u) = f(u).$$

Les formules qui définissent un point de la surface seront les suivantes [1] :

$$(16)\quad \begin{cases} x = \dfrac{1-u_2}{2} f''(u) + u f'(u) - f(u) \\ \qquad + \dfrac{1-u_1^2}{2} f''_1(u_1) + u_1 f'_1(u_1) - f_1(u_1), \\ y = i\dfrac{1+u^2}{2} f''(u) - iu f'(u) + i f(u) \\ \qquad + i\dfrac{1+u_1^2}{2} f''_1(u_1) - iu_1 f'_1(u_1) + i f_1(u_1), \\ z = u f''(u) - f'(u) + u_1 f''_1(u_1) - f'_1(u_1), \end{cases}$$

et le plan tangent aura pour équation

$$(17)\qquad (1 - uu_1)X + i(1 + uu_1)Y + (u + u_1)Z + \xi = 0,$$

ξ ayant pour valeur

$$(18)\qquad \xi = 2f(u) + 2f_1(u_1) - (u - u_1)[f'(u) - f'_1(u_1)].$$

C'est l'équation de la surface écrite dans le système (α, β, ξ) qui a été défini et étudié aux n°s 164, 166. Elle se prête de la manière la plus simple à l'étude des surfaces doubles.

Dans ce cas, nous venons de le voir, on aura

$$(19)\qquad f(u) = f_1(u)$$

et, par conséquent, ξ sera une fonction symétrique de u et de u_1.

Réciproquement, exprimons que ξ est une fonction symétrique de u et de u_1. Nous devrons avoir

$$\begin{aligned} &2f(u) + 2f_1(u_1) - (u - u_1)[f'(u) - f'_1(u_1)] \\ &= 2f(u_1) + 2f_1(u) - (u - u_1)[f'_1(u) - f'(u_1)]. \end{aligned}$$

Posons

$$f(u) - f_1(u) = 2\theta(u),$$

---

[1] Ces formules sont, aux notations près, celles qui ont été données par Björling dans le Mémoire analysé plus haut (n° 182).

l'équation précédente ne contiendra plus que $\theta(u)$ et deviendra

$$2\theta(u) - 2\theta(u_1) - (u - u_1)[\theta'(u) + \theta'(u_1)] = 0.$$

La seule fonction satisfaisant à cette équation est un polynome du second degré, mais il est inutile de la rechercher. Car, si l'on introduit la notation

$$f(\alpha) - \theta(\alpha) = f_1(\alpha) + \theta(\alpha) = \varphi(\alpha),$$

l'expression de ξ devient

$$\xi = 2\varphi(u) + 2\varphi(u_1) - (u - u_1)[\varphi'(u) - \varphi'(u_1)],$$

et nous trouvons l'équation tangentielle d'une surface double, qui correspond à la fonction $\varphi(u)$. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si l'on emploie le système de coordonnées tangentielles dans lequel on écrit l'équation d'un plan sous la forme

$$(20) \qquad (1 - \alpha\beta)X + i(1 + \alpha\beta)Y + (\alpha + \beta)Z + \xi = 0,$$

l'équation tangentielle des surfaces minima sera

$$(21) \qquad \xi = 2f(\alpha) + 2f_1(\beta) - (\alpha - \beta)[f'(\alpha) - f'_1(\beta)].$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface soit double est que ξ soit une fonction symétrique de α et de β.

230. Nous sommes ainsi conduits à étudier d'une manière générale la distinction qu'on doit établir entre les surfaces dont l'équation tangentielle est symétrique par rapport à α et à β, et celles dont l'équation n'est pas symétrique par rapport à ces variables.

Envisageons une surface algébrique quelconque, représentée par l'équation tangentielle indécomposable

$$(22) \qquad F(U, V, W, P) = 0;$$

si l'on y remplace U, V, W, P par leurs expressions en α, β, ξ, on aura l'équation

$$(23) \qquad F[1 - \alpha\beta, i(1 + \alpha\beta), \alpha + \beta, \xi] = 0,$$

qui est symétrique en α et β. Mais il peut arriver que, l'équa-

tion (22) étant indécomposable, il n'en soit pas de même de la précédente.

Supposons, en effet, que l'équation (22) se présente sous la forme

$$(24)\qquad f^2(U, V, W, P) - (U^2 + V^2 + W^2)\varphi^2(U, V, W, P) = 0,$$

l'équation (23) deviendra

$$f_1^2(\alpha, \beta, \xi) - (\alpha - \beta)^2\varphi_1^2(\alpha, \beta, \xi) = 0$$

et se décomposera dans les deux suivantes

$$f_1(\alpha, \beta, \xi) - (\alpha - \beta)\varphi_1(\alpha, \beta, \xi) = 0,$$
$$f_1(\alpha, \beta, \xi) + (\alpha - \beta)\varphi_1(\alpha, \beta, \xi) = 0,$$

qui ne sont plus symétriques, mais qui se ramènent l'une à l'autre quand on échange α et β. Elles donnent, l'une et l'autre, tous les plans tangents de la surface, mais avec des sens opposés pour la normale.

Réciproquement, considérons une surface définie par l'équation

$$(25)\qquad f(\alpha, \beta, \xi) = 0,$$

irréductible par rapport à ξ. Si cette équation n'est pas symétrique par rapport à α, β, on sera conduit, avec les variables U, V, W, P, à une équation tangentielle de la forme (24) qui permettra d'exprimer le radical $\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$ en fonction rationnelle de U, V, W, P ou, ce qui est la même chose, des coordonnées du point de contact.

Si, au contraire, l'équation (25) est symétrique par rapport à α et à β, il sera impossible d'exprimer rationnellement le radical en fonction de U, V, W, P. Si l'on avait, en effet,

$$(26)\qquad \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} = \frac{f(U, V, W, P)}{\varphi(U, V, W, P)},$$

nous trouverions, en remplaçant U, V, W, P en fonction de α, β, ξ,

$$(\alpha - \beta)\varphi_1(\alpha, \beta, \xi) = \pm f_1(\alpha, \beta, \xi),$$

f_1 et φ_1 étant symétriques en α et β. Or, il est impossible que cette équation soit vérifiée par les valeurs de ξ racines de l'équation irréductible proposée, à moins que ces racines n'annulent à

la fois f_1 et φ_1. Alors, la valeur du radical donnée par l'équation (26) se présenterait constamment sous la forme $\frac{0}{0}$, et cette équation n'aurait aucun sens.

En appliquant ces remarques aux surfaces minima, nous obtenons la proposition suivante :

Pour qu'une surface minima soit simple, il faut et il suffit que son équation tangentielle puisse être ramenée à la forme (24); *si elle est déterminée par une équation en coordonnées ponctuelles*

$$f(x, y, z) = 0,$$

il faut et il suffit que les deux déterminations du radical

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

soient des fonctions distinctes l'une de l'autre, c'est-à-dire que le radical soit un carré parfait.

Considérons, par exemple, la caténoïde, qui est définie par l'équation

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)^2.$$

On a ici

$$\Delta = \pm\sqrt{4x^2 + 4y^2 + \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2z}{a}} - e^{-\frac{2z}{a}}\right)^2} = \pm\frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)^2.$$

La caténoïde est donc une surface simple.

Nous pouvons maintenant compléter les remarques présentées au n° 192 sur la représentation d'une surface minima par les formules de Weierstrass. Bornons-nous, pour plus de netteté, aux surfaces réelles. Nous avons vu qu'à une même surface on peut faire correspondre deux fonctions différentes

$$\mathcal{F}(u) \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{u_4}\mathcal{F}_1\left(\frac{-1}{u}\right).$$

Les résultats obtenus au n° 227 nous montrent que ces deux fonctions ne seront pas distinctes, dans le cas des surfaces doubles, ou plutôt, ce seront deux branches différentes d'une même fonction. Si, au contraire, la surface est simple, ces deux fonctions seront

irréductibles l'une à l'autre, et nous aurons deux fonctions différentes d'une même variable imaginaire, se rapportant à la même surface. Ces deux fonctions correspondront aux deux courbes minima distinctes dont la translation peut engendrer la surface.

231. C'est ici le lieu de présenter quelques remarques sur les surfaces dont l'équation tangentielle est de la forme

$$\varphi^2 - (U^2 + V^2 + W^2)\psi^2 = 0.$$

Le radical $\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$ étant une fonction rationnelle de U, V, W, P et, par conséquent, des coordonnées du point de contact, on voit qu'il est possible d'attribuer aux normales en tous les points de ces surfaces un sens bien déterminé. Si l'on prend, par exemple,

$$\frac{U\psi}{\varphi}, \quad \frac{V\psi}{\varphi}, \quad \frac{W\psi}{\varphi}$$

pour les cosinus directeurs de chaque normale, et si l'on décrit sur la surface un chemin quelconque pour revenir au point de départ, on y reviendra toujours avec les mêmes valeurs pour les cosinus directeurs. En d'autres termes, *il sera possible de distinguer analytiquement deux côtés de la surface.* C'est ce qui arrive, par exemple, dans le cas de la sphère ou dans celui de la surface de quatrième classe déjà considérée au n° 159.

Supposons, au contraire, qu'il soit impossible d'obtenir pour $\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$ une expression rationnelle en fonction des coordonnées, soit ponctuelles, soit tangentielles; les cosinus directeurs de la normale,

$$\frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}, \quad \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}, \quad \frac{W}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}},$$

changeront certainement de signe lorsqu'on suivra sur la surface un chemin *réel* ou *imaginaire* convenablement choisi. Seulement il y a lieu, dans ce cas encore, de faire une distinction très essentielle. Pour certaines surfaces telles que l'ellipsoïde, le paraboloïde, les hyperboloïdes, si l'on revient au point de départ après avoir parcouru un chemin *réel* quelconque, on retrouvera toujours le même sens pour la normale. En d'autres termes, si

l'on imagine une petite sphère parcourant le chemin considéré, elle se trouvera, au retour, du même côté de la surface qu'au départ. Möbius a remarqué le premier qu'il existe un grand nombre de surfaces telles que le sens de la normale se trouve changé quand on revient au point de départ après avoir parcouru un chemin réel convenablement choisi. Bornons-nous, pour plus de simplicité, à considérer les surfaces algébriques. Il faut évidemment, pour que la circonstance précédente se présente, que la surface ait des lignes multiples réelles.

Considérons, en effet, la surface parallèle à la proposée, obtenue en portant sur les normales des longueurs infiniment petites égales à μ. Tant que $\sqrt{U^2+V^2+W^2}$ ne sera pas un carré parfait, les deux nappes dont se compose cette surface ne constitueront analytiquement qu'une seule surface et, si l'on considère les deux points m, m', situés sur la normale en un point M de la surface donnée, il sera toujours possible de suivre sur la surface parallèle un chemin, réel ou imaginaire, qui conduise de m à m'. Mais, si ce chemin est entièrement réel, la fonction

$$\varphi(x, y, z),$$

qui, égalée à zéro, donne l'équation de la surface proposée, aura évidemment changé de signe quand on passera de m à m'. Comme ce chemin est parallèle à une nappe de la surface, il faudra nécessairement qu'il en traverse au moins une autre et, par conséquent, que la surface proposée ait une ligne multiple ou, au moins, un point multiple.

Il est remarquable que la surface la plus simple possédant une ligne multiple jouisse de la propriété singulière que nous étudions ici. Cette surface est la surface réglée du troisième ordre dont nous indiquons ici la forme (*fig.* 15). Si l'on part du point m en suivant le chemin $mklpsrm$, on reviendra au point de départ après avoir changé de côté [1].

A cet exemple si simple d'une surface réelle *n'ayant pas de côté* on peut en ajouter beaucoup d'autres, très généraux.

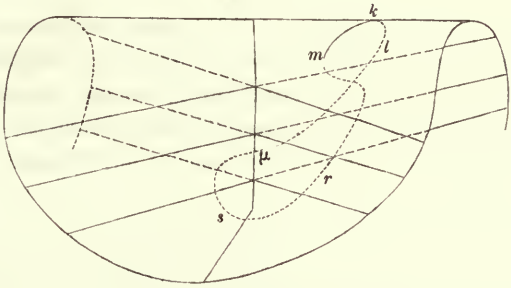
---

[1] Cet exemple nous avait été indiqué par H. S. Smith, professeur Savilien à Oxford, dont les géomètres déplorent la mort prématurée. La figure se rapporte à la surface réglée du troisième ordre dont l'équation est

$$x^2(1-z) = zy^2.$$

Prenons, par exemple, une courbe fermée réelle (K) choisie de telle manière qu'elle admette seulement un nombre limité de couples de tangentes parallèles. Si l'on part d'un point quelconque A de cette courbe avec un sens déterminé pour la tangente, la loi de continuité déterminera le sens de cette droite pour tous les autres

Fig. 15.



points de la courbe. Par conséquent, si x, y, z sont les coordonnées d'un point de la courbe, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ seront des fonctions parfaitement déterminées en chaque point réel de la courbe. Soient maintenant M, M′ deux points quelconques de la courbe et prenons le lieu des milieux de la corde MM′. La normale au point milieu de MM′ aura pour cosinus directeurs

$$\frac{\frac{dy}{ds}\frac{dz'}{ds'} - \frac{dz}{ds}\frac{dy'}{ds'}}{\Delta}, \quad \frac{\frac{dz}{ds}\frac{dx'}{ds'} - \frac{dx}{ds}\frac{dz'}{ds'}}{\Delta}, \quad \frac{\frac{dx}{ds}\frac{dy'}{ds'} - \frac{dy}{ds}\frac{dx'}{ds'}}{\Delta},$$

Δ désignant la quantité

$$\Delta = \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right)^2},$$

que nous prendrons, par exemple, avec le signe +. Faisons maintenant tourner la corde MM′ de manière que M vienne en M′ et M′ en M, mais en évitant, ce qui est toujours possible, la coïncidence de M et de M′, et aussi les positions de la corde en nombre limité, pour lesquelles les tangentes en M et en M′ sont parallèles. Nous suivrons sur la surface lieu des milieux un chemin réel pour chaque point duquel le plan tangent sera bien déterminé et, quand nous reviendrons au point de départ, l'échange de M et

de M′ aura fait changer le signe des cosinus directeurs de la normale [1].

232. Considérons maintenant une surface minima double *algébrique, ou du moins non périodique*, et soit

$$(1-u^2)x+i(1+u^2)y+2uz+2f(u)=0$$

l'équation du plan osculateur de la courbe minima au moyen de laquelle s'engendre la surface. Soient M, M_1 deux points de cette courbe. Le milieu m de la corde MM_1 décrira la surface considérée. Soient u et u_1 les valeurs du paramètre u relatives aux points M et M_1. Les cosinus directeurs de la normale en m auront pour expressions

$$\frac{1-uu_1}{u-u_1},\quad i\frac{1+uu_1}{u-u_1},\quad \frac{u+u_1}{u-u_1},$$

et ils ne seront réels (n° 15) que si l'on a

$$u_1=-\frac{1}{u'};$$

u' étant l'imaginaire conjuguée de u. De plus, dans le cas qui nous occupe, où la surface n'est pas périodique, il faudra, pour que le point m de la surface soit réel, qu'on associe à la détermination $f_0(u)$ de $f(u)$, relative au point M, une détermination $f_0(u_1)$ de $f(u_1)$ complètement définie par cette condition que le point M_1 soit imaginaire conjugué de M. Ainsi, à chaque système de valeurs de u et de $f(u)$ correspond un point réel de la surface et un seul.

Faisons maintenant varier u de telle manière qu'il devienne égal à u_1, et choisissons, en outre, pour cette variable complexe, un chemin tel que la détermination primitive $f_0(u)$ de $f(u)$ devienne égale à la détermination primitive $f_0(u_1)$ de $f(u_1)$. Le point M de la courbe minima sera venu coïncider avec le point imaginaire conjugué M_1 et, par conséquent, le point M_1 sera venu en M. On

---

[1] On rapprochera les remarques que nous avons présentées dans cet article de celles que Laguerre, notre regretté confrère et ami, a développées dans une suite de travaux intéressants sur la *Géométrie de direction*. (Voir *Œuvres de Laguerre*, t. II, p. 592 et suiv.)

reviendra donc au même point m de la surface minima. D'ailleurs, dans le chemin réel qu'on aura suivi sur la surface, les cosinus directeurs de la normale auront varié d'une manière continue; car on n'a jamais

$$u = u_1,$$

c'est-à-dire

$$uu' + 1 = 0.$$

Quand on reviendra au point de départ, on aura échangé les valeurs de u et de u_1; les cosinus directeurs de la normale auront changé de signe, comme le montrent les expressions données plus haut de ces cosinus, et l'on se trouvera sur le côté opposé à celui d'où l'on était parti ([1]).

([1]) SCHILLING, *Die Minimalflächen fünfter Klasse mit dem Stereoscop-Bild eines Modells derselben.* Gœttingue, 1880.

Cet intéressant travail contient, non seulement une démonstration de la proposition que nous venons d'établir, mais encore une étude très détaillée de la surface de M. Henneberg. M. Schilling en détermine l'ordre, la classe, les singularités principales, et il montre qu'elle est le lieu des milieux des cordes de la courbe minima définie par les équations

$$x = \left(\frac{1-u^2}{u}\right)^3, \qquad y = i\left(\frac{1+u^2}{u}\right)^3, \qquad z = 3\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right).$$

Elle correspond à la valeur

$$\mathcal{F}(u) = 3\left(1 - \frac{1}{u^4}\right) = 3\left(u - \frac{1}{u}\right)\left(u + \frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2}$$

de la fonction de Weierstrass. Cela nous conduit à signaler les surfaces doubles qui correspondent à la valeur plus générale

$$\mathcal{F}(u) = \left(\frac{1}{u} - u\right)^\alpha \left(\frac{1}{u} + u\right)^\beta \frac{1}{u^2},$$

où β désigne un entier impair.

CHAPITRE VII.

LES SURFACES MINIMA ALGÉBRIQUES.

Détermination de la classe et de l'ordre de la surface minima algébrique engendrée par la translation de deux courbes minima données. — Application au cas particulier où la fonction $f(u)$ est rationnelle. — Détermination de la surface minima réelle, simple ou double, de la classe la moins élevée. — Points à l'infini des surfaces minima. — La section de la surface par le plan de l'infini se compose exclusivement de droites simples ou multiples. — Points multiples à distance finie. — Surfaces minima à point conique.

---

233. Après avoir exposé, en suivant les méthodes de Lie, la solution des problèmes les plus élémentaires de la théorie, nous allons indiquer comment cet éminent géomètre a déterminé l'ordre et la classe d'une surface minima algébrique, lorsqu'on suppose données les deux courbes minima dont la translation peut engendrer la surface.

La détermination de la classe repose sur le théorème suivant, qui est un cas particulier d'une proposition générale déjà énoncée au n° 84 et relative aux surfaces engendrées par la translation d'une courbe invariable.

La développable circonscrite à la surface en tous les points de l'une des courbes minima dont la translation engendre cette surface est un cylindre dont les génératrices vont concourir en un point du cercle de l'infini.

Soient (γ) la courbe minima donnée, m un de ses points et (γ_1) la seconde courbe minima de la surface passant par le point m. La tangente en m à (γ_1) est une des génératrices du cylindre qui est circonscrit suivant (γ).

Ce point étant rappelé, considérons le cône circonscrit à la surface ayant pour sommet un point quelconque μ du cercle de l'infini; soit μm une génératrice du cône, tangente en m à la surface. Il passe en m deux courbes minima de la surface (γ), (γ_1) dont

l'une, que nous désignerons par (γ_1), est tangente à μm; et il résulte du théorème précédent que la développable circonscrite à la surface suivant (γ) est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à μm, c'est-à-dire un cône de sommet μ. Donc

Le cône circonscrit à la surface minima, ayant son sommet en un point quelconque du cercle de l'infini, se décompose en cônes plus simples, dont chacun est circonscrit à la surface suivant une courbe minima.

Ce point étant admis, commençons par considérer une surface simple et soit μ un point du cercle de l'infini. Désignons par (K) et (K′) les deux courbes différentes dont la translation peut engendrer la surface. Les génératrices du cône circonscrit suivant une des positions de (K′) sont tangentes aux diverses positions de la courbe (K). Le nombre des cônes de sommet μ, circonscrits chacun suivant une des positions de (K′), sera donc égal au nombre des tangentes qu'on peut mener du point μ à l'une des positions de la courbe (K). Ce nombre, que nous désignerons par M, est évidemment l'ordre de multiplicité du cercle de l'infini sur la développable formée par les tangentes de (K). *Il y a donc* M *cônes de sommet* μ *circonscrits suivant une des positions de* (K′) *et* M′ *cônes de même sommet circonscrits suivant une des positions de* (K), M *et* M′ *désignant les ordres de multiplicité du cercle de l'infini sur les développables formées par les tangentes aux deux courbes.* La classe de la surface sera celle de cet ensemble de cônes.

Envisageons l'un des cônes circonscrits suivant une position de (K′), par exemple, et soit (d) une droite *quelconque* passant par le sommet μ de ce cône. Pour qu'un plan tangent à ce cône contienne la droite (d), il est nécessaire et suffisant que la tangente à la courbe (K′), menée au point de contact de ce plan et de la surface minima, rencontre la droite (d) en un point situé à distance finie. La classe du cône est donc égale au nombre des tangentes de (K′) qui viennent rencontrer la droite (d) à distance finie. Or ces tangentes forment une développable dont l'ordre, que nous désignerons par R′, a reçu, comme on sait, le nom de *rang* de la courbe. Cette développable est déjà coupée par la droite (d) au point μ, qui est multiple d'ordre M′. Elle rencontrera donc la

droite (d) en $R' - M'$ points à distance finie et, par suite, la classe du cône considéré sera

$$R' - M'.$$

On trouvera de même

$$R - M,$$

R étant le nombre analogue à R', pour la classe du cône circonscrit suivant une position de la courbe (K). La classe de la surface, c'est-à-dire de l'ensemble des cônes définis précédemment, sera donc

$$M(R' - M') + M'(R - M).$$

Tel est le nombre obtenu par Lie.

Dans le cas où la surface minima est double, il n'y a plus lieu de distinguer deux séries de cônes circonscrits, et la classe devient égale à

$$M(R - M),$$

les nombres R et M se rapportant à la courbe unique dont la translation engendrera deux fois la surface.

Si la surface est simple et réelle, les deux courbes dont la translation engendre la surface sont imaginaires conjuguées. On a évidemment

$$M' = M, \qquad R' = R,$$

et la classe de la surface sera

$$2M(R - M).$$

On voit que toutes les surfaces minima réelles dont la classe est un nombre impair sont nécessairement doubles.

Nous signalerons une relation d'inégalité à laquelle satisfont les nombres R et M relatifs à toute courbe minima. La développable formée par les tangentes à cette courbe est coupée par une droite située à l'infini en deux points au moins, qui sont situés sur le cercle de l'infini et sont multiples d'ordre M. On a donc

$$(1) \qquad R \geqq 2M, \qquad R - M \geqq M.$$

Il résulte de cette inégalité que, dans l'expression $M(R - M)$ de la classe d'une surface double, le plus grand facteur ne peut être que $R - M$. Si la classe est un nombre premier p, on aura néces-

sairement

$$M = 1, \qquad R - M = p,$$

ce qui donne

$$R = p + 1.$$

234. Passons maintenant à la détermination de l'ordre de la surface, qui se fait, d'ailleurs, d'une manière moins précise. Nous couperons la surface par une droite (d) assujettie à la seule condition de ne pas rencontrer la surface à l'infini. Supposons d'abord, pour plus de netteté, que cette droite ait été choisie pour axe des z. Ses points d'intersection avec la surface seront déterminés par les deux équations

$$A(t) + A_1(\tau) = 0,$$
$$B(t) + B_1(\tau) = 0.$$

Si l'on construit les deux courbes planes (γ) et (γ') définies par les équations

$$(\gamma) \qquad x = A(t), \qquad y = B(t)$$

et

$$(\gamma') \qquad x = -A_1(\tau), \qquad y = -B_1(\tau),$$

le problème sera ramené à la recherche de ceux de leurs points communs qui sont à distance finie. Soient (K) et (K′) les deux courbes dont la translation engendre la surface. La courbe (γ) sera la projection de (K) sur le plan des xy; (γ') sera la symétrique, par rapport à l'origine, de la projection de (K′) sur le même plan. Les ordres de (γ) et de (γ') seront les mêmes, en général, que ceux de (K) et de (K′). Si donc nous désignons ces ordres par m et m', le nombre des intersections cherchées, égal à l'ordre de la surface, sera, en général,

$$mm'.$$

Toutefois, si les courbes (K) et (K′) ont des points communs à l'infini, il en sera de même de leurs projections. Soit ω le nombre des points communs à l'infini, qu'on déterminera par les

méthodes connues [1]. Dans ce cas l'ordre de la surface sera

$$mm' - \omega.$$

Enfin, si la surface est double, chaque point de la surface correspondra à deux systèmes de valeurs de t et de τ, car les véritables paramètres de chaque point sont les fonctions symétriques $t + \tau$, $t\tau$ (n° 224). Le nombre précédent devra être réduit de moitié et l'ordre aura pour expression

$$\frac{1}{2}(mm' - \omega).$$

Si l'on veut éviter le changement d'axes, qui consiste à prendre pour axe des z la droite donnée, on écrira les équations de cette droite sous la forme

$$x = mz + p,$$
$$y = nz + q,$$

et l'on sera conduit à considérer le système

$$A(t) + A_1(\tau) = m[C(t) + C_1(\tau)] + p,$$
$$B(t) + B_1(\tau) = n[C(t) + C_1(\tau)] + q,$$

c'est-à-dire à déterminer le nombre des points d'intersection des deux courbes

$$(2) \qquad x = A(t) - mC(t) - p, \qquad y = B(t) - nC(t) - q$$

et

$$(3) \qquad x = mC_1(\tau) - A_1(\tau), \qquad y = nC_1(\tau) - B_1(\tau).$$

Les résultats précédents, relatifs à l'ordre et à la classe, peuvent être vérifiés dans chacun des exemples que nous avons étudiés. Considérons, par exemple, la surface d'Enneper. Les courbes (K) et (K′) sont ici des cubiques gauches définies par les équations

$$x = 3u - u^3,$$
$$y = \pm i(3u + u^3),$$
$$z = 3u^2.$$

---

[1] *Voir*, en particulier, les différents travaux d'Halphen insérés dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, le *Journal de Liouville* et la traduction française des *Courbes planes* de Salmon.

On a

$$M' = M = 1, \qquad R = R' = 4, \qquad m = m' = 3, \qquad \omega = 0.$$

La surface est simple, d'ailleurs; son ordre sera 9 et sa classe 6, comme nous l'avons déjà reconnu (n° 207).

235. Lie a fait une application détaillée des méthodes précédentes aux surfaces engendrées par des courbes minima dont les tangentes forment une développable qui contient une seule fois le cercle de l'infini.

Si l'on prend l'équation du plan osculateur à la courbe minima sous la forme

$$(4) \qquad (1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2f(u) = 0,$$

$f(u)$, étant ici une fonction algébrique de u, sera déterminée par une équation de la forme

$$F[f(u), u] = 0.$$

Le degré de cette équation par rapport à $f(u)$ donne évidemment l'ordre de multiplicité du cercle de l'infini sur la développable dont la courbe minima est l'arête de rebroussement. Dans le cas que nous voulons étudier, cette équation sera donc du premier degré et $f(u)$ sera une fonction rationnelle de u. Les résultats obtenus au n° 198 en ce qui concerne la transformation des coordonnées nous montrent d'ailleurs que, si les axes sont quelconques, le degré du numérateur de $f(u)$ sera supérieur de deux unités seulement à celui du dénominateur. On pourra donc poser

$$(5) \quad f(u) = \alpha u^2 + \beta u + \gamma + \sum\left[\frac{A_{i,m_i}}{(u-a_i)^{m_i}} + \frac{A_{i,m_i-1}}{(u-a_i)^{m_i-1}} + \ldots + \frac{A_{i,1}}{u-a_i}\right];$$

les termes du second degré n'auront aucune influence sur le résultat, et peuvent même être supprimés si l'on imprime à la courbe une translation convenablement choisie.

Si l'on substitue cette valeur de $f(u)$ dans l'équation (4), on voit qu'il passera, par chaque point de l'espace, des plans tangents de la développable en nombre égal à

$$(6) \qquad C = \Sigma m_i + 2.$$

Ce nombre est la *classe* de la courbe : son expression ne nous est pas nécessaire, mais elle interviendra pour simplifier les formules.

Si l'on substitue les valeurs de $f(u)$, $f'(u)$, $f''(u)$ dans les formules (5) (n° 219) qui donnent les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe, on reconnaît immédiatement que les termes en

$$\frac{1}{(u-a_1)^{m_1+2}}, \quad \frac{1}{(u-a_2)^{m_2+2}}, \quad \ldots$$

figurent dans les expressions de x, y, z. La courbe est donc unicursale, et le degré du dénominateur commun de x, y, z sera

$$\Sigma m_i + 2q,$$

q étant le nombre des racines a_i. Comme les numérateurs de x, y, z sont de degrés égaux ou inférieurs à celui du dénominateur commun, l'ordre O de la courbe minima sera

$$(7) \qquad O = \Sigma m_i + 2q = C + 2q - 2.$$

Proposons-nous maintenant de déterminer le rang de la courbe, c'est-à-dire le nombre des génératrices de la développable qui rencontrent une droite donnée.

Une génératrice de la développable est définie par les deux équations

$$\begin{aligned}(1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2f(u) &= 0,\\ -ux + iuy + z + f'(u) &= 0.\end{aligned}$$

Si l'on exprime qu'elle rencontre une droite donnée par les équations

$$Bz - Cy = A', \qquad Cx - Az = B', \qquad Ay - Bx = C',$$

où l'on a

$$AA' + BB' + CC' = 0,$$

on est conduit à une équation de la forme

$$\begin{aligned}&A[(1-u^2)f'(u) + 2uf(u)] + Bi[(1+u^2)f'(u) - 2uf(u)]\\ &\quad + 2C[uf'(u) - f(u)] + A'i(1-u^2) - B'(1+u^2) + 2iC'u = 0,\end{aligned}$$

dont le degré donnera le rang cherché. Il suffit de se reporter

à l'expression de $f(u)$ pour reconnaître que ce degré est

$$(8) \qquad R = \Sigma m_i + q + 2 = C + q.$$

Telles sont les formules qui font connaître les deux nombres dont dépendent l'ordre et la classe de la surface minima.

236. Proposons-nous, par exemple, de déterminer, parmi les surfaces que nous étudions, celles qui ont la classe la plus faible.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de surfaces simples. La classe sera égale à

$$2[\Sigma m_i + q + 1];$$

q et m étant au moins égaux à 1, il faut prendre

$$q = m = 1;$$

on aura donc

$$f(u) = \frac{A}{u-a} + \alpha u^2 + \beta u + \gamma.$$

C'est, on s'en assure aisément, la valeur de $f(u)$ qui correspond à la surface d'Enneper.

Si l'on veut obtenir les surfaces de huitième classe, il faudra prendre

$$\Sigma m_i + q = 3.$$

Cette équation admet l'unique solution

$$q = 1, \qquad m_1 = 2,$$

qui donne

$$f(u) = \frac{A}{(u-a)^2} + \frac{A_1}{u-a} + \alpha u^2 + \beta u + \gamma.$$

L'ordre de la surface correspondante sera 16.

237. Proposons-nous maintenant de rechercher les surfaces doubles *réelles* les plus simples. L'équation à laquelle satisfait la fonction $f(u)$ (n° 227)

$$\frac{f(u)}{u} = \frac{f_1\left(-\frac{1}{u}\right)}{-\frac{1}{u}}$$

nous montre que, dans ce cas, à chaque infini a_i correspondra un

infini $-\frac{1}{a'_i}$ de même degré de multiplicité, a'_i désignant la conjuguée de a_i. Les nombres m_i étant deux à deux égaux, la somme Σm_i sera paire, ainsi que le nombre q.

La classe

$$\Sigma m_i + q + 1$$

sera donc toujours un nombre impair et, comme on a évidemment

$$\Sigma m_i + q \geqq 4,$$

la classe sera au moins égale à 5. La surface double réelle la plus simple correspond donc à l'hypothèse

$$q = 2, \qquad m_1 = m_2 = 1.$$

On obtient ainsi, nous allons le reconnaître, la surface de M. Henneberg.

Au reste, on peut obtenir très simplement, sous sa forme la plus générale, la valeur de $f(u)$ qui correspond aux surfaces doubles réelles.

Nous avons vu, en effet, qu'à chaque infini a_i correspond un infini $-\frac{1}{a'_i}$. Choisissons dans chaque groupe, d'une manière arbitraire, l'un des infinis a_i, $-\frac{1}{a'_i}$, et réunissons tous les termes qui correspondent à ces infinis. Si nous désignons par $\varphi(u)$ l'ensemble de ces termes, la fonction

$$F(u) = f(u) - \varphi(u) + u^2 \varphi_1\left(-\frac{1}{u}\right),$$

où φ_1 désigne la conjuguée de φ, satisfera encore à l'équation fonctionnelle suivante, qui caractérise les surfaces doubles,

$$\frac{F(u)}{u} = \frac{F_1\left(-\frac{1}{u}\right)}{-\frac{1}{u}};$$

mais, comme cette fonction ne contient plus les infinis a_i, elle ne pourra pas contenir non plus les infinis $-\frac{1}{a'_i}$ et se réduira, par conséquent, à un polynome du second degré, que déterminera l'équation fonctionnelle précédente, et qui sera de la forme

$$a(1 - u^2) + ib(1 + u^2) + 2cu,$$

a, b, c désignant trois constantes réelles. On pourra le faire disparaître, si l'on veut, par une translation réelle et l'on aura, dans tous les cas, l'expression

$$f(u) = \varphi(u) - u^2\varphi_1\left(-\frac{1}{u}\right) + a(1+u^2) + ib(1+u^2) + 2cu,$$

qui définira toutes les surfaces doubles réelles.

Dans le cas de la surface de M. Henneberg, on peut, en choisissant convenablement les axes, prendre

$$\varphi(u) = \frac{A}{u},$$

A étant réel, et l'on aura

$$f(u) = \frac{A}{u} + A u^3. \tag{9}$$

Si l'on applique à cette surface les méthodes indiquées plus haut pour la détermination de l'ordre, on reconnaîtra sans difficulté que les courbes désignées au n° 234 par (γ), (γ') sont ici symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine et qu'elles sont de l'ordre 6. Les points à l'infini étant des points simples d'intersection, il restera 30 points d'intersection à distance finie, et l'ordre de la surface sera, par suite, égal à 15.

238. Considérons une courbe minima (K), pour laquelle on connaît les nombres R, M. Si on la transforme par inversion, on obtiendra une nouvelle courbe minima (K_1); soient R_1 et M_1 les nombres relatifs à cette courbe.

Une droite (d) rencontrant le cercle de l'infini coupe la développable formée par les tangentes de (K) en R — M points. L'inversion transforme la droite (d) en une droite (d_1) rencontrant également le cercle de l'infini; elle transforme la développable formée par les tangentes de (K) dans la développable formée par les tangentes de (K_1). On aura donc

$$R - M = R_1 - M_1.$$

D'autre part, considérons un cercle passant par le pôle de l'inversion; il coupera la développable formée par les tangentes de (K) en 2R points; deux de ces points sont sur le cercle de l'infini

et comptent chacun pour M; enfin d'autres, en nombre que nous désignerons par Ω, sont confondus avec le pôle. Le cercle coupera donc la développable en

$$2R - 2M - \Omega$$

points à distance finie et ne coïncidant pas avec le pôle.

Si l'on applique maintenant l'inversion, le cercle se transforme en une droite quelconque et le nombre précédent devient le rang de la courbe (K_1). On a donc

$$R_1 = 2R - 2M - \Omega.$$

La valeur de R_1 sera, dans tous les cas, positive et supérieure à 4, car il n'existe pas de courbe dont le rang soit inférieur à ce nombre; Ω est nul si le pôle est quelconque, mais il peut devenir égal à 2 si ce pôle a été pris sur la courbe (K). On a donc, dans tous les cas,

$$2R - 2M - 2 \geqq 4$$

ou

$$R - M \geqq 3.$$

Cette inégalité met en évidence les résultats suivants, qui sont dus à Lie.

La classe d'une surface minima simple

$$M(R' - M') + M'(R - M)$$

est au moins égale à

$$3(M + M'),$$

c'est-à-dire au moins égale à 6. Parmi les surfaces simples, la surface d'Enneper est donc celle dont la classe est la plus faible.

La classe d'une surface minima double

$$M(R - M)$$

est toujours égale ou supérieure à 3M, c'est-à-dire à 3.

Si l'on considère une cubique gauche qui soit, en même temps, une courbe minima, elle donne effectivement une surface double de troisième classe, mais cette surface est imaginaire. En effet, une courbe minima ne peut être identique à sa conjuguée que si elle est coupée par un plan réel quelconque en des points imaginaires

conjugués deux à deux. Elle doit être nécessairement d'ordre pair, si la surface double, lieu des milieux de ses cordes, est réelle.

Si l'on veut que la classe de la surface soit égale à 4, il faudra, $R - M$ étant supérieur à 3, qu'on ait

$$M = 1, \qquad R = 5.$$

Il existe effectivement une courbe minima répondant à la question. Mais nous avons déjà vu que, dans le cas où $M = 1$, la surface double réelle la plus simple est celle de M. Henneberg.

Ainsi, *il n'y a pas de surface double réelle de classe inférieure à* 5.

239. Renvoyant, pour plus de détails, en ce qui concerne la détermination des surfaces minima de classe ou de degré donné, au Mémoire de Lie, nous terminerons ce Chapitre en étudiant les nappes infinies des surfaces minima algébriques.

Dans un Mémoire, inséré aux *Mathematische Annalen* (¹), M. Geiser avait établi, par une méthode intéressante et féconde, que la section de toute surface minima algébrique par le plan de l'infini ne peut se composer que de lignes droites et du cercle de l'infini. Lie s'est servi du mode de génération qui l'a guidé dans ses belles études pour démontrer cette proposition et la rendre plus précise encore.

Considérons, en effet, la surface minima comme le lieu des milieux des segments dont les extrémités M, M_1 décrivent respectivement deux courbes minima (Γ), (Γ_1). Tant que les points M, M_1 sont à distance finie, il en est de même du milieu du segment MM_1. Si l'un des points, M, par exemple, s'éloigne seul à l'infini, le milieu du segment s'éloigne à l'infini et vient, à la limite, coïncider avec M_1. Supposons maintenant que les deux points M, M_1 s'éloignent simultanément à l'infini et viennent coïncider respectivement avec deux points m, m_1 des deux courbes (Γ), (Γ_1), situés nécessairement sur le cercle de l'infini. Si les points m, m_1 sont distincts, le milieu de mm_1 sera indéterminé et pourra occuper

(¹) Geiser (C. F.), *Notiz über algebraischen Minimumsflächen* (*Mathematische Annalen*, t. III, 1870, p. 530).

toutes les positions sur la droite mm_1 ([1]). Nous obtenons ainsi ce premier résultat :

Toutes les droites obtenues en joignant un point à l'infini de (Γ) *à un point de* (Γ_1) *situé aussi à l'infini et distinct du premier appartiennent à la surface.*

On reconnaît ainsi que, si les deux courbes (Γ), (Γ_1) coupent le cercle de l'infini en des points distincts les uns des autres, la section de la surface par le plan de l'infini se composera exclusivement des droites qui joignent les points à l'infini de la première courbe aux points à l'infini de la seconde. Si m et m' désignent les ordres des deux courbes, ces droites seront au nombre de mm'. Comme, dans ce cas, l'ordre de la surface est précisément égal à mm', il est évident que chacune des droites sera simple.

240. Il nous reste à examiner le cas où les deux courbes (Γ), (Γ_1) ont des points communs à l'infini et où les deux extrémités du segment MM_1, dont le milieu décrit la surface minima, viennent coïncider avec l'un de ces points.

Soit

$$(10) \qquad (1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2f(u) = 0$$

l'équation du plan osculateur de la courbe (Γ). En joignant à cette équation ses deux premières dérivées par rapport à u,

$$(11) \qquad -u(x-iy) + z + f'(u) = 0,$$

$$(12) \qquad -x + iy + f''(u) = 0,$$

([1]) Soient, en effet, x, y, z, t; x', y', z' t' les coordonnées cartésiennes homogènes des deux points M, M_1. Lorsqu'ils tendent vers leurs positions limites m, m_1, ces coordonnées auront pour valeurs limites $x_0, y_0, z_0, 0$; x'_0, y'_0, z'_0 0,. Cela posé, les coordonnées homogènes du milieu de MM_1 ont pour expressions

$$X = xt' + tx', \qquad Y = yt' + ty', \qquad Z = zt' + tz', \qquad T = 2tt'.$$

Faisons tendre t et t' vers zéro, de telle manière que l'on ait toujours

$$t' = \lambda t,$$

λ désignant une constante. Les coordonnées de X, Y, Z, T divisées par t auront pour limites les valeurs suivantes :

$$x_0\lambda + x'_0, \qquad y_0\lambda + y'_0, \qquad z_0\lambda + z'_0, \qquad 0,$$

qui contiennent l'arbitraire λ et définissent un point quelconque de la droite mm_1.

on aura les trois relations qui définissent, en fonction de u, les coordonnées d'un point de la courbe. Elles nous donnent

$$(13)\qquad \begin{cases} x - iy = f''(u), \\ z = uf''(u) - f'(u), \\ x + iy = -u^2 f''(u) + 2uf'(u) - 2f(u), \end{cases}$$

ou encore

$$(14)\qquad \begin{cases} x - iy = \int \mathcal{F}(u)\,du, \\ z = \int u\,\mathcal{F}(u)\,du, \\ x + iy = -\int u^2 \mathcal{F}(u)\,du, \end{cases}$$

en posant

$$f'''(u) = \mathcal{F}(u).$$

Choisissons les axes de manière que le point m de (Γ) situé à l'infini corresponde à l'hypothèse $u = 0$, et admettons que la courbe (Γ) soit algébrique ou, du moins, présente en ce point une singularité algébrique. Alors $f(u)$ sera développable suivant les puissances croissantes de u et, si p et q désignent deux nombres entiers dont le second est positif, on pourra poser

$$f(u) = \alpha_0 u^{\frac{p}{q}} + \alpha_1 u^{\frac{p+1}{q}} + \alpha_2 u^{\frac{p+2}{q}} + \ldots = \sum_{\lambda=0} \alpha_\lambda u^{\frac{p+\lambda}{q}}.$$

Nous supposerons toujours qu'aucun des exposants $\frac{p+\lambda}{q}$ ne prend l'une des valeurs 0, 1, 2. On peut toujours, en effet, supprimer les termes correspondant à ces trois valeurs particulières des exposants en ajoutant des constantes convenablement choisies à x, y, z, comme le montre l'équation (10) du plan osculateur; et ces constantes pourront toujours disparaître *dans les formules finales* par une translation convenable des axes coordonnés.

En mettant à profit cette remarque, nous écrirons $f(u)$ sous la forme

$$(15)\qquad f(u) = \sum \frac{a_\lambda}{\frac{p+\lambda}{q}\left(\frac{p+\lambda}{q} - 1\right)\left(\frac{p+\lambda}{q} - 2\right)} u^{\frac{p+\lambda}{q}},$$

qui donne

$$(16)\qquad \mathcal{F}(u) = \Sigma a_\lambda u^{\frac{p+\lambda}{q} - 3}$$

et, par conséquent,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} x - iy &= \sum \frac{a_\lambda}{\frac{p+\lambda}{q} - 2} u^{\frac{p+\lambda}{q} - 2}, \\ z &= \sum \frac{a_\lambda}{\frac{p+\lambda}{q} - 1} u^{\frac{p+\lambda}{q} - 1}, \\ x + iy &= -\sum \frac{a_\lambda}{\frac{p+\lambda}{q}} u^{\frac{p+\lambda}{q}}. \end{aligned}\right.$$

Telles sont les expressions des coordonnées d'un point de la courbe en fonction de u.

Pour que le point m, correspondant à la valeur o de u, soit rejeté à l'infini, il faudra que l'un au moins des termes qui figurent dans les expressions précédentes devienne infini pour $u = 0$. On aura donc nécessairement

$$\frac{p}{q} < 2.$$

Mais il y a ici plusieurs cas à distinguer :

1° Si l'on a

$$1 < \frac{p}{q} < 2,$$

$f(u)$ et $f'(u)$ deviendront nulles pour $u = 0$. La tangente en m à la courbe (Γ) sera définie par les deux équations (10) et (11), où l'on fera $u = 0$ et qui se réduiront aux suivantes :

$$x + iy = 0, \qquad z = 0;$$

elle restera donc à distance finie; il en sera de même du plan osculateur qui est représenté par la première des deux équations précédentes.

2° Si l'on a

$$0 < \frac{p}{q} < 1,$$

$f'(u)$ sera infinie, mais non $f(u)$. Le plan osculateur en m, défini par l'équation

$$x + iy = 0,$$

sera encore à distance finie; mais la tangente en m sera rejetée à l'infini et coïncidera avec la tangente en ce point au cercle de l'infini.

3° Enfin, si l'on a

$$\frac{p}{q} < 0,$$

le plan osculateur lui-même sera rejeté à l'infini; quant à la tangente, elle sera la même que dans le cas précédent.

En résumé, la courbe (Γ) ne sera tangente en m au plan de l'infini que si l'on a

$$\frac{p}{q} < 1.$$

241. Si, comme on l'a fait au n° 229, l'on adopte pour la courbe (Γ_1) un mode de représentation identique au précédent et si l'on pose

$$\mathcal{F}_1(u_1) = \Sigma b_{\lambda_1} u_1^{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-2}, \tag{18}$$

on obtiendra des expressions des coordonnées de chaque point de la courbe en fonction de u_1 qui seront analogues aux formules (17); et l'on en déduira les expressions suivantes des coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface en fonction de u et de u_1 :

$$\left\{\begin{aligned}
X - iY &= \int \mathcal{F}(u)\,du + \int \mathcal{F}_1(u_1)\,du_1 \\
&= \sum \frac{a_\lambda}{\frac{p+\lambda}{q}-2} u^{\frac{p+\lambda}{q}-2} + \sum \frac{b_{\lambda_1}}{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-2} u_1^{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-2}, \\
Z &= \int u\mathcal{F}(u)\,du + \int u_1\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1 \\
&= \sum \frac{a_\lambda}{\frac{p+\lambda}{q}-1} u^{\frac{p+\lambda}{q}-1} + \sum \frac{b_{\lambda_1}}{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-1} u_1^{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-1}, \\
X + iY &= -\int u^2\mathcal{F}(u)\,du - \int u_1^2\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1 \\
&= -\sum \frac{a_\lambda}{\frac{p+\lambda}{q}} u^{\frac{p+\lambda}{q}} - \sum \frac{b_{\lambda_1}}{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}} u_1^{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}}.
\end{aligned}\right. \tag{19}$$

Le plan tangent au point (u, u_1) sera représenté (n° 229) par l'équation

$$(20) \qquad X + iY - uu_1(X - iY) + (u + u_1)Z + \xi = 0,$$

et le calcul de ξ donnera [n° 229, formule (18)]

$$(21) \qquad \xi = \sum \frac{a_\lambda u^{\frac{p+\lambda}{q}-1}}{\frac{p+\lambda}{q}-1}\left(\frac{u_1}{\frac{p+\lambda}{q}-2} - \frac{u}{\frac{p+\lambda}{q}}\right),$$
$$+ \sum \frac{b_{\lambda_1} u_1^{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-1}}{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-1}\left(\frac{u}{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-2} - \frac{u_1}{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}}\right).$$

Il est à remarquer qu'on pourrait réduire à des polynomes les séries qui constituent les seconds membres des formules (19) et (21) en y supprimant tous les termes de degré positif, qui sont négligeables lorsque u et u_1 deviennent infiniment petits.

242. Les formules précédentes étant établies, supposons d'abord qu'aucune des deux courbes (Γ), (Γ_1) ne soit tangente au plan de l'infini. On aura alors

$$2 > \frac{p}{q} > 1, \qquad 2 > \frac{p_1}{q_1} > 1.$$

Lorsque u et u_1 tendront vers zéro, Z et $X + iY$ auront zéro pour limite. Quant à $X - iY$, comme il présente plusieurs termes infinis, les uns contenant u, les autres contenant u_1, il pourra prendre toutes les valeurs possibles. En égalant, en effet, la valeur de $X - iY$ à une constante quelconque, on obtient une équation qui admet des solutions pour lesquelles u et u_1 sont aussi petits qu'on le veut; car, si l'on y regarde u et u_1 comme les coordonnées rectangulaires d'un point, cette équation de condition représente une courbe qui passe à l'origine des coordonnées.

Ainsi, dans le cas qui nous occupe, les points de la surface minima qui proviennent des points de (Γ) et de (Γ_1) infiniment rapprochés de m ont pour lieu géométrique la droite

$$Z = 0, \qquad X + iY = 0,$$

qui est tout entière à distance finie. L'équation (20) du plan tangent se réduit à la suivante :

$$X + iY = 0.$$

On voit qu'il est le même pour tous les points de la droite [1].

Supposons maintenant que l'une des courbes (Γ), (Γ_1) soit tangente en m au cercle de l'infini, c'est-à-dire que l'une au moins des fractions $\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}$ soit inférieure à l'unité. Dans ce cas, les expressions de Z et de $X - iY$ contiennent, l'une et l'autre, des termes de degré négatif, et il arrivera généralement que l'une au moins de ces deux quantités deviendra infinie quand u et u_1 tendront vers zéro d'une manière quelconque.

Si une seule des fractions $\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}$ est inférieure à l'unité, la coordonnée Z deviendra certainement infinie quand u et u_1 tendront vers zéro. Si, au contraire, les deux fractions $\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}$ sont l'une et l'autre inférieures à l'unité, $X - iY$ ne pourra demeurer finie que si les termes de degré le plus faible en u et u_1 sont du même ordre, c'est-à-dire si l'on a approximativement

$$\frac{a_0 u^{\frac{p}{q}-2}}{\frac{p}{q}-2} + \frac{b_0 u_1^{\frac{p_1}{q_1}-2}}{\frac{p_1}{q_1}-2} = 0;$$

et, de même, Z ne pourra demeurer finie que si l'on a approximativement

$$\frac{a_0 u^{\frac{p}{q}-1}}{\frac{p}{q}-1} + \frac{b_0 u^{\frac{p_1}{q_1}-1}}{\frac{p_1}{q_1}-1} = 0.$$

---

[1] Si l'on restitue aux courbes (Γ), (Γ_1) leur position la plus générale en leur imprimant des translations convenables, les résultats obtenus dans le texte donnent le théorème suivant, que l'on pourrait établir par la Géométrie :

Si les deux courbes (Γ), (Γ_1) ont en commun un point m du cercle de l'infini et si aucune d'elles n'est tangente à ce cercle, les points de la surface qui proviennent des portions des deux courbes infiniment voisines de m forment une droite située dans le plan des tangentes en m aux deux courbes et à égale distance de l'une et de l'autre. Le plan tangent en un point quelconque de cette droite est fixe; il contient à la fois la droite et la tangente en m au cercle de l'infini.

Or, ces deux équations ne peuvent être compatibles que si l'on a

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1},$$

et, même alors, comme elles sont de degrés différents, $2q - p$ et $q - p$, par rapport à u, il y aura toujours des solutions de l'une qui ne conviendront pas à l'autre. On peut donc affirmer que, dans le cas où l'une au moins des deux courbes minima est tangente en m au cercle de l'infini, *les points des courbes* (Γ), (Γ_1) *infiniment voisins de m ne pourront donner de point de la surface à distance finie que si l'on a $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$ et qu'ils donneront toujours des points de la surface qui seront situés à l'infini.* Il reste à indiquer le lieu formé par ces derniers points. Or, si l'on se reporte à l'équation (20) du plan tangent écrit sous forme homogène

$$X + iY - uu_1(X - iY) + (u + u_1)Z + \xi T = 0,$$

on voit que u et u_1 devenant nuls, la section de ce plan par le plan de l'infini aura pour équations

$$X + iY = 0, \qquad T = 0.$$

Les points cherchés de la surface sont évidemment distribués sur cette droite, qui est la tangente en m au cercle de l'infini. Réciproquement, chaque point de cette droite peut être obtenu pour des valeurs infiniment petites de u et u_1; car, à chacun de ces points correspond une valeur déterminée du rapport $\frac{Z}{Y - iX}$, et l'on reconnaîtra, en répétant le raisonnement donné au début de ce numéro, que ce rapport peut prendre toutes les valeurs possibles. Ainsi :

Toutes les fois que l'une des courbes (Γ), (Γ_1) *est tangente en un point m au cercle de l'infini, tous les points de la surface situés à l'infini et provenant des branches voisines du point m ont pour lieu géométrique la tangente en m au cercle de l'infini.*

En réunissant les résultats précédents nous obtenons, par conséquent, la proposition suivante qui est celle de Lie :

Lorsque les deux courbes (Γ), (Γ_1) *ont un point commun m*

à l'infini, les branches de ces deux courbes voisines de m ne peuvent donner de point à l'infini de la surface que si l'une des courbes est tangente en m au cercle de l'infini; dans ce cas, tous les points à l'infini de la surface ont pour lieu géométrique la tangente en m au cercle de l'infini.

243. Mais la méthode indiquée dans les numéros précédents nous permet aussi de résoudre une question nouvelle et, après avoir étudié la section de la surface par le plan de l'infini, de déterminer, quand ils existent, les points à distance finie de la surface qui peuvent provenir des points à l'infini situés sur les courbes (Γ), (Γ_1). Nous avons vu plus haut que cette circonstance ne peut se présenter que si l'on a

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}.$$

Supposons cette condition remplie et reprenons les formules déjà démontrées

$$X - iY = \int \mathcal{F}(u)\,du + \int \mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,$$

$$Z = \int u\mathcal{F}(u)\,du + \int u_1\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,$$

qui donnent

$$dZ - u\,d(X - iY) = (u_1 - u)\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1. \tag{22}$$

Pour résoudre la question proposée, nous couperons la surface par le plan

$$X - iY = \alpha,$$

où α désigne une constante quelconque et nous chercherons s'il existe, dans ce plan, un point de la surface, à distance finie, provenant de valeurs infiniment petites de u et de u_1.

Si nous substituons la valeur α de $X - iY$ dans la première des formules (19), nous aurons une relation entre u et u_1 qui nous donnera pour u un certain nombre de développements en série suivant les puissances positives de u_1, développements dont les coefficients pourront contenir α, à partir d'un certain rang. Il faudra que l'une au moins de ces valeurs de u, portée dans les expressions de Z et de $X + iY$, donne des développements de ces quantités demeurant finis pour $u_1 = 0$ et ne contenant, par consé-

quent, aucune puissance négative de u_1. Si l'on se reporte à la formule (22) et si l'on y fait

$$X - iY = \alpha, \qquad d(X - iY) = 0,$$

on en déduira

$$\frac{dZ}{du_1} = (u_1 - u)\mathcal{F}_1(u_1).$$

Tous les termes de Z étant, par hypothèse, de degré positif, $\frac{dZ}{du_1}$ ne contiendra que des termes de degré supérieur à -1 et, si l'on remarque que le degré de $\mathcal{F}_1(u_1)$ est $\frac{p_1}{q_1} - 3$, on est conduit à l'inégalité

$$\text{degré}(u - u_1) + \frac{p_1}{q_1} - 3 > -1,$$

qui donne

$$u - u_1 = \theta u_1^{2 - \frac{p_1}{q_1}}, \tag{23}$$

θ étant une fonction de u_1 qui s'annule pour $u_1 = 0$.

Portons la valeur de u tirée de l'équation précédente dans les expressions de Z et de $X + iY$. On a

$$\begin{aligned} u^{\frac{p+\lambda}{q} - 1} &= u_1^{\frac{p+\lambda}{q} - 1}\left(1 + \theta u_1^{1 - \frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{p+\lambda}{q} - 1} \\ &= u^{\frac{p+\lambda}{q} - 1}\left(1 + \sigma u^{1 - \frac{p_1}{q_1}}\right) = u^{\frac{p+\lambda}{q} - 1} + \sigma u^{\frac{\lambda}{q}}, \end{aligned}$$

σ étant, comme θ, une fonction qui s'annule pour $u_1 = 0$. On voit donc que, dans tous les termes de l'expression (19) de Z qui contiennent u, on pourra remplacer u par u_1, en négligeant seulement des quantités qui s'annulent pour $u_1 = 0$ et et peuvent être supprimées. On aura ainsi la valeur approchée

$$Z = \int u_1[\mathcal{F}_1(u_1) + \mathcal{F}(u_1)]\,du_1.$$

Un raisonnement analogue donnera de même

$$X + iY = -\int u_1^2[\mathcal{F}_1(u_1) + \mathcal{F}(u_1)]\,du_1.$$

Pour que Z reste finie, il faudra que tous les termes de degré

négatif en u_1 se détruisent mutuellement. Si donc on pose

$$\mathcal{F}(u) = \Phi(u) + \Psi(u),$$
$$\mathcal{F}_1(u_1) = \Phi_1(u_1) + \Psi_1(u_1),$$

Φ et Φ_1 contenant tous les termes de degré inférieur à -2, il faudra que l'on ait

$$\Phi_1(u) = -\Phi(u).$$

Telle est la condition cherchée. On reconnaîtra aisément qu'elle est suffisante et que la somme $X + iY$ demeure aussi finie. En réunissant les résultats précédents, on obtient la proposition suivante :

Pour que les points à l'infini des deux courbes (Γ), (Γ_1) *donnent des points de la surface situés à distance finie, il faut et il suffit que les termes de degré inférieur à* -2 *dans les fonctions* $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u)$ *soient deux à deux égaux et de signes contraires. Si cette condition est remplie, les points à distance finie qui proviennent de deux branches infinies considérées de* (Γ), (Γ_1) *seront distribués sur une droite passant par le point du cercle de l'infini qui est commun à ces deux branches.*

Pour terminer l'étude de cette question, il faudrait rechercher l'ordre de multiplicité des différentes droites de la surface situées soit à l'infini, soit à distance finie, qui proviennent des branches infinies de (Γ) et de (Γ_1). Mais il suffira, pour obtenir ces ordres de multiplicité, d'appliquer les méthodes connues.

244. Il nous reste à dire quelques mots des points multiples et des lignes multiples des surfaces minima.

La surface minima la plus générale, ayant été définie par Lie comme lieu géométrique du milieu d'un segment dont les extrémités décrivent les courbes (Γ), (Γ_1), a, généralement, une ligne double, lieu des points qui sont les milieux de deux segments, et des points triples, situés sur cette ligne double, qui sont les milieux de trois segments différents. Sans nous arrêter à l'étude des singularités de ce genre, qui sont en quelque sorte normales, nous dirons quelques mots des surfaces minima qui admettent des points coniques.

Pour que la surface minima ait un point conique O, il faut et il suffit que ce point O soit le milieu d'une infinité de segments, c'est-à-dire que les deux courbes (Γ), (Γ_1) soient symétriques l'une de l'autre par rapport au point O. Cette proposition montre immédiatement comment on engendrera les surfaces minima à point conique. Il suffira de prendre pour la courbe (Γ_1) la symétrique de (Γ) par rapport à un point déterminé. Un raisonnement géométrique très simple permet, d'ailleurs, de reconnaître que le cône des tangentes au point multiple est exclusivement formé des droites qui vont rencontrer le cercle de l'infini [1].

La théorie des surfaces minima à point conique se rattache immédiatement à celle des surfaces doubles. Nous avons vu au n° 210 comment on passe d'une surface minima à son adjointe. Les résultats analytiques déjà signalés peuvent s'interpréter comme il suit :

Étant donnée une surface minima, lieu des milieux des segments dont les extrémités s'appuient sur les deux courbes (Γ), (Γ_1), *soient* (Γ'), (Γ'_1) *les homothétiques de* (Γ), (Γ_1) *respectivement, prises par rapport au même pôle* O *avec des rapports d'homothétie respectivement égaux à* $+i$ *et à* $-i$. *La surface adjointe est le lieu des milieux des segments dont les extrémités décrivent les courbes* (Γ'), (Γ'_1).

Par suite, si les deux courbes (Γ), (Γ_1) sont symétriques l'une de l'autre par rapport au point O, les courbes (Γ'), (Γ'_1) seront identiques, et *vice versa*. On est ainsi conduit au théorème suivant :

Pour obtenir toutes les surfaces à point conique, il suffira de prendre les adjointes des surfaces doubles.

On voit ainsi qu'il y a des surfaces réelles à point conique et l'on sait comment on les obtiendra. Le lecteur déduira facilement de ce qui précède la construction suivante :

---

[1] *Voir* au sujet des points coniques, l'article déjà cité de Geiser (*Mathematische Annalen*, t. III). Il peut arriver exceptionnellement, si la courbe (Γ) a des points doubles, que le point conique soit sur la ligne double de la surface; alors, au cône indiqué dans le texte viennent s'ajouter un ou plusieurs plans tangents.

Pour obtenir l'adjointe de la surface double lieu des milieux des cordes d'une courbe minima (D), *on mènera par le point fixe* O *des parallèles à ces cordes, d'une longueur égale à la longueur de la corde multipliée par* i. *Les extrémités de ces parallèles décriront la surface cherchée, qui aura le point* O *pour point conique.*

CHAPITRE VIII.

LES FORMULES DE M. SCHWARZ.

Détermination de la surface minima tangente à une développable donnée suivant une courbe donnée. — Application à ce problème des résultats généraux que la théorie des équations aux dérivées partielles doit à Cauchy. — Formules de M. Schwarz. — Leur démonstration par Lie. — Surface minima passant par une droite réelle; la droite est toujours un axe de symétrie de la surface. — Surface minima réglée, détermination nouvelle de cette surface. — Surface minima passant par une courbe plane. — Cas où cette courbe doit être une ligne de courbure ou une ligne géodésique. — Théorème d'Henneberg et de Lie. — Surface minima admettant une conique pour ligne géodésique.

---

245. Dans les Chapitres précédents, nous avons développé les propriétés les plus simples des surfaces minima. Il nous reste à indiquer comment on peut déterminer une surface minima satisfaisant à des conditions données. Nous examinerons en premier lieu le problème suivant : *Déterminer la surface minima passant par un contour quelconque donné et admettant en chaque point de ce contour un plan tangent donné.*

Nous ferons connaître d'abord ce que nous apprennent, sur la solution de ce problème, les propositions générales relatives à l'intégration par les séries des équations aux dérivées partielles. Ces propositions, que l'on doit à Cauchy ([1]), peuvent être appliquées à l'équation aux dérivées partielles

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

qui caractérise les surfaces minima. Elles permettent de démontrer qu'il existe, en général, une de ces surfaces, et une seule, passant

---

([1]) Les recherches de Cauchy sur ce sujet sont exposées dans différentes Notes insérées en 1842 aux tomes XIV et XV des *Comptes rendus*. Voir *Œuvres de Cauchy*, 1re série, t. VI et VII. On pourra consulter aussi un travail beaucoup plus récent, publié en 1875 par S. Kowalewsky sous le titre : *Theorie der partiellen Differentialgleichungen* (*Journal de Crelle*, t. LXXX, p. 1).

par une courbe donnée et admettant, en chaque point de cette courbe, un plan tangent donné, qui passera nécessairement par la tangente à la courbe; ce problème n'est impossible ou indéterminé que dans le cas où la courbe est une caractéristique de l'équation aux dérivées partielles, c'est-à-dire une courbe minima. Mais la solution qu'on obtient ainsi, en suivant les méthodes de Cauchy, exige que les coordonnées d'un point de la courbe, ainsi que les valeurs de p et de q en ce point, puissent être développées en séries entières ordonnées suivant les puissances d'un paramètre et puissent, par conséquent, être déterminées aussi bien pour les valeurs imaginaires que pour les valeurs réelles de ce paramètre. Elle cesserait d'être applicable si le contour se composait de portions de différentes courbes analytiques, ou si la loi de variation des plans tangents s'exprimait par des fonctions différentes en différentes parties de la courbe. Remarquons enfin que l'existence seule de la solution est démontrée, puisqu'on ne connaît pas la loi des séries au moyen desquelles l'intégrale est obtenue.

Il est facile de prévoir que, lorsqu'on aura obtenu, par un moyen quelconque, l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles, la solution du problème posée par Cauchy deviendra relativement facile, puisqu'elle exigera seulement la détermination des deux fonctions arbitraires d'une seule variable contenues dans l'intégrale générale.

Comme nous l'avons déjà indiqué, la détermination de la surface minima passant par un contour donné et y admettant en chaque point un plan tangent donné a été faite pour la première fois par Björling et O. Bonnet. Les méthodes suivies par ces deux géomètres exigent seulement l'emploi des quadratures. Nous allons faire connaître ici celle qu'on doit à M. Schwarz [1], et qui repose sur l'emploi des formules démontrées au n° 212.

246. Nous avons vu que, si x, y, z désignent les coordonnées d'un point quelconque d'une surface minima et X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale en ce point, les coordonnées x_0, y_0, z_0 du point correspondant de la surface adjointe seront déterminées

---

[1] *Miscellen*, etc., § V, p. 291.

par les formules

$$(1)\quad dx_0 = Y\,dz - Z\,dy, \qquad dy_0 = Z\,dx - X\,dz, \qquad dz_0 = X\,dy - Y\,dx,$$

où les seconds membres sont tous des différentielles exactes. Par suite, si l'on se reporte aux expressions (1), (4) (n° 210) de x, y, z; x_0, y_0, z_0, on voit qu'on aura

$$(2)\quad \begin{cases} x - ix_0 = x + i\int(Z\,dy - Y\,dz) = 2A(t), \\ y - iy_0 = y + i\int(X\,dz - Z\,dx) = 2B(t), \\ z - iz_0 = z + i\int(Y\,dx - X\,dy) = 2C(t), \end{cases}$$

et de même

$$(3)\quad \begin{cases} x + ix_0 = x - i\int(Z\,dy - Y\,dz) = 2A_1(\tau), \\ y + iy_0 = y - i\int(X\,dz - Y\,dx) = 2B_1(\tau), \\ z + iz_0 = z - i\int(Y\,dx - X\,dy) = 2C_1(\tau), \end{cases}$$

Soit (L) le contour donné; quand on se déplace sur ce contour, x, y, z; X, Y, Z deviennent des fonctions d'une certaine variable λ et les formules précédentes, où les intégrales de différentielles totales sont remplacées par des intégrales à une seule différentielle $d\lambda$, donnent les fonctions d'une seule variable A, B, C; A_1, B_1, C_1, exprimées au moyen de λ. Soient $\mathcal{A}(\lambda)$, $\mathcal{B}(\lambda)$, $\mathcal{C}(\lambda)$; $\mathcal{A}_1(\lambda)$, $\mathcal{B}_1(\lambda)$, $\mathcal{C}_1(\lambda)$ les expressions ainsi obtenues. Si le contour (L) est réel et si les valeurs de x, y, z; X, Y, Z sont fournies par des relations numériques ou des lois physiques qui ne permettent pas de déterminer ces variables pour des valeurs imaginaires de λ, les fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ seront incomplètement connues et les formules relatives à la surface

$$(4)\quad \begin{cases} x' = \mathcal{A}(\lambda) + \mathcal{A}_1(\lambda_1), \\ y' = \mathcal{B}(\lambda) + \mathcal{B}_1(\lambda_1), \\ z' = \mathcal{C}(\lambda) + \mathcal{C}_1(\lambda_1) \end{cases}$$

permettront de déterminer seulement les points qui correspondent à des valeurs réelles de λ et de λ_1. Mais si le contour (L) est une

courbe analytique, réelle ou imaginaire, et si les fonctions X, Y, Z qui doivent satisfaire aux deux équations

$$(5)\qquad \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \\ X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0, \end{cases}$$

sont aussi des fonctions analytiques de λ, c'est-à-dire si x, y, z; X, Y, Z ont une signification déterminée aussi bien pour les valeurs imaginaires que pour les valeurs réelles de λ, il en sera de même évidemment des fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ qui devront être regardées comme complètement connues et fourniront la détermination complète des deux courbes minima dont la translation engendre la surface. En remplaçant ces fonctions par leurs valeurs dans les formules précédentes, on aura, pour les coordonnées x', y' z' d'un point quelconque de la surface, les valeurs suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (Y\,dz - Z\,dy), \\ y' = \dfrac{y_1 + y_2}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (Z\,dx - X\,dz), \\ z' = \dfrac{z_1 + z_2}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (X\,dy - Y\,dx), \end{cases}$$

x_1, y_1, z_1 désignant les valeurs de x, y, z pour $\lambda = \lambda_1$ et x_2, y_2, z_2 les valeurs des mêmes variables pour $\lambda = \lambda_2$. On pourra donner à λ_1 et à λ_2 des valeurs imaginaires quelconques; en sorte que les points obtenus dépendront, comme cela doit être, de quatre paramètres réels.

Si le contour (L) est réel et si l'on désigne par λ_0 la valeur de λ correspondant à un point réel déterminé du contour, on pourra prendre

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}(\lambda) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} (Z\,dy - Y\,dz), \\ \mathcal{B}(\lambda) = \dfrac{y}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} (X\,dz - Z\,dx), \\ \mathcal{C}(\lambda) = \dfrac{z}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} (Y\,dx - X\,dy), \end{cases}$$

et la partie réelle de la surface sera définie par les équations

$$(8)\qquad \begin{cases} x' = \mathcal{R}(2\mathcal{A}) = \mathcal{R}\left[x + i\int_{\lambda_0}^{\lambda}(Z\,dy - Y\,dz)\right], \\ y' = \mathcal{R}(2\mathcal{B}) = \mathcal{R}\left[y + i\int_{\lambda_0}^{\lambda}(X\,dz - Z\,dx)\right], \\ z' = \mathcal{R}(2\mathcal{C}) = \mathcal{R}\left[z + i\int_{\lambda_0}^{\lambda}(Y\,dx - X\,dy)\right], \end{cases}$$

où l'on devra donner à λ une valeur imaginaire quelconque.

Il résulte évidemment de la méthode précédente que la surface définie par les équations (6) ou (8) est la seule qui puisse satisfaire à toutes les conditions posées, et il reste seulement à démontrer qu'elle satisfait effectivement à ces conditions. Or, si l'on remarque que, d'après leur définition même, les fonctions $\mathcal{A}(\lambda), \ldots, \mathcal{A}_1(\lambda), \ldots$ vérifient les relations

$$d\mathcal{A}^2 + d\mathcal{B}^2 + d\mathcal{C}^2 = 0, \qquad X\,d\mathcal{A} + Y\,d\mathcal{B} + Z\,d\mathcal{C} = 0,$$
$$d\mathcal{A}_1^2 + d\mathcal{B}_1^2 + d\mathcal{C}_1^2 = 0, \qquad X\,d\mathcal{A}_1 + Y\,d\mathcal{B}_1 + Z\,d\mathcal{C}_1 = 0,$$

on reconnaîtra aisément : 1° que la surface obtenue est une surface minima; 2° qu'elle passe par le contour (L) et y admet en chaque point le plan tangent donné; elle fournit donc bien la solution unique du problème proposé.

En résumé, la méthode de M. Schwarz repose sur les deux propositions suivantes :

Une surface minima est pleinement déterminée quand on donne une courbe analytique tracée sur cette surface et la courbe correspondante tracée sur la surface adjointe.

Lorsqu'on connaît sur une surface minima une courbe (L) *et les plans tangents en chaque point de cette courbe, la courbe correspondante de la surface adjointe peut être déterminée par de simples quadratures.*

247. Dans son Mémoire sur les surfaces minima [1], Lie a donné, pour les formules de M. Schwarz, une démonstration nou-

[1] *Mathematische Annalen*, t. XV, p. 467.

velle que nous allons faire connaître, parce qu'elle peut être généralisée et appliquée à d'autres questions analogues.

Reprenons les équations d'une surface minima sous la forme générale

$$x' = A(t) + A_1(\tau), \qquad y' = B(t) + B_1(\tau), \qquad z' = C(t) + C_1(\tau),$$

où les fonctions A, B, C; A_1, B_1, C_1 satisfont aux relations

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0, \tag{9}$$

$$dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2 = 0. \tag{10}$$

Pour que la surface contienne la courbe donnée (L), il faudra que, x, y, z désignant les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe, coordonnées qui sont des fonctions connues d'un paramètre λ, on puisse déterminer pour t et τ des fonctions de λ satisfaisant aux trois équations

$$x = A + A_1, \qquad y = B + B_1, \qquad z = C + C_1. \tag{11}$$

D'autre part, si X, Y, Z désignent les cosinus directeurs de la normale à la surface au point considéré (x, y, z) de la courbe (L), il faudra exprimer que le plan tangent contient les tangentes aux deux courbes minima de la surface qui passent par ce point, ce qui donnera les deux équations

$$X\,dA + Y\,dB + Z\,dC = 0, \tag{12}$$

$$X\,dA_1 + Y\,dB_1 + Z\,dC_1 = 0, \tag{13}$$

qui, jointes aux précédentes, expriment toutes les conditions du problème. Différentions les équations (11), en supposant qu'on se déplace sur la courbe (L); on aura

$$dx = dA + dA_1, \qquad dy = dB + dB_1, \qquad dz = dC + dC_1. \tag{14}$$

En vertu de ces relations et de l'équation évidente

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

qui exprime que le plan tangent contient la tangente à la courbe (L), et qui doit être vérifiée par les valeurs données de X, Y, Z, les deux équations (12) et (13) se ramèneront l'une à l'autre, et il restera seulement six équations distinctes (9), (10), (12) et (14) qui permettront, en général, de déterminer les différentielles $dA, \ldots, dA_1, \ldots$.

Déduisons, en effet, des équations (14) les valeurs de dA_1, dB_1, dC_1 et portons-les dans la relation (10), nous aurons

$$(15) \qquad dx\,dA + dy\,dB + dz\,dC = \frac{ds^2}{2},$$

s désignant l'arc de (L). Cette équation, jointe aux deux relations (9) et (12), dont l'une est du second degré, va nous donner les valeurs de dA, dB, dC.

A cet effet, prenons comme inconnue auxiliaire [1] le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ dx & dy & dz \\ dA & dB & dC \end{vmatrix};$$

si on l'élève au carré, en effectuant la multiplication des lignes entre elles et tenant compte des relations précédentes, on trouvera

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ds^2 & \frac{ds^2}{2} \\ 0 & \frac{ds^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{ds^4}{4}.$$

On a donc

$$(16) \qquad \Delta = (Y\,dz - Z\,dy)\,dA + (Z\,dx - X\,dz)\,dB + (X\,dy - Y\,dx)\,dC = \pm\frac{i\,ds^2}{2};$$

et l'on est ainsi ramené au système des trois équations (12), (15), et (16), qui sont toutes du premier degré. Le déterminant de ces équations étant égal à ds^2, elles pourront toujours être résolues tant que le contour (L), réel ou imaginaire, ne sera pas une courbe minima. On obtient ainsi, par un calcul facile, les valeurs

---

[1] Toutes les fois que l'on rencontre un système d'équations algébriques dont la résolution peut se ramener à celle d'une équation du second degré à une inconnue, il y a avantage à prendre comme inconnue auxiliaire le déterminant fonctionnel des équations par rapport aux inconnues; car ce déterminant, s'annulant dans le cas où les deux systèmes de solutions se réduisent à un seul, ne peut qu'être égal à la valeur du radical qui doit figurer dans les formules définitives; et, par conséquent, son carré se calculera rationnellement.

suivantes de $d\mathrm{A}$, $d\mathrm{B}$, $d\mathrm{C}$:

$$(17)\qquad \begin{cases} d\mathrm{A} = \dfrac{dx}{2} \pm \dfrac{i}{2}(\mathrm{Y}\,dz - \mathrm{Z}\,dy), \\ d\mathrm{B} = \dfrac{dy}{2} \pm \dfrac{i}{2}(\mathrm{Z}\,dx - \mathrm{X}\,dz), \\ d\mathrm{C} = \dfrac{dz}{2} \pm \dfrac{i}{2}(\mathrm{X}\,dy - \mathrm{Y}\,dx), \end{cases}$$

d'où l'on déduit, à l'aide des formules (14),

$$(18)\qquad \begin{cases} d\mathrm{A}_1 = \dfrac{dx}{2} \mp \dfrac{i}{2}(\mathrm{Y}\,dz - \mathrm{Z}\,dy), \\ d\mathrm{B}_1 = \dfrac{dy}{2} \mp \dfrac{i}{2}(\mathrm{Z}\,dx - \mathrm{X}\,dz), \\ d\mathrm{C}_1 = \dfrac{dz}{2} \mp \dfrac{i}{2}(\mathrm{X}\,dy - \mathrm{Y}\,dx), \end{cases}$$

les signes se correspondant dans les deux systèmes. Prenons, par exemple, les signes inférieurs, et supposons effectuées les quadratures qui donnent les expressions de A, B, C; A_1, B_1, C_1 en fonction de λ. On peut toujours déterminer les constantes qui entrent dans ces quadratures de manière à satisfaire aux équations (11), et l'on retrouve ainsi les formules de M. Schwarz.

248. La méthode précédente peut être généralisée; elle s'appliquerait, par exemple, aux surfaces engendrées par la translation de deux courbes dont l'une satisferait à l'équation différentielle

$$f\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

et l'autre à une équation de même forme

$$\varphi\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0.$$

Elle offre surtout l'avantage de bien mettre en évidence les cas d'exception; ils correspondent, nous allons le voir, à ceux qui sont indiqués par les théories générales de Cauchy.

Nos raisonnements supposent, en effet, que les trois équations (12), (15) et (16) déterminent $d\mathrm{A}$, $d\mathrm{B}$, $d\mathrm{C}$, ce qui n'aura pas lieu si leur déterminant est nul, c'est-à-dire si la courbe (L) est

une courbe minima. Dans ce cas particulier, la méthode tombe en défaut, mais les résultats acquis nous permettent une discussion directe et élémentaire. Il faut, pour que le problème soit possible, que la développable formée par les plans tangents en tous les points de (L) soit un cône ayant son sommet sur le cercle de l'infini (n° 233). Si cette condition n'est pas remplie, le problème sera impossible; si elle l'est, le problème sera indéterminé, car on connaîtra l'une des courbes minima dont la translation peut engendrer la surface : ce sera ici la courbe (L); mais la seconde courbe minima sera assujettie à l'unique condition de couper la courbe (L), d'admettre au point commun une tangente donnée et pourra, d'ailleurs, être tracée arbitrairement. La solution du problème contiendra donc encore une fonction arbitraire, comme le montrerait aussi la discussion des équations (9), (10), (11) et (12), dans ce cas spécial.

Les raisonnements supposent aussi que X, Y, Z sont les cosinus directeurs de la normale en un point de la courbe (L) et satisfont à l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Si la développable formée par les plans tangents en tous les points de la courbe est circonscrite au cercle de l'infini, les formules n'ont aucun sens. Mais on obtient encore une solution du problème posé, fournie par la développable elle-même qui doit être considérée (Note du n° 187) comme une véritable surface minima. Cette solution est la seule qu'on puisse obtenir dans le cas où (L) n'est pas une courbe minima; mais si l'on a à la fois

$$ds^2 = 0, \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

l'indétermination reparaît et l'on obtient encore une infinité de surfaces minima [1]. Cette discussion ne présente aucune diffi-

---

[1] L'interprétation géométrique et la discussion du dernier cas que nous venons de signaler conduisent à une propriété générale des surfaces minima que nous nous contenterons d'énoncer.

Étant donnée une surface minima quelconque, lieu des milieux des droites dont les extrémités s'appuient sur les deux courbes minima (Γ), (Γ₁), *la courbe de contact* (C) *de la développable circonscrite à cette surface et au cercle de l'infini est aussi l'arête de rebroussement de cette développable. On l'obtient en prenant le milieu de tous les segments qui réunissent les points* M,

culté, mais elle offre de l'intérêt au point de vue de la théorie générale des équations aux dérivées partielles.

249. Les formules de M. Schwarz conduisent à un grand nombre de propositions intéressantes que nous allons faire connaître successivement.

Cherchons d'abord les surfaces minima qui contiennent une droite réelle donnée et admettent aux différents points de cette droite des plans tangents donnés. Si l'on prend la droite pour axe des z, les formules (6) deviendront ici

$$(19)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_0^{z_2} Y\,dz - \dfrac{i}{2}\int_0^{z_1} Y\,dz, \\ y' = -\dfrac{i}{2}\displaystyle\int_0^{z_2} X\,dz + \dfrac{i}{2}\int_0^{z_1} X\,dz, \\ z' = \dfrac{z_1 + z_2}{2}, \end{cases}$$

X et Y satisfaisant à la relation

$$(20)\qquad X^2 + Y^2 = 1.$$

On voit immédiatement que, si l'on échange z_1 et z_2, z' ne change pas, x' et y' changent de signe sans changer de valeur. Donc :

Toute droite réelle tracée sur une surface minima est nécessairement un axe de symétrie de cette surface.

Cette proposition élégante, due à M. Schwarz, conduit à une démonstration très simple du théorème de Catalan : *La seule surface minima réelle réglée est la surface de vis à filet carré.*

Considérons, en effet, si elle existe, la surface minima engendrée

---

M_1 *des courbes* (Γ), (Γ_1), *où les tangentes à ces courbes sont parallèles. Tous les points de* (C) *sont des ombilics; cette ligne est une arête de rebroussement de la surface minima, elle satisfait à la définition des lignes asymptotiques et aussi à celle des lignes de courbure.*

Les deux courbes minima dont la translation engendre la surface ne cessent pas, dans leur mouvement, d'être tangentes à la courbe (C), *en sorte que l'on pourrait définir la surface minima comme engendrée par la translation d'une courbe minima* (K) *qui, dans son mouvement, est assujettie à demeurer tangente à une autre courbe minima* (C).

par le mouvement d'une droite réelle, et soient (d_1), (d_2) deux positions de cette droite. La droite (d_3), symétrique de (d_1) par rapport à (d_2), appartient encore, d'après la proposition précédente, à la surface. En prenant de même la symétrique de (d_2) par rapport à (d_3), et répétant indéfiniment cette opération, on obtiendra une série de droites

$$(d_1),\quad (d_2),\quad (d_3),\quad (d_4),\quad \ldots,$$

qui seront toutes sur la surface et qui appartiendront évidemment à tout hélicoïde gauche à plan directeur qui contiendra les deux premières (d) et (d_1). Si nous considérons, en particulier, le plus simple de ces hélicoïdes, celui pour lequel il faut faire moins d'un demi-tour sur la surface pour passer de (d_1) à (d_2), on voit qu'il contiendra un nombre illimité de droites de la surface minima. Si les deux droites (d_1) et (d_2) se rapprochent sur la surface, les droites communes à l'hélicoïde et à la surface se rapprochent indéfiniment : la surface doit donc coïncider avec la position limite de l'hélicoïde, ce qui démontre le théorème de Catalan.

Nous allons exposer encore la démonstration que M. Schwarz a donnée du même théorème, parce qu'elle repose sur une idée ingénieuse et féconde. Lorsqu'une surface réglée contient une droite, les plans tangents en tous les points de cette droite ne sauraient être choisis arbitrairement et sont assujettis à la loi découverte par M. Chasles. Si l'on prend la droite comme axe des z et si l'on choisit convenablement les autres axes coordonnés, les plans tangents de la surface doivent être les mêmes que ceux du paraboloïde défini par l'équation

$$z = \alpha \frac{y}{x},$$

où α désigne une constante. De là résultent, pour les cosinus directeurs de la normale en chaque point, les déterminations

$$X = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}}, \qquad Y = \frac{-\alpha}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}},$$

et, si l'on porte ces valeurs dans les formules (19), on obtiendra la surface cherchée.

En faisant, pour la commodité des calculs,

$$z = \alpha i \sin t,$$

ce qui donne

$$X = i \operatorname{tang} t, \qquad Y = \frac{-1}{\cos t},$$

on trouve

$$x' = \frac{\alpha}{2}(t_2 - t_1),$$

$$y' = \frac{\alpha i}{2}(\cos t_1 - \cos t_2),$$

$$z' = \frac{\alpha i}{2}(\sin t_1 + \sin t_2)$$

et, par suite,

$$x' = \alpha \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{y'}{z'}\right).$$

Cette équation définit bien la surface de vis à filet carré.

250. Revenons aux formules (19); elles ne contiennent en définitive que deux quadratures distinctes

$$y = \frac{1}{2}\int X\,dz, \qquad x = -\frac{1}{2}\int Y\,dz,$$

et l'on a

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dz^2}{4};$$

$\frac{z}{2}$ sera donc l'arc de la courbe décrite par un point dont les coordonnées seraient x et y. Cela nous conduit à la proposition suivante. Prenons, dans le plan des xy, une courbe quelconque (γ). La surface minima la plus générale passant par l'axe des z sera determinée par les formules

$$(21) \qquad \begin{cases} x' = i(x_1 - x_2), \\ y' = i(y_1 - y_2), \\ z' = s_1 + s_2, \end{cases}$$

x_1, y_1; x_2, y_2 désignant les coordonnées de deux points différents de la courbe, s_1 et s_2 étant les arcs de cette courbe comptés à partir d'une origine fixe et terminés en ces deux points. L'interprétation

géométrique des formules est d'ailleurs évidente. *Soient* M *et* N *les deux points de la courbe; par l'origine des coordonnées on mènera une droite parallèle à* MN *et égale à* iMN, *on élèvera à l'extrémité de cette droite une perpendiculaire égale à la somme des arcs de la courbe terminés en* M *et* N; *le sommet de cette perpendiculaire décrira la surface minima.*

On peut donner encore l'interprétation suivante : Les deux courbes minima définies par les équations

$$(22) \qquad x' = ix, \quad y' = iy, \quad z' = s,$$

$$(23) \qquad x' = -ix, \quad y' = -iy, \quad z' = s$$

sont celles dont la translation peut engendrer la surface, et elles sont placées symétriquement par rapport à l'axe des z.

Pour que la surface soit algébrique, il faudra que les deux courbes précédentes soient algébriques, c'est-à-dire que y et x soient des fonctions algébriques de s. En d'autres termes, la courbe (γ) devra être la développée d'une courbe algébrique, d'ailleurs quelconque.

251. Une autre application intéressante des formules de M. Schwarz peut être faite au cas où la courbe (L) par laquelle doit passer la surface est plane. Supposons, pour plus de netteté, que le plan de cette courbe soit réel et choisissons-le pour plan des xy; les formules générales (6) nous donneront ici

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{i}{2}\int_{x_2}^{x_1} Z\,dy, \\ y' &= \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{i}{2}\int_{x_2}^{x_1} Z\,dx, \\ z' &= \frac{i}{2}\int_{x_2}^{x_1} (Y\,dx - X\,dy). \end{aligned} \right.$$

Introduisons l'angle β que fait, en un point de (L), le plan tangent à la surface avec le plan des xy, on aura

$$(25) \qquad X = -\frac{dy}{ds}\sin\beta, \qquad Y = \frac{dx}{ds}\sin\beta, \qquad Z = \cos\beta,$$

s étant l'arc de la courbe, et les formules (24) prendront la forme

$$(26)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{x_2}^{x_1} \cos\beta\, dy, \\ y' = \dfrac{y_1 + y_2}{2} - \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{x_2}^{x_1} \cos\beta\, dx, \\ z' = \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{x_2}^{x_1} \sin\beta\, ds. \end{cases}$$

Si l'on veut que la ligne (L) soit une ligne de courbure de la surface, les normales en tous les points de (L) devront envelopper une des développées de la courbe et l'angle β devra être constant. On aura alors

$$(27)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{x_1 + iy_1\cos\beta}{2} + \dfrac{x_2 - iy_2\cos\beta}{2}, \\ y' = \dfrac{y_1 - ix_1\cos\beta}{2} + \dfrac{y_2 + ix_2\cos\beta}{2}, \\ z' = \dfrac{i(s_1 - s_2)\sin\beta}{2}. \end{cases}$$

Les deux courbes minima dont la translation engendre la surface seront définies par les équations

$$(28)\quad x' = \frac{x_1 \pm iy_1\cos\beta}{2}, \qquad y' = \frac{y_1 \mp ix_1\cos\beta}{2}, \qquad x' = \pm\frac{is_1\sin\beta}{2}.$$

Pour qu'elles soient algébriques, il faudra encore que (L) soit la développée d'une courbe algébrique; on a donc le théorème suivant, dû à Lie :

Pour que la surface minima admettant une ligne de courbure plane soit algébrique, il faut et il suffit que cette ligne plane soit la développée d'une courbe algébrique.

Cette proposition générale explique pourquoi les lignes de courbure planes de la surface d'Enneper sont des courbes rectifiables (n° 207).

Si l'on suppose $\beta = \frac{\pi}{2}$, la courbe (L) devient une ligne géodésique de la surface. On retrouve donc le théorème suivant :

Pour que la surface minima admettant comme ligne géodé-

sique une courbe plane soit algébrique, il faut et il suffit que cette ligne soit la développée d'une courbe algébrique,

qui est dû à M. Henneberg et qui a été le point de départ des travaux de Lie sur cette partie de la théorie.

Si, dans les formules (27), on fait $\beta = \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$(29) \qquad x' = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y' = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z' = i\frac{s_1 - s_2}{2};$$

on est ainsi conduit à la construction suivante de la surface minima :

Soit MN *une corde de la courbe* (L). *Élevons en son milieu une perpendiculaire au plan de la courbe, égale au produit de i par la demi-différence des arcs de la courbe terminés en* M *et en* N. *Le sommet de cette perpendiculaire décrit la surface minima qui admet* (L) *pour ligne géodésique.*

Si l'on échange les points M et N, le signe de la perpendiculaire est changé; on a donc, dans tous les cas, ce théorème :

Si une surface minima admet une courbe plane comme ligne géodésique, le plan de cette courbe est nécessairement un plan de symétrie de la surface.

Ces propriétés de symétrie, que nous avons déjà rencontrées à propos de la ligne droite, ont leur véritable origine dans le fait, qui est mis en évidence par les formules de M. Schwarz, mais qui résulte aussi des théorèmes de Cauchy, qu'il existe *une seule* surface minima tangente à une développable donnée en tous les points d'une courbe donnée. Car, soit (M) une surface minima admettant la ligne géodésique plane (L) et coupant, par suite, à angle droit le plan de cette ligne; la surface (M') symétrique de (M) par rapport au plan de (L) admettra, en tous les points de cette courbe, les mêmes plans tangents que M et coïncidera par conséquent avec elle; (M) sera donc nécessairement symétrique par rapport au plan de la courbe (L). Ce raisonnement, que l'on pourrait appliquer au cas de la ligne droite, permet de reconnaître que, si (L) a un centre, ce point sera aussi un centre de la surface, et que, si cette courbe a un axe, le plan normal au plan de (L) et passant par cet axe sera un nouveau plan de symétrie de la surface,

On peut donner encore la construction suivante de la surface qui admet (L) pour ligne géodésique : Sur le cylindre ayant (L) pour section droite, traçons une courbe minima (γ) et prenons la symétrique (γ_1) de cette courbe par rapport au plan de (L). La surface cherchée sera le lieu des milieux des segments dont les extrémités décrivent les courbes (γ) et (γ_1).

La surface minima qui admet comme ligne géodésique une parabole a été étudiée dans les premiers Mémoires de Catalan. Si l'on prend les coordonnées d'un point de la parabole sous la forme

$$(30)\qquad \begin{cases} x = -2p\sin^2\varphi, \\ y = 2pi\sin\varphi, \end{cases}$$

la partie réelle de la surface sera définie par les équations

$$(31)\qquad \begin{cases} x = \mathcal{R}(-p\sin^2\varphi), \\ y = \mathcal{R}(2pi\sin\varphi), \\ z = \mathcal{R}\left[\dfrac{p(2\varphi + \sin 2\varphi)}{2}\right]. \end{cases}$$

En donnant à φ une valeur réelle, on reconnaît que la section de la surface par le plan des xz est une cycloïde. Cette courbe, située dans le plan de symétrie passant par l'axe de la parabole, est aussi une ligne géodésique de la surface.

La surface minima qui admet comme ligne géodésique une ellipse ou une hyperbole est nécessairement transcendante; mais elle contient, on le reconnaît aisément, une famille de lignes algébriques. Elle a été considérée par M. Schwarz [1].

252. On peut faire, des formules (24), une application d'un genre tout différent. Supposons que la courbe (L) soit un cercle et que les plans tangents en tous les points de ce cercle soient assujettis à être parallèles à une droite fixe. On pourra supposer que l'on ait pris pour axe des z l'axe même du cercle et aussi que l'on ait pris le plan des xz parallèle à la droite fixe. Alors l'équation du cercle dans son plan sera

$$(32)\qquad x^2 + y^2 = R^2,$$

---

[1] Schwarz, *Ueber diejenigen Minimalflächen welche von einer Schaar von Kegeln zweiten Grades eingehüllt werden* (*Journal de Crelle*, t. LXXX, p. 301-304, 1875).

ce qui permettra de poser

$$x = \mathrm{R}\cos\varphi, \qquad y = \mathrm{R}\sin\varphi. \tag{33}$$

Quant aux cosinus directeurs de la normale, ils sont déterminés par les trois équations

$$-\mathrm{X}\sin\varphi + \mathrm{Y}\cos\varphi = 0, \qquad \mathrm{Z} = m\mathrm{X},$$
$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 = 1,$$

qui donnent

$$\mathrm{X} = \frac{\cos\varphi}{\Delta}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{\sin\varphi}{\Delta}, \qquad \mathrm{Z} = \frac{m\cos\varphi}{\Delta},$$

Δ ayant pour valeur

$$\Delta = \sqrt{(1+m^2)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}. \tag{34}$$

Les formules de M. Schwarz nous donnent donc, pour les coordonnées d'un point de la surface, les expressions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\mathrm{R}}{2}(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) + \frac{i\mathrm{R}m}{2}\int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta},\\ y &= \frac{\mathrm{R}}{2}(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) + \frac{i\mathrm{R}m}{2}\int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\Delta},\\ z &+ \frac{i\mathrm{R}}{2}\int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\Delta}. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Les intégrales qui figurent dans ces formules sont des intégrales elliptiques. Pour les ramener à la forme normale, nous poserons

$$k^2 = \frac{m^2}{1-m^2}, \qquad k'^2 = \frac{1}{1+m^2}, \qquad m = \frac{k}{k'}, \tag{36}$$

$$\cos\varphi = \mathrm{cn}\,u, \qquad \sin\varphi = \mathrm{sn}\,u, \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{k'}\mathrm{dn}\,u, \tag{37}$$

ce qui donnera aux équations précédentes la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\mathrm{R}}{2}(\mathrm{cn}\,u_1 + \mathrm{cn}\,u_2) + \frac{i\mathrm{R}k}{2}\int_{u_2}^{u_1}\mathrm{cn}^2 u\,du,\\ y &= \frac{\mathrm{R}}{2}(\mathrm{sn}\,u_1 + \mathrm{sn}\,u_2) + \frac{i\mathrm{R}k}{2}\int_{u_2}^{u_1}\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,du,\\ z &= \frac{i\mathrm{R}k'}{2}(u_1 - u_2). \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Si l'on introduit la fonction uniforme bien connue

$$(39)\qquad Z(u) = k^2 \int_0^u \operatorname{sn}^2 u\, du,$$

les formules précédentes peuvent s'écrire

$$(40)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{R}{2}(\operatorname{cn} u_1 + \operatorname{cn} u_2) + \dfrac{ikR}{2}(u_1 - u_2) + \dfrac{iR}{2k}[Z(u_2) - Z(u_1)], \\ y = \dfrac{R}{2}(\operatorname{sn} u_1 + \operatorname{cn} u_2) + \dfrac{iR}{2k}(\operatorname{dn} u_2 - \operatorname{dn} u_1), \\ z = \dfrac{iRk'}{2}(u_1 - u_2). \end{cases}$$

Posons, pour avoir la partie réelle de la surface,

$$u_2 = \alpha + \beta i, \qquad u_1 = \alpha - \beta i;$$

les formules d'addition des fonctions elliptiques nous donneront

$$(41)\qquad \begin{cases} x = kR\beta + \dfrac{iR}{k} Z(\beta i) + R \operatorname{cn} \beta i \dfrac{\operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\beta i + ik \operatorname{sn}\beta i}{\operatorname{dn}\beta i + ik \operatorname{cn}\alpha \operatorname{sn}\beta i}, \\ y = R \operatorname{cn}\beta i \dfrac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{dn}\beta i + ik \operatorname{cn}\alpha \operatorname{sn}\beta i}, \\ z = k'R\beta. \end{cases}$$

On peut déterminer un angle ψ par les formules

$$(42)\qquad \cos\psi = \frac{\operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\beta i + ik \operatorname{sn}\beta i}{\operatorname{dn}\beta i + ik \operatorname{cn}\alpha \operatorname{sn}\beta i}, \qquad \sin\psi = \frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{dn}\beta i + ik \operatorname{cn}\alpha \operatorname{sn}\beta i}$$

et, par suite, en substituant ψ à α, présenter les équations qui déterminent la surface sous la forme

$$(43)\qquad \begin{cases} x = kR\beta + \dfrac{iR}{k} Z(\beta i) + R \operatorname{cn}\beta i \cos\psi, \\ y = R \operatorname{cn}\beta i \sin\psi, \\ z = k'R\beta, \end{cases}$$

qui montre que *la surface est engendrée par un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe des z.*

On peut, d'ailleurs, éliminer β, ψ et écrire l'équation de la surface en coordonnées cartésiennes

$$(44)\qquad \left[x - \frac{k}{k'} z - \frac{iR}{k} Z\left(\frac{iz}{Rk'}\right)\right]^2 + y^2 = R^2 \operatorname{cn}^2 \frac{iz}{Rk'}.$$

Cette surface a été découverte par Riemann [1]. Dans une Note insérée en 1913 au Tome 156 des *Comptes rendus*, p. 928 et 971, l'Auteur a montré qu'elle est la surface minima réelle la plus générale qui puisse être engendrée par un cercle.

Nous terminerons ici ces applications des formules de M. Schwarz. Comme l'a remarqué O. Bonnet, la solution du problème étudié dans ce Chapitre permet de déterminer une surface minima lorsqu'on connaît, soit une de ses lignes géodésiques, soit une de ses lignes asymptotiques, soit une ligne de courbure, soit enfin une de ses lignes d'ombre ou une de ses lignes de perspective; car toutes ces conditions font connaître, en même temps qu'une ligne tracée sur la surface, le point tangent en chaque point de cette ligne.

---

[1] *Voir* RIEMANN, *Œuvres mathématiques* traduites par *L. Laugel*, p. 305 et suiv.

CHAPITRE IX.

SURFACES MINIMA ALGÉBRIQUES INSCRITES DANS UNE DÉVELOPPABLE ALGÉBRIQUE.

Cas où la développable est un cylindre. — Le problème n'est possible que si la section droite est rectifiable. — Solution analytique du problème proposé. — Première solution géométrique. — Construction générale des surfaces minima algébriques inscrites dans une développable algébrique. — Théorèmes relatifs à des cas particuliers donnés par M. Lie. — Deuxième solution géométrique. — Génération nouvelle des surfaces minima due à Ribaucour. — Définition et principale propriété des *congruences isotropes*. — Le problème se ramène à la détermination d'une surface réglée dont la ligne de striction doit satisfaire a une condition donnée.

---

253. Les résultats que nous avons exposés dans le Chapitre précédent conduisent naturellement à l'examen d'une question dont la solution offrirait un grand intérêt pour la théorie des surfaces minima algébriques :

A. *Déterminer toutes les surfaces minima algébriques contenant une courbe algébrique donnée;*

ou plus généralement :

B. *Déterminer toutes les surfaces minima algébriques inscrites dans une surface algébrique donnée.*

Aucun de ces problèmes n'a encore été abordé dans toute sa généralité; mais, dans son second Mémoire inséré au Tome XV des *Mathematische Annalen*, Lie a soumis à une discussion approfondie le problème B, dans le cas où la surface algébrique donnée est une développable. Il résulte de ses belles recherches que le problème peut être complètement résolu si cette développable est un cône, et aussi dans le cas où, la développable étant quelconque, on connaît déjà une surface minima inscrite dans cette développable. Nous allons reprendre ici l'étude de cette

question, et nous montrerons que l'on peut obtenir la solution complète du problème posé par Lie.

Commençons par considérer le cas où la développable (Δ) est un cylindre. La proposition suivante, due à M. Henneberg, permet de reconnaître immédiatement que le problème posé n'est pas toujours possible :

Lorsqu'une surface minima est algébrique, la section droite de tout cylindre circonscrit à la surface est la développée d'une courbe algébrique.

Soit en effet (Σ) la surface minima donnée; la surface adjointe (Σ_0) sera algébrique (n° 210), et l'on aura, entre les points correspondants (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0) des deux surfaces, les relations différentielles

$$(1)\qquad \begin{cases} dx\,dx_0 + dy\,dy_0 + dz\,dz_0 = 0, \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2, \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre les suivantes (n° 212) :

$$\begin{aligned} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz &= 0, \\ X\,dx_0 + Y\,dy_0 + Z\,dz_0 &= 0, \end{aligned}$$

par lesquelles on exprime qu'aux points correspondants des deux surfaces les plans tangents sont parallèles.

Considérons sur la première surface la courbe de contact dn cylindre circonscrit parallèle à l'axe des z, à laquelle correspondra la courbe de même définition sur (Σ_0). On aura, en tous les points de cette courbe,

$$Z = 0,$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned} X\,dx + Y\,dy &= 0, \\ X\,dx_0 + Y\,dy_0 &= 0, \end{aligned}$$

ou, en éliminant le rapport $\frac{X}{Y}$,

$$(2)\qquad dx\,dy_0 - dy\,dx_0 = 0.$$

Si, entre les éqnations (1) et (2), on élimine successivement

dx_0, dy_0 et dx, dy, on sera conduit aux deux relations

$$(3) \qquad \sqrt{dx^2 + dy^2} = dz_0,$$

$$(4) \qquad \sqrt{dx_0^2 + dy_0^2} = dz,$$

qu'il serait aisé d'obtenir par la Géométrie et qui démontrent le théorème de M. Henneberg; car la première, par exemple, exprime que l'arc de la section droite du cylindre circonscrit à (Σ) est égal à z_0.

Il résulte évidemment du théorème de M. Henneberg qu'une surface minima inscrite dans un cylindre ne pourra être algébrique que si la section droite de ce cylindre est la développée d'une courbe algébrique. Considérons un cylindre (C), pour lequel cette condition soit remplie, et dont la section droite (S) sera placée dans le plan des xy; proposons-nous de déterminer toutes les surfaces minima algébriques inscrites dans ce cylindre.

Désignons par x, y les coordonnées d'un point quelconque de (S); le problème sera résolu si nous parvenons à déterminer les quantités déjà définies x_0, y_0, z_0, z en fonction de x et de y. La formule (3) nous donne d'abord

$$z_0 = s,$$

s désignant l'arc de la section droite (S); les équations (1) et (2) nous permettent ensuite de déterminer dx_0, dy_0, et nous donnent

$$(5) \qquad dx_0 = -dz\,\frac{dx}{ds}, \qquad dy_0 = -dz\,\frac{dy}{ds};$$

z sera donc, au signe près, l'arc de la courbe décrite par le point (x_0, y_0), et l'interprétation géométrique des formules conduit sans difficulté à la construction suivante :

On associe, dans le plan des xy, à la courbe (S), *section droite du cylindre donné* (C), *une courbe* (S_0), *assujettie à l'unique condition d'être la développée d'une courbe algébrique, et l'on établit une correspondance entre les deux courbes par la condition que les tangentes aux points correspondants* M, M_0 *soient parallèles. Si l'on élève en* M *une perpendiculaire au plan de* (S) *égale et de signe contraire à l'arc de* (S_0) *terminé en* M_0, *l'extrémité de cette perpendiculaire décrira sur le cylindre* (C) *la courbe de contact de la*

surface minima algébrique la plus générale (Σ) *inscrite dans ce cylindre. Si on élève de même en* M_0 *une perpendiculaire égale à l'arc de* (S) *terminé en* M, *l'extrémité de cette perpendiculaire décrira la courbe de la surface* (Σ_0) *adjointe à* (Σ), *qui correspond à la courbe de contact de* (Σ) *et de* (C).

Nous savons d'ailleurs (n° 246) comment on peut déduire, sans aucune intégration, des expressions x, y, z; x_0, y_0, z_0, les équations qui définissent la surface. Le problème est ainsi complètement résolu.

Si l'on suppose que le cylindre (C) se réduise à une droite, on retrouve comme cas particulier la construction, qui a été donnée au n° 250, pour les surfaces minima assujetties à contenir une droite donnée.

254. Passons maintenant à l'étude du problème général, et proposons-nous de déterminer toutes les surfaces minima algébriques inscrites dans une développable algébrique donnée (Δ).

Si l'on écrit l'équation du plan sous la forme

$$(u+u_1)X + i(u_1-u)Y + (uu_1-1)Z + \xi = 0,$$

on a, pour toute surface minima, en vertu de l'équation (5) (n° 193),

$$(6) \qquad \xi = 2u_1 f(u) + 2u f_1(u_1) - (1+uu_1)[f'(u) + f'_1(u_1)].$$

D'autre part, on définira la développable (Δ) de la manière la plus générale en supposant que, pour les plans tangents de cette développable, u, u_1, ξ soient des fonctions algébriques données d'une variable auxiliaire t; et, pour résoudre le problème, il faudra exprimer que l'équation (6) est vérifiée identiquement quand on y remplace u, u_1, ξ par leurs expressions en fonction de t. Cette équation contient deux fonctions arbitraires $f(u)$, $f_1(u_1)$ avec leurs dérivées $f'(u)$, $f'_1(u_1)$; si l'on se donnait arbitrairement l'une de ces deux fonctions, l'équation de condition à laquelle on est conduit en substituant pour u, u_1, ξ leurs expressions en fonction de t serait une véritable équation différentielle qui n'admettrait pas nécessairement de solution algébrique; pour échapper à cette difficulté, nous introduirons la variable auxiliaire

$$(7) \qquad \lambda = f(u)\frac{du_1}{dt} + f_1(u_1)\frac{du}{dt}.$$

Si l'on différentie cette valeur de λ, on aura

$$[f'(u)+f'_1(u_1)]\frac{du}{dt}\frac{du_1}{dt}=\frac{d\lambda}{dt}-f(u)\frac{d^2u_1}{dt^2}-f_1(u_1)\frac{d^2u}{dt^2},$$

et, en substituant la valeur ainsi obtenue de la somme

$$f'(u)+f'_1(u_1)$$

dans l'équation (6), on obtiendra la relation

$$(8)\qquad \begin{aligned}&[\xi-2u_1f(u)-2uf_1(u_1)]\frac{du}{dt}\frac{du_1}{dt}\\ &=(1+uu_1)\left[f(u)\frac{d^2u_1}{dt^2}+f_1(u_1)\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{d\lambda}{dt}\right].\end{aligned}$$

On peut maintenant déduire des équations (7) et (8) les expressions de $f(u)$, $f_1(u_1)$, ce qui donne les valeurs suivantes :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}\Theta f(u) &= \lambda\left[2u\frac{du_1}{td}\frac{du}{dt}+(1+uu_1)\frac{d^2u}{dt^2}\right]\\ &\quad-\xi\frac{du_1}{dt}\frac{du^2}{dt^2}-(1+uu_1)\frac{d\lambda}{dt}\frac{du}{dt},\\ \Theta f_1(u_1) &= -\lambda\left[2u_1\frac{du}{dt}\frac{du_1}{dt}+(1+uu_1)\frac{d^2u_1}{dt^2}\right]\\ &\quad+\xi\frac{du}{dt}\frac{du_1^2}{dt^2}+(1+uu_1)\frac{d\lambda}{dt}\frac{du_1}{dt},\end{aligned}\right.$$

Θ désignant le dénominateur commun

$$\Theta=2u\frac{du}{dt}\frac{du_1^2}{dt^2}-2u_1\frac{du_1}{dt}\frac{du^2}{dt^2}+(1+uu_1)\left(\frac{d^2u}{dt^2}\frac{du_1}{dt}-\frac{d^2u_1}{dt^2}\frac{du}{dt}\right).$$

Prenons pour λ une fonction algébrique quelconque de t. Si, dans la première équation (9), on exprime u_1, t, ξ en fonction de u, on aura $f(u)$; si, dans la seconde, on exprime de même u, t, ξ en fonction de u_1, cette équation donnera $f_1(u_1)$.

Le problème est ainsi complètement résolu; pour que la surface soit réelle, il sera nécessaire et suffisant que la fonction λ le soit, s'il est supposé toutefois que t soit un paramètre dont les valeurs réelles donnent des plans tangents réels de la développable (Δ).

La solution précédente serait illusoire si la fonction Θ était nulle identiquement : supposons que cette circonstance se présente et

que l'on ait

$$\Theta = 2u\frac{du}{dt}\frac{du_1^2}{dt^2} - 2u_1\frac{du_1}{dt}\frac{du^2}{dt^2} + (1+uu_1)\left(\frac{d^2u}{dt^2}\frac{du_1}{dt} - \frac{du}{dt}\frac{d^2u_1}{dt^2}\right) = 0.$$

Cette relation constitue une équation différentielle dont on obtient aisément l'intégrale générale, qui est

$$Au + Bu_1 + C(uu_1 - 1) = 0,$$

A, B, C désignant des constantes. Cette équation en termes finis exprime que le plan tangent est parallèle à une direction fixe; la développable (Δ) sera donc un cylindre; et, en effet, une étude directe nous a montré que, dans ce cas, le problème n'est pas toujours possible : la surface minima inscrite ne peut être algébrique que si la section droite du cylindre est la développée d'une courbe algébrique.

La méthode que nous avons suivie s'applique du reste à ce cas particulier; si l'on suppose que le cylindre soit parallèle à l'axe des y, il sera défini par les équations

$$u_1 = u, \qquad \xi = \psi(u).$$

Si l'on prend ici $t = u$, on aura

$$\lambda = f(u) + f_1(u),$$

et l'équation à résoudre prend la forme

$$\psi(u) + (1+u^2)\frac{d\lambda}{du} - 2u\lambda = 0.$$

Elle admet pour intégrale la suivante :

$$\frac{\lambda}{1+u^2} + \int\frac{\psi(u)\,du}{(1+u^2)^2} = 0;$$

il faudra donc, pour que λ soit algébrique, qu'il en soit de même de la quadrature

$$\int\frac{\psi(u)\,du}{(1+u^2)^2},$$

et l'on retrouve ainsi, par un calcul facile, la condition à la fois nécessaire et suffisante qui résulte du théorème de M. Henneberg.

255. La solution que nous venons d'exposer est purement

analytique; la suivante offre l'avantage de conduire à une construction géométrique simple des surfaces minima algébriques inscrites dans la développable (Δ).

Soit (R) l'arête de rebroussement de cette développable : rapportons les points de l'espace, comme nous l'avons déjà fait (Livre I, Chap. I), au trièdre mobile (T) formé par la tangente, la normale principale et la binormale à cette courbe. Les projections sur ces trois axes des déplacements infiniment petits d'un point, dont les coordonnées relatives à ces axes sont X, Y, Z, auront pour expressions (n° 4)

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &dX + ds - \frac{Y}{\rho}\,ds,\\ &dY + \left(\frac{X}{\rho} - \frac{Z}{\tau}\right)ds,\\ &dZ + \frac{Y}{\tau}\,ds. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, le problème sera résolu si l'on trouve deux courbes algébriques (C), (C_0), l'une (C) tracée sur la développable (Δ), l'autre (C_0) située dans l'espace, satisfaisant aux conditions suivantes : les éléments correspondants des deux courbes seront à la fois égaux et perpendiculaires; de plus, si M et M_0 sont les points correspondants de ces deux courbes, le plan tangent en M à la développable (Δ) devra être parallèle à la tangente en M_0 à (C_0). En effet, si l'on considère la surface minima inscrite à (Δ) suivant la courbe (C), la courbe (C) aura pour conjuguée (C_0) sur la surface adjointe, et, ces deux courbes (C), (C_0) étant algébriques, il en sera de même de la surface minima.

Soient x, o, o les coordonnées de M par rapport au trièdre (T) et x_0, y_0, z_0 celles de M_0. Les projections du déplacement de M seront, d'après les formules rappelées plus haut,

$$(11)\qquad dx + ds,\qquad \frac{x\,ds}{\rho},\qquad o;$$

celles du déplacement de M_0 seront de même

$$(12)\quad dx_0 + ds - \frac{y_0}{\rho}\,ds,\qquad dy_0 + \left(\frac{x_0}{\rho} - \frac{z_0}{\tau}\right)ds,\qquad dz_0 + \frac{y_0}{\tau}\,ds.$$

En exprimant que la tangente en M_0 est parallèle au plan des xy,

on trouve cette première condition

$$dz_0 + \frac{y_0}{\tau}\, ds = 0. \tag{13}$$

Si l'on écrit ensuite que les deux déplacements sont à la fois égaux et perpendiculaires, on obtient les deux conditions nouvelles

$$(dx + ds)^2 + \frac{x^2 ds^2}{\rho^2} = \left(dx_0 + ds - \frac{y_0 ds}{\rho}\right)^2 + \left[dy_0 + \left(\frac{x_0}{\rho} - \frac{z_0}{\tau}\right) ds\right]^2,$$

$$(dx + ds)\left(dx_0 + ds - \frac{y_0 ds}{\rho}\right) + \frac{x\, ds}{\rho}\left[dy_0 + \left(\frac{x_0}{\rho} - \frac{z_0}{\tau}\right) ds\right] = 0,$$

que l'on ramène facilement aux suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &\pm (dx + ds) = dy_0 + \left(\frac{x_0}{\rho} - \frac{z_0}{\tau}\right) ds, \\ &\mp \frac{x\, ds}{\rho} = dx_0 + ds - \frac{y_0 ds}{\rho}, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

où les signes se correspondent. Il est aisé de voir que les équations (13) et (14) peuvent donner les valeurs de y_0, z_0, x en fonction de x_0; car, si l'on différentie la seconde des équations (14) après l'avoir écrite sous la forme

$$\pm x - y_0 = -\rho\left(\frac{dx_0}{ds} + 1\right),$$

on obtient, en tenant compte de la première, la relation nouvelle

$$\frac{x_0}{\rho} - \frac{z_0}{\tau} \mp 1 = -\rho \frac{d}{ds}\left[\rho\left(\frac{dx_0}{ds} + 1\right)\right], \tag{15}$$

qui, jointe à l'équation (13) et à la seconde équation (14), nous donne les valeurs suivantes de z_0, y_0, x :

$$\left\{\begin{aligned} &z_0 = \mp \tau + \frac{\tau}{\rho} x_0 + \tau \frac{d}{ds}\left[\rho\left(\frac{dx_0}{ds} + 1\right)\right], \\ &y_0 = -\tau \frac{dz_0}{ds}, \\ &x = \pm y_0 \mp \rho\left(\frac{dx_0}{ds} + 1\right). \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Ces formules donnent la solution complète du problème proposé. Si la développable (Δ) est algébrique, il suffira de

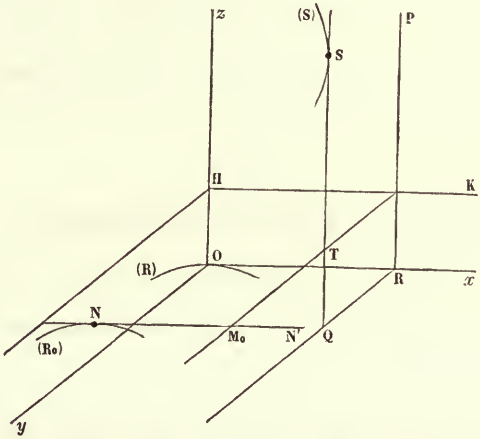
prendre pour x_0 une fonction algébrique du paramètre dont dépendent algébriquement les éléments de la développable; les fonctions z_0, y_0, x et, par suite, la surface minima correspondante seront également algébriques.

256. Les formules que nous venons d'obtenir s'interprètent géométriquement de la manière suivante.

Construisons (*fig.* 16) le trièdre (T) et soit PRQ le plan défini par l'équation

$$x = x_0.$$

Fig. 16.



Quand le trièdre (T) se déplace, ce plan enveloppe une développable (D); si x_0, y', z' désignent les coordonnées d'un de ses points, les projections du déplacement de ce point sur les trois axes seront, conformément aux formules (10),

$$(17)\quad dx_0 + ds\left(1 - \frac{y'}{\rho}\right), \qquad dy' + \left(\frac{x_0}{\rho} - \frac{z'}{\tau}\right) ds, \qquad dz' + \frac{y'}{\tau} ds.$$

Par conséquent, l'équation

$$dx_0 + ds\left(1 - \frac{y'}{\rho}\right) = 0,$$

qui définit les points du plan dont le déplacement est perpendiculaire à Ox, c'est-à-dire parallèle au plan, représentera la génératrice de contact du plan avec son enveloppe (D); la droite QS

ainsi obtenue est évidemment parallèle à Oz et l'on déterminera son point de contact S avec l'arête de rebroussement (S) de (D), en écrivant l'équation

$$dy' + \left(\frac{x_0}{\rho} - \frac{z'}{\tau}\right) ds = 0,$$

par laquelle on exprime que le déplacement de ce point est aussi perpendiculaire à Oy. Les deux formules précédentes nous conduisent, pour les coordonnées du point S, aux expressions

$$(18) \quad \begin{cases} y' = \rho\left(1 + \dfrac{dx_0}{ds}\right), \\ z' = \dfrac{\tau x_0}{\rho} + \tau \dfrac{dy'}{ds} = \dfrac{\tau x_0}{\rho} + \tau \dfrac{d}{ds}\left[\rho\left(1 + \dfrac{dx_0}{ds}\right)\right]. \end{cases}$$

La comparaison de ces résultats avec la première des formules (16) nous donne d'abord

$$(19) \qquad z_0 = z' \mp \tau.$$

D'après cela, si l'on porte sur SQ une longueur

$$ST = \mp \tau,$$

le plan HKT, mené par le point T parallèlement au plan des xy, aura pour équation

$$z = z_0,$$

et, si nous désignons par x'', y'', z_0 les coordonnées d'un quelconque de ses points, les projections du déplacement de ce point seront

$$(20) \qquad dx'' + ds\left(1 - \frac{y''}{\rho}\right) \quad dy'' + \left(\frac{x''}{\rho} - \frac{z_0}{\tau}\right) ds, \quad dz_0 + \frac{y''}{\tau} ds;$$

par suite, l'équation

$$(21) \qquad y'' = -\tau \frac{dz_0}{ds} = y_0$$

définira l'arête de contact NN′ du plan avec la développable qu'il enveloppe, développable que nous désignerons par (Δ_0); et, si l'on joint à la précédente la relation

$$(22) \qquad \frac{dy''}{ds} + \frac{x''}{\rho} - \frac{z_0}{\tau} = 0,$$

ces deux formules (21), (22) définiront le point de contact N de NN′ avec l'arête de rebroussement de (Δ_0).

Le point M_0 où la droite NN′ coupe le plan PRQ a pour coordonnées x_0, y_0, z_0; il décrit donc la courbe cherchée (C_0), tandis que la droite NN′ engendre la développable (Δ_0). Si l'on remarque enfin que la dernière formule (16) peut se mettre sous la forme

$$x = \pm(y_0 - y') = \pm TM_0, \tag{23}$$

on sera conduit à la construction suivante :

Étant donnée la développable (Δ), *on construit une courbe algébrique* (S) *dont les tangentes soient perpendiculaires aux plans tangents de* (Δ) *et dont les plans osculateurs soient, par suite, perpendiculaires aux génératrices de* (Δ); *sur une droite* SQ *tangente en* S *à* (S), *on porte la longueur*

$$ST = \pm\tau,$$

τ *désignant le rayon de torsion de l'arête de rebroussement* (R) *de* (Δ) *au point* O *où cette courbe* (R) *est touchée par le plan tangent de* (Δ) *perpendiculaire à* SQ. *Le plan mené par le point* T *normalement à* SQ *enveloppe la développable* (Δ_0) *et la touche suivant une droite* NN′, *nécessairement parallèle à la tangente de* (R) *en* O. *La projection* M_0 *de l'un des points* S, T *sur cette génératrice de* (Δ_0) *décrit la courbe* (C_0). *Pour obtenir la courbe* (C), *on portera sur la tangente de* (R) *en* O *une longueur égale à*

$$\pm TM_0.$$

257. De cette construction générale on peut déduire toutes celles qui sont relatives à des cas particuliers et qui ont été données par Lie. Supposons d'abord que la développable (Δ) soit un cône : son arête de rebroussement, réduite à un point, devra être considérée comme homothétique à une courbe finie, le rapport d'homothétie étant nul. Il faudra donc supposer dans la construction précédente

$$\tau = 0.$$

Le point T se confondra donc avec le point S et le plan HKT

deviendra le plan normal en S à la courbe (S). Par suite, la ligne NN′ sera l'axe du cercle osculateur et le point M_0 le centre de courbure de (S). On est ainsi conduit à la construction suivante, qui est due à Lie [1] :

Pour obtenir la surface minima algébrique la plus générale inscrite dans un cône algébrique, on construira une courbe algébrique quelconque (S) *dont les plans osculateurs soient perpendiculaires aux génératrices du cône, et l'on portera sur chacune des génératrices du cône, à partir du sommet, une longueur égale au rayon de courbure de* (S) *au point correspondant. L'extrémité de cette longueur décrira sur le cône la courbe* (C) *de contact d'une surface minima algébrique, inscrite dans le cône; la surface adjointe de cette surface minima contiendra le lieu des centres de courbure de* (S).

258. Nous indiquerons une autre application particulière relative au cas où la courbe (S), mentionnée au n° 256, se réduit à un point. S'il en est ainsi, les composantes (17) du déplacement du point S devront être toutes nulles, et l'on aura à ajouter aux équations (18) la suivante :

$$dz' + \frac{y'}{\tau}\,ds = 0,$$

qui nous donne

$$y' = -\tau\frac{dz'}{ds}.$$

Comme on a, d'ailleurs,

$$y_0 = -\tau\frac{dz_0}{ds},$$

l'expression (23) de x prendra la forme

$$x = \mp\tau\frac{d(z_0 - z')}{ds},$$

ou, en tenant compte de l'équation (19),

$$x = \tau\frac{d\tau}{ds}.$$

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. XV, p. 488.

Cette expression de x donne le curieux théorème suivant :

Étant donnée une courbe algébrique (R), *si l'on porte sur les tangentes à cette courbe, à partir du point de contact, une longueur égale à*

$$\tau \frac{d\tau}{ds},$$

on obtiendra une courbe (C) *suivant laquelle une surface minima algébrique* (M) *sera inscrite à la développable formée par les tangentes de* (R).

Remarquons, une fois pour toutes, que les propositions données dans ce Chapitre sont applicables aux courbes et aux développables transcendantes. Dans ce cas, au lieu de surfaces minima algébriques, les opérations indiquées nous donneront des surfaces minima que l'on pourra déterminer sans aucune intégration. C'est ainsi que le théorème précédent nous conduit, si la courbe (R) est transcendante, à une surface minima dont on peut écrire les équations sans aucun signe de quadrature.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier directement cette proposition par l'application des formules de M. Schwarz. On trouve ainsi pour déterminer la surface les formules suivantes :

$$(24)\qquad \begin{cases} x = \mathcal{R}\left[x + a\tau\dfrac{d\tau}{ds} + i\tau\left(b\dfrac{d\tau}{ds} - c\right)\right], \\ y = \mathcal{R}\left[y + a'\tau\dfrac{d\tau}{ds} + i\tau\left(b'\dfrac{d\tau}{ds} - c'\right)\right], \\ z = \mathcal{R}\left[z + a''\tau\dfrac{d\tau}{ds} + i\tau\left(b''\dfrac{d\tau}{ds} - c''\right)\right], \end{cases}$$

qui font connaître les coordonnées, relatives à des axes fixes, d'un point quelconque de la surface.

a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' y désignent respectivement les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale en un point de la courbe considérée. Ces cosinus directeurs satisfont aux formules de Serret-Frenet (n° 4).

259. La proposition que nous venons d'établir dans le numéro précédent donne une solution particulière du problème général qui fait l'objet de ce Chapitre. On doit à Lie une construction

élégante qui permet de le résoudre d'une manière complète lorsqu'on en connaît une seule solution particulière, obtenue d'ailleurs d'une manière quelconque; nous allons montrer comment les résultats précédents conduisent à la proposition de Lie.

Reportons-nous aux formules (16), que nous écrirons sous la forme suivante :

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} z_0 &= \pm\tau + \frac{d\varepsilon}{d\eta}x_0 + \frac{d}{d\eta}\left(\rho + \frac{dx_0}{d\varepsilon}\right),\\ y_0 &= -\frac{dz_0}{d\eta},\\ x &= \pm(y_0 - \rho) \mp \frac{dx_0}{d\varepsilon}, \end{aligned}\right.$$

en introduisant les angles de contingence et de torsion, $d\varepsilon$, $d\eta$; et supposons que l'on ait déterminé la surface minima correspondante à une valeur particulière x'_0 de x_0. Si l'on veut obtenir la solution correspondant à la fonction algébrique la plus générale que nous mettrons sous la forme

$$x'_0 + x''_0,$$

il faudra ajouter aux valeurs trouvées y'_0, z'_0, x' de y_0, z_0, x des termes y''_0, z''_0, x'' que l'on obtiendrait, par suite de la forme linéaire des équations (25), en remplaçant dans ces équations x_0 par x''_0 et supprimant les termes qui ne contiennent pas x_0, c'est-à-dire en faisant

$$\tau = \rho = 0,$$

ce qui revient à supposer que la développable (Δ) se réduit à un cône. En particulier, la quantité x'' qu'il faudra ajouter à x' sera la même que si la développable (Δ) se réduisait à un cône; cette remarque, jointe à la construction déjà donnée (n° 257) pour le cas particulier du cône, nous conduit au théorème de Lie :

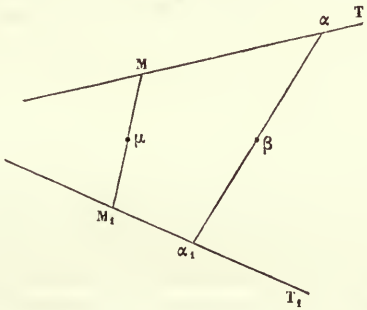
Si l'on a obtenu une surface minima (M) *inscrite dans la développable* (Δ), *on construira la courbe algébrique* (C) *la plus générale dont les tangentes sont perpendiculaires aux plans tangents de* (Δ) *et l'on portera sur chaque génératrice de* (Δ), *à partir du point de contact de cette génératrice avec la surface* (M), *une longueur égale au rayon de courbure de la courbe* (C) *au point correspondant. L'extrémité de cette*

longueur décrira la courbe de contact de la surface minima algébrique la plus générale inscrite dans la développable (Δ).

260. Aux deux solutions différentes que nous venons de donner successivement on peut ajouter la suivante, que nous allons développer, parce qu'elle repose sur une génération nouvelle des surfaces minima, obtenue dans un important Mémoire de Ribaucour [1].

Nous avons vu (n° 220) comment on obtient la surface minima la plus générale au moyen de deux courbes minima (Γ), (Γ_1); si M, M_1 sont deux points appartenant respectivement aux deux courbes, le milieu μ du segment MM_1 (*fig.* 17) décrit la surface minima et le plan tangent en μ est parallèle aux deux droites MT, M_1T_1, tangentes en M et en M_1 respectivement aux deux courbes (Γ), (Γ_1). Soit (P) le plan osculateur en M à (Γ), nous désignerons par (Σ) la développable qu'il enveloppe et dont (Γ) est l'arête de rebroussement; nous désignerons de même par (P_1)

Fig. 17.



le plan osculateur en M_1 à (Γ_1) et par (Σ_1) la développable dont l'arête de rebroussement est (Γ_1). Les deux plans (P), (P_1) se coupent suivant une droite qui touche respectivement les deux développables en α et en α_1; je vais d'abord prouver que cette droite $\alpha\alpha_1$ est perpendiculaire au plan tangent en μ à la surface minima.

---

[1] Ribaucour, *Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* (*Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale de Belgique*, in-4°, t. XLIV, 1881).

Il suffit, pour le reconnaître, de se rappeler la propriété caractéristique des plans tangents au cercle de l'infini : toute droite perpendiculaire à un tel plan lui est aussi parallèle et va passer par le point de contact du plan avec le cercle de l'infini. Il résulte de là que la tangente MT située dans le plan (P) lui sera perpendiculaire et sera, par suite, perpendiculaire à la droite $\alpha\alpha_1$, située dans ce plan. Pour la même raison, $\alpha\alpha_1$ sera perpendiculaire à M_1T_1; elle sera donc perpendiculaire au plan tangent en μ, qui est parallèle à la fois à MT et à M_1T_1.

Ce point étant établi, nous remarquerons de plus que le plan tangent en μ, qui est parallèle aux deux droites MT, M_1T_1, est aussi à des distances égales de ces deux droites; il passera donc nécessairement par le milieu β du segment de droite $\alpha\alpha_1$.

En réunissant tous ces résultats, on obtient évidemment le mode de génération suivant des surfaces minima, qui a été donné par Ribaucour :

Si l'on considère deux développables (Σ), (Σ_1), *circonscrites l'une et l'autre au cercle de l'infini, la surface minima la plus générale est l'enveloppe des plans perpendiculaires à toutes les tangentes communes de ces deux développables, ces plans étant menés à égale distance des deux points de contact de ces tangentes communes.*

Cette définition est moins simple et moins complète que celle de Lie, qui détermine à la fois le point et le plan tangent de la surface minima; mais elle offre l'avantage de ne faire intervenir que les plans tangents, et elle associe à la surface minima, lieu du point μ, la surface lieu du point β, à laquelle Ribaucour a donné le nom de *surface moyenne* et dont il a fait connaître un grand nombre de propriétés remarquables.

Les droites $\alpha\alpha_1$ dépendent évidemment de deux paramètres et elles engendrent ce que l'on appelle un système de rayons rectilignes ou une *congruence*. Comme elles sont tangentes à la fois aux deux développables (Σ), (Σ_1), il est clair que toutes les surfaces réglées formées de ces droites qui contiendront, par exemple, l'une d'elles $\alpha\alpha_1$ seront tangentes, les unes aux autres, aux points α et α_1.

Les plans tangents communs en ces deux points, étant ceux des

développables (Δ), (Δ_1), sont, par cela même, tangents au cercle de l'infini. Or il est aisé d'établir, soit par l'Analyse, soit par la Géométrie, la proposition suivante :

Étant donnée une surface réglée, si, par une de ses génératrices, on mène les deux plans tangents au cercle de l'infini, le segment formé par les deux points de contact de ces plans a pour milieu le point central de la génératrice; de plus il est égal au paramètre de distribution multiplié par $2i$ [1].

Il suit de là que *la surface moyenne de la congruence est le lieu des lignes de striction de toutes les surfaces réglées formées avec des droites de la congruence, et que le paramètre de distribution est le même pour toutes celles de ces surfaces qui contiennent une même droite de la congruence.* Ribaucour, à qui sont dus ces résultats, les a obtenus par des méthodes qui en font moins bien connaître la véritable origine.

Ces propriétés de la congruence précédente, qui a reçu de Ribaucour le nom de *congruence isotrope*, conduisent à une solution très simple du problème que nous avons à résoudre. En effet, si l'on considère une développable (Δ) circonscrite à une surface minima, les droites $\alpha\alpha_1$ perpendiculaires aux divers plans tangents de (Δ) formeront une surface réglée dont la ligne de striction devra être décrite par le point de la droite $\alpha\alpha_1$ qui se trouve dans le plan tangent correspondant de (Δ). Nous sommes ainsi conduits à la proposition suivante :

---

[1] Si l'on prend, en effet, la droite pour axe des z, le plan central pour plan des xz et si l'on place l'origine au point central, la surface réglée a, en tous les points de la droite, les mêmes plans tangents que le paraboloïde défini par l'équation

$$z = \alpha \frac{y}{x},$$

où α est le paramètre de distribution. Pour un plan tangent au cercle de l'infini, on doit avoir

$$\frac{y}{x} = \pm i.$$

On obtient donc pour z les deux valeurs

$$+\alpha i, \quad -\alpha i;$$

d'où résulte immédiatement le théorème.

Pour obtenir toutes les surfaces minima inscrites dans la développable (Δ), *on déterminera toutes les surfaces réglées dont les génératrices sont normales aux plans de* (Δ) *et qui ont pour ligne de striction la courbe engendrée par le point de rencontre de chacune de ces génératrices avec le plan correspondant de* (Δ). *Les arêtes de rebroussement des deux développables circonscrites à la surface réglée et au cercle de l'infini seront les deux courbes* (Γ), (Γ_1) *au moyen desquelles on peut engendrer la surface minima.*

Pour déterminer les surfaces réglées satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer, reprenons les méthodes du n° 255 et rapportons les points de l'espace au trièdre (T) relatif à l'arête de rebroussement (R) de (Δ). La droite qui engendre la surface réglée cherchée aura pour équations, relativement à ce trièdre,

$$x = x_1, \qquad y = y_1,$$

et le déplacement d'un de ses points (x_1, y_1, z_1), dans un mouvement infiniment petit du trièdre, aura pour composantes

$$dx_1 + ds - \frac{y_1\,ds}{\rho}, \quad dy_1 + \frac{x_1\,ds}{\rho} - \frac{z_1\,ds}{\tau}, \quad dz_1 + \frac{y_1\,ds}{\tau}.$$

Le plan tangent en ce point à la surface réglée aura donc pour équation

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{dx_1 + ds - \dfrac{y_1\,ds}{\rho}}{dy_1 + \dfrac{x_1\,ds}{\rho} - \dfrac{z_1\,ds}{\tau}}.$$

Quand z_1 varie, on obtient les plans tangents en tous les points de la droite; en particulier, pour $z_1 = \infty$, on trouve le plan

$$x = x_1.$$

Le plan central, devant être perpendiculaire au précédent, correspondra à la valeur de z_1 donnée par l'équation

$$dy_1 + \frac{x_1\,ds}{\rho} - \frac{z_1\,ds}{\tau} = 0.$$

Comme le point central doit être dans le plan des xy, la valeur de z_1 déterminée par cette équation devra être nulle; il faudra

donc que l'on ait

$$dy_1 + \frac{x_1 ds}{\rho} = 0$$

ou

$$x_1 = -\rho \frac{dy_1}{ds} = -\frac{dy_1}{dz}. \tag{26}$$

Cette formule si simple résout complètement le problème proposé; on choisira arbitrairement y_1, et elle donnera x_1.

261. L'équation précédente admet une solution évidente

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = h, \tag{27}$$

h désignant une constante quelconque. Nous allons poursuivre cette application particulière, parce qu'elle mettra en évidence de curieuses relations entre certaines surfaces minima et les courbes de Bertrand, étudiées au Livre I, Chapitre I.

Pour obtenir les deux développables qui figurent dans la génération de Ribaucour et dont les arêtes de rebroussement sont précisément les courbes (Γ), (Γ_1) au moyen desquelles S. Lie engendre la surface minima, il faudra évidemment prendre l'enveloppe de chacun des plans qui passent par la droite (27) et sont tangents au cercle de l'infini. Soit

$$y - h - ix = 0 \tag{28}$$

l'équation de l'un de ces plans; celle de l'autre s'obtiendra en changeant i en $-i$.

La droite de contact du plan (28) avec son enveloppe sera évidemment le lieu des points dont le déplacement se fait dans ce plan. Si donc D_x, D_y, D_z désignent les composantes, relatives aux axes du trièdre (T), du déplacement du point dont les coordonnées relatives sont x, y, z, on devra avoir, pour tous les points de cette droite,

$$D_y - iD_x = 0,$$

ou, en remplaçant D_x, D_y par leurs valeurs,

$$dy + \left(\frac{x}{\rho} - \frac{z}{\tau}\right) ds + i\left[dx + \left(1 - \frac{y}{\rho}\right) ds\right] = 0.$$

Si l'on tient compte de l'équation (28) et de sa différentielle, il

vient

$$z = -i\tau + ih\frac{\tau}{\rho}. \tag{29}$$

Cette équation, jointe à la précédente, définit la droite de contact du plan (28) avec la développable qu'il enveloppe. Pour avoir le point de contact de cette génératrice avec l'arête de rebroussement de la développable, il faut évidemment joindre aux équations (28), (29) la condition suivante :

$$D_z = 0$$

qui nous donne

$$y = -\tau\frac{dz}{ds} = i\tau\left[\frac{d\tau}{ds} - h\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\rho}\right)\right],$$

de sorte que l'une des courbes minima (Γ) au moyen desquelles on peut engendrer la surface est définie par les expressions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \tau\frac{d\tau}{ds} - h\tau\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\rho}\right) + ih, \\ y &= i\tau\frac{d\tau}{ds} - ih\tau\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\rho}\right), \\ z &= -i\tau + ih\frac{\tau}{\rho}, \end{aligned}\right. \tag{30}$$

des coordonnées d'un de ses points relatives au trièdre (T). L'autre courbe (Γ_1) s'obtiendrait en changeant i en $-i$.

Si nous considérons les points de ces deux courbes (Γ), (Γ_1) qui correspondent au point réel de la courbe (R) qui est le sommet du trièdre (T), il est clair que le milieu de la droite qui les joint a pour coordonnées relatives au trièdre mobile,

$$x = \tau\frac{d\tau}{ds} - h\tau\frac{d}{ds}\frac{\tau}{\rho}, \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

Nous avons donc le théorème suivant, qui complète celui du n° 258 :

Étant donnée une courbe gauche (R), *si l'on porte sur les tangentes de cette courbe, à partir du point de contact, la longueur*

$$\tau\frac{d\tau}{ds} - h\tau\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\rho}\right),$$

h désignant une constante quelconque, on aura une courbe (C) *suivant laquelle une surface minima pourra être inscrite à la développable engendrée par les tangentes de* (R). *Cette surface minima se déterminera sans aucune intégration. Elle sera algébrique si la courbe* (R) *est algébrique.*

Si l'on adopte les mêmes notations qu'à la fin du n° 258, les coordonnées d'un point de cette surface, relatives à des axes fixes, seront données par les formules

$$(31)\quad \begin{cases} x_1 = \mathcal{R}\left\{x + (a+ib)\left[\tau\dfrac{d\tau}{ds} - h\tau\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\tau}{\rho}\right)\right] + a\,hi - c\,i\tau\left(1 - \dfrac{h}{\rho}\right)\right\}, \\ y_1 = \mathcal{R}\left\{x + (a'+ib')\left[\tau\dfrac{d\tau}{ds} - h\tau\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\tau}{\rho}\right)\right] + a'hi - c'i\tau\left(1 - \dfrac{h}{\rho}\right)\right\}, \\ z_1 = \mathcal{R}\left\{x + (a''+ib'')\left[\tau\dfrac{d\tau}{ds} - h\tau\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\tau}{\rho}\right)\right] + a''hi - c''i\tau\left(1 - \dfrac{h}{\rho}\right)\right\}. \end{cases}$$

La proposition précédente entraîne beaucoup de corollaires intéressants. Supposons d'abord qu'on ait

$$h = 0, \qquad \tau = \text{const.}$$

La longueur à porter sur les tangentes de (R) sera nulle et nous pourrons énoncer la proposition suivante :

Toute courbe à torsion constante peut être prise pour ligne asymptotique d'une surface minima qui se détermine sans aucune intégration si la courbe (R) *est connue, et qui est algébrique si* (R) *est algébrique.*

Les formules (31) qui déterminent la surface minima deviennent alors

$$(32)\quad x_1 = \mathcal{R}(x - ci\tau), \qquad y_1 = \mathcal{R}(y_1 - c'i\tau), \qquad z_1 = \mathcal{R}(z - c''i\tau).$$

Elles donnent lieu à la conséquence suivante :

Désignons par (M) la surface définie par les équations (32); sa surface adjointe (M_0) sera évidemment définie par les équations

$$(33)\quad x_0 = \mathcal{R}(c\tau + ix), \qquad y_0 = \mathcal{R}(c'\tau + iy), \qquad z_0 = \mathcal{R}(c''\tau + iz).$$

Le point m_0 de (M_0) qui correspond à un point réel m de la courbe ($\mathcal{R}$) sera donné par les formules

$$x_0 = c\tau, \qquad y_0 = c'\tau, \qquad z_0 = c''\tau,$$

desquelles il résulte que ce point décrit une courbe située sur la sphère

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \tau^2.$$

Comme, au point m_0, la normale à la surface (M_0) est parallèle à la normale en m à (M), nous voyons que les cosinus directeurs de la normale en m_0 seront c, c', c''. Donc :

La surface adjointe (M_0) *sera inscrite à la sphère de rayon* τ *suivant une courbe qui pourra servir d'indicatrice sphérique aux binormales de* (R).

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer la réciproque et de prouver, que, si une surface minima est inscrite à une sphère, la courbe qui, sur la surface adjointe correspond à la courbe de contact, est une courbe à torsion constante, ligne asymptotique de la surface adjointe.

Ces élégantes relations entre les surfaces minima inscrites à une sphère et les courbes à torsion constante sont dues à M. E. Cosserat [1]. Elles montrent, en particulier, que la détermination des surfaces minima algébriques inscrites dans une sphère et celle des courbes algébriques à torsion constante constituent deux problèmes équivalents.

262. Mais les résultats précédents ne sont que des cas particuliers de propositions plus générales auxquelles conduisent les formules (30) et (31).

Supposons maintenant que la courbe (R) soit une courbe de Bertrand. D'après ce que nous avons vu au n° 10, la relation linéaire entre les courbures pourra être mise sous la forme

$$\frac{\sin\omega}{\rho} + \frac{\cos\omega}{\tau} = \frac{\sin\omega}{C},$$

ω et C désignant deux constantes. En supposant que la constante h qui figure dans les énoncés précédents ait été prise égale à C, on

---

[1] E. Cosserat, *Sur les courbes algébriques à torsion constante et sur les surfaces minima algébriques inscrites dans une sphère* (*Comptes rendus*, t. CXX, 1895, p. 1252).

donnera à la relation entre les courbures la forme

$$(33)\qquad \frac{\sin\omega}{\rho} + \frac{\cos\omega}{\tau} = \frac{\sin\omega}{h},$$

que nous emploierons désormais.

Alors les formules (30) qui nous donnent les coordonnées, relatives au trièdre (T), du point qui décrit la courbe minima (Γ), deviennent

$$(34)\qquad x = ih, \qquad y = 0, \qquad z = -ih\cot\omega.$$

Les formules (31) se simplifient beaucoup et nous donnent ici

$$(35)\qquad \begin{cases} x_1 = \mathcal{R}(x + a\,ih - c\,ih\cot\omega), \\ y_1 = \mathcal{R}(y + a'\,ih - c'\,ih\cot\omega), \\ z_1 = \mathcal{R}(z + a''\,ih - a''\,ih\cot\omega). \end{cases}$$

La surface minima (M) déterminée par ces formules contient évidemment la courbe (R), dont on obtient les points en supposant réelles les coordonnées x, y, z. Comme les cosinus directeurs de la normale sont c, c', c'', on voit même que cette courbe (R) est une ligne asymptotique de (M).

La surface (M_0) adjointe à (M) est ici déterminée par les formules

$$(36)\qquad \begin{cases} x_0 = \mathcal{R}(c\,h\cot\omega - a\,h + ix), \\ y_0 = \mathcal{R}(c'\,h\cot\omega - a'\,h + iy), \\ z_0 = \mathcal{R}(c''\,h\cot\omega - a''\,h + iz). \end{cases}$$

Par suite, la courbe de (M_0) qui correspond à (R), c'est-à-dire à des valeurs réelles de x, y, z, est déterminée par les formules

$$(37)\qquad x_0 = ch\cot\omega - ah, \qquad y_0 = c'h\cot\omega - a'h, \qquad z_0 = c''h\cot\omega - a''h,$$

d'où l'on déduit immédiatement qu'elle est sur la sphère

$$(38)\qquad x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \frac{h^2}{\sin^2\omega}.$$

Comme cette courbe correspond à une ligne asymptotique de (M), elle doit être une ligne de courbure de (M_0). Et, effet, il est facile de vérifier ici, conformément au théorème de Joachimsthal, que (M_0) coupe la sphère précédente sous l'angle constant ω. Car les cosinus directeurs du rayon de la sphère qui aboutit au point

(x_0, y_0, z_0) sont

$$c\cos\omega - a\sin\omega, \qquad c'\cos\omega - a'\sin\omega, \qquad c''\cos\omega - a''\sin\omega.$$

Ainsi :

Toute courbe de Bertrand est ligne asymptotique d'une surface minima (M) *qui se détermine sans aucun signe de quadrature. La ligne qui lui correspond sur la surface adjointe est une ligne de courbure sphérique de cette surface adjointe.*

Nous laisserons au lecteur le soin de démontrer la réciproque. Et nous nous contenterons d'énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une courbe de Bertrand (R), *adjoignons-lui la courbe* (R_1) *qui a les mêmes normales principales. Soient* M, M_1 *deux points correspondants de ces courbes, situés sur la même normale principale. Par* M *menons une parallèle* (D) *à la binormale de* (R_1) *en* M_1 *et, par* M_1, *une parallèle* (D_1) *à la binormale en* M *à* (R). *Les deux droites* (D), (D_1) *forment, comme on sait, un système invariable. Si l'on mène, par chacune de ces droites, les plans tangents au cercle de l'infini, on obtient un tétraèdre invariable dont deux sommets* P, P′ *sont sur la droite* (D) *et les deux autres sommets* P, P'_1 *sur la droite* (D_1). *Les quatre points* P, P′, P_1, P'_1 *décrivent des courbes minima dont les plans osculateurs sont les faces du tétraèdre. Les deux courbes minima décrites par* P, P′ *permettent d'engendrer une surface minima qui contient* (R) *et admet cette courbe comme ligne asymptotique. De même, les deux courbes minima décrites par* P_1, P'_1 *permettent d'engendrer une surface minima qui admet* (R_1) *comme ligne asymptotique. Aux deux surfaces minima ainsi obtenues correspondent, comme adjointes, deux surfaces minima coupant la même sphère suivant deux courbes parallèles et sous un même angle constant, qui est égal à l'angle des deux droites* (D), (D_1).

263. Après cette application particulière, revenons au cas général. Nous terminerons en remarquant qu'on peut toujours résoudre l'équation (26) par de simples constructions géométriques.

Pour cela, nous construirons, d'une manière quelconque, une surface réglée (K′) dont les génératrices soient perpendiculaires aux plans tangents de (Δ), et nous mènerons le plan perpendiculaire à chacune des génératrices de (K′) en son point central. Les différents plans ainsi obtenus envelopperont une développable (Δ′) pour laquelle on aura évidemment une solution du problème proposé, fournie par la surface réglée (K′). Comme les angles de contingence et de torsion sont les mêmes pour les arêtes de rebroussement de (Δ) et de (Δ′), la solution fournie par (K′) relativement à (Δ′) fera connaître les fonctions les plus générales x_1, y_1 vérifiant l'équation (26). Il suffira donc, pour avoir la solution générale du problème posé, de construire la surface (K) dont chaque génératrice a, par rapport au trièdre (T), relatif à un point de l'arête de rebroussement de (Δ), la même position que la génératrice correspondante de (K′) par rapport au trièdre (T′) dont les arêtes sont parallèles à celles de (T) et qui est relatif au point correspondant de l'arête de rebroussement de (Δ′). En d'autres termes, pour avoir la droite de (K), il faudra imprimer à la droite de (K′) une translation égale à celle qui amènerait le trièdre (T′) en coïncidence avec le trièdre (T).

CHAPITRE X.

LE PROBLÈME DE PLATEAU. DÉTERMINATION DE LA SURFACE MINIMA PASSANT PAR UN CONTOUR DONNÉ COMPOSÉ DE LIGNES DROITES, OU DE PLANS QUE LA SURFACE DOIT COUPER NORMALEMENT.

Historique. — Indication des travaux de Riemann, de Weierstrass et de M. Schwarz. — Exposition générale de la méthode à suivre dans le cas où il n'y a pas de point de ramification. — Surface minima passant par deux droites, — coupant à angle droit deux plans donnés et contenant une droite donnée, passant par trois droites dont l'une coupe les deux autres, — passant par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche quelconque. — Introduction des points de ramification. — Propriétés géométriques relatives à ces points. — Solution générale du problème proposé.

---

264. Nous allons maintenant compléter l'exposition des propriétés les plus simples des surfaces minima en indiquant les principaux résultats qu'ont obtenus les géomètres dans l'étude de la question suivante, posée par Lagrange, et qui a donné naissance à toute la théorie :

Déterminer la surface minima, parfaitement continue ou assujettie à des discontinuités de nature connue, passant par un contour fermé.

On sait que Plateau a résolu ce problème par l'expérience, en plongeant le contour donné, réalisé physiquement, dans une dissolution de liquide glycérique. L'analyse mathématique n'a pu, jusqu'ici, imaginer aucune méthode générale permettant de commencer l'étude de cette belle question. Toutefois, dans le cas, particulièrement intéressant, où le contour est formé de lignes droites, et dans celui où quelques-unes des portions de ce contour sont remplacées par des plans que la surface doit couper normalement, les propositions que nous avons fait connaître relativement aux diverses représentations conformes de la surface ont permis de préparer la solution du problème, et même de le

résoudre d'une manière complète pour certaines formes simples du contour. Les principaux résultats acquis à la Science dans cet ordre de recherches sont dus à Riemann, à Weierstrass et à M. Schwarz.

Nous avons déjà cité plusieurs fois le Mémoire fondamental de Riemann, présenté, le 6 janvier 1867, par M. Hattendorf à la Société Royale de Gœttingue et inséré dans le Tome XIII des Mémoires de cette Société ([1]). Ce beau travail, qui figure dignement à côté des plus importantes productions de son illustre Auteur, contient des applications très intéressantes des vues nouvelles et profondes que Riemann a apportées en Analyse. On peut le considérer comme composé de deux parties bien distinctes. Dans la première, Riemann étudie d'une manière générale les surfaces minima; il y fait connaître, en dehors des propositions que nous avons établies, une formule remarquable qui n'a pu trouver place dans notre théorie, et qui est relative à l'aire d'une portion limitée de la surface, il y emploie en particulier le système de coordonnées, dont la première idée appartient à O. Bonnet (n° 181); c'est-à-dire qu'il détermine un point de la sphère et le point correspondant de la surface minima par la valeur de la variable complexe qui est l'affixe de ce point (n°s 27 et 164). Les transformations de coordonnées, dont Riemann fait usage à différentes reprises, mettent naturellement en évidence le fait si souvent signalé dans les pages qui précèdent : *Toute transformation des coordonnées, ou tout déplacement, s'exprime par une substitution linéaire particulière effectuée sur la variable complexe,* proposition dont l'importance et l'intérêt n'ont été pleinement reconnus que depuis la publication des beaux travaux de M. F. Klein relatifs à l'intégration des équations linéaires du

([1]) Dans une note placée au commencement du Mémoire (*Riemann's gesammelte Werke*, p. 283), M. Hattendorf nous apprend qu'il a dû rédiger entièrement le Mémoire d'après un manuscrit de Riemann qui ne contenait absolument que les formules et les résultats. Ce manuscrit, qui est daté des années 1860 et 1861, a été envoyé à M. Hattendorf en avril 1866. On sait que Riemann est mort en Italie au mois de juillet suivant.

Dans un travail présenté comme thèse en 1880 à la Faculté des Sciences, M. Niewenglowski a fait connaître en France les principaux résultats obtenus par Riemann. *Voir* le Mémoire : *Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minima de contour donné*, inséré aux *Annales de l'École Normale*, t. IX, 2e série, p. 227.

second ordre, à l'icosaèdre et à la résolution des équations algébriques.

La seconde Partie du Mémoire est presque entièrement consacrée à la détermination de la surface minima limitée par un polygone gauche dont tous les côtés sont rectilignes ([1]). Riemann n'exclut même pas le cas où le contour serait partiellement ouvert et où la surface devrait avoir des segments infinis, analogues à cette portion de l'hélicoïde gauche à plan directeur qui s'étend à l'infini entre deux génératrices rectilignes de la surface. Après avoir développé la solution générale du problème, solution qui exige la formation, toujours possible, d'une équation différentielle linéaire et la résolution d'un système d'équations transcendantes, dont l'étude est laissée de côté, au moins dans le cas général, Riemann aborde les applications et examine successivement les contours suivants :

1° *Deux droites infinies qui ne sont pas dans le même plan.*

Si l'on suppose que le secteur infini s'étendant entre les deux droites n'a pas de discontinuité ni de point de ramification, on trouve l'hélicoïde gauche à plan directeur.

2° *Trois droites, dont deux se coupent, la troisième étant parallèle au plan des deux autres.*

Sous les réserves précédentes, la solution, ici encore, est complète et les formules définitives sont obtenues.

3° *Trois droites, placées d'une manière quelconque dans l'espace.*

Pour bien se représenter le problème résolu par Riemann, on peut imaginer un hexagone gauche. Si trois côtés non consécutifs de cet hexagone s'éloignent indéfiniment, les trois autres restant fixes, la surface minima qui était limitée par les six côtés de l'hexagone tend vers une surface à trois secteurs infinis, dont on aperçoit aisément la forme générale. C'est cette surface que détermine Riemann.

([1]) Riemann y montre aussi que l'on peut résoudre le problème de Plateau pour le cas où le contour est composé de deux cercles quelconques situés dans deux plans parallèles (*voir* n° 252).

4° *Un quadrilatère gauche quelconque.*

Riemann forme l'équation linéaire du second ordre, dont dépend la solution du problème. Cette équation, que nous donnerons plus loin, a une forme très remarquable qui la rapproche de l'équation de Lamé. On n'a pu encore l'intégrer dans le cas le plus général; Riemann considère le cas particulier où les quatre côtés du quadrilatère sont aussi les arêtes d'un tétraèdre régulier, et il obtient alors la solution du problème par une méthode directe et très élégante, que les travaux déjà rappelés de M. Klein nous aident à comprendre dans tous ses détails.

5° *Trois droites, dont l'une rencontre les deux autres*, en sorte que la surface a deux sommets et un secteur infini.

6° *Deux polygones rectilignes non étoilés situés dans deux plans parallèles*

Ces deux derniers exemples ont été publiés pour la première fois dans les Œuvres de Riemann ([1]).

265. Les résultats précédents demeurent, aujourd'hui encore, les plus complets et les plus généraux parmi ceux qui ont été publiés sur le problème qui nous occupe. Mais, quelques jours avant la présentation du Mémoire de Riemann à la Société de Gœttingue, le 20 décembre 1866, Weierstrass avait communiqué à l'Académie de Berlin, dans une Note de deux pages ([2]), le résumé de ses recherches sur le même sujet.

Les résultats annoncés par Weierstrass sont en parfait accord avec ceux de Riemann.

Toutes ces recherches, même celles que l'illustre géomètre n'a pas publiées de son vivant, ont été rassemblées dans le Tome III de ses *Mathematische Werke*.

266. Les premiers travaux de M. Schwarz ont été publiés avant les précédents; mais ils sont relatifs à un problème particulier. Dans une courte Note insérée en 1855 aux Comptes rendus de

---

([1]) Riemann, *Œuvres mathématiques*, traduites par L. Laugel, p. 384.
([2]) *Monatsberichte der K. P. Akademie*, 1866, p. 855.

l'Académie de Berlin [1], M. Schwarz se reporte à des études antérieures relatives à la représentation conforme de la surface d'un polyèdre sur la sphère, études qui ont été publiées dans le Tome LXX du *Journal de Crelle;* et il annonce que la solution de ce problème de la représentation conforme pour les différents polyèdres réguliers permet de déterminer, par l'application d'un théorème de Weingarten qui sera étudié dans la suite de cet Ouvrage, un certain nombre de surfaces minima sur lesquelles se trouvent une infinité de droites. Ces droites ne sont pas isolées les unes des autres; elles se rencontrent mutuellement de telle manière qu'un certain nombre d'entre elles puissent servir de limite à une portion simplement connexe de la surface. C'est ainsi que la surface minima dérivée du cube, surface dont la détermination s'effectue au moyen des fonctions elliptiques de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$, contient une infinité de quadrilatères gauches égaux; chacun d'eux est formé avec quatre arêtes d'un tétraèdre régulier et permet de limiter une certaine portion de la surface. On a donc une solution, obtenue, il est vrai, d'une manière indirecte, du problème de Lagrange et de Plateau pour le contour formé par ce quadrilatère régulier.

Le second travail de M. Schwarz est un Mémoire beaucoup plus étendu, couronné en 1867 par l'Académie de Berlin et publié en 1871 sous le titre suivant : *Bestimmung einer speciellen Minimalfläche* [2]. L'Auteur y aborde, cette fois par des méthodes directes, la détermination de la surface minima passant par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, et il montre que l'on pourra donner la solution complète du problème dans le cas particulier où le quadrilère gauche est assujetti à l'unique condition d'avoir un plan de symétrie, passant nécessairement par deux de ses sommets opposés. Il considère en particulier, comme Riemann, dont le Mémoire était encore inédit à l'époque où M. Schwarz communiquait son travail à l'Académie de Berlin, le cas remarquable où les quatre côtés du quadrilatère gauche

---

(1) H. Schwarz, *Ueber die Minimumsfläche deren Begrenzung als ein von vier Kanten eines regularen Tetraeders gebildetes, windschiefes Viereck gegeben ist* (*Monatsberichte der K. P. Akademie*, 1865, p. 149-153).

(2) Harrwitz und Gossmann; in-4°, Berlin, 1871.

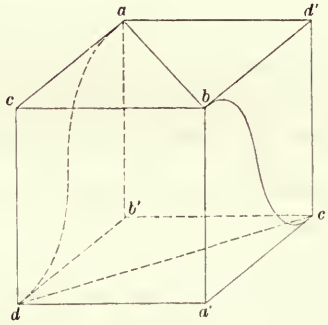
sont les arêtes d'un tétraèdre régulier; il retrouve alors la surface déjà définie dans sa Communication précédente; on l'obtient en faisant, dans les formules de Weierstrass (n° 188),

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 14u^4 + u^8}}.$$

Enfin, dans un Appendice qui termine le Mémoire, l'éminent géomètre fait connaître certaines surfaces minima, pour lesquelles la fonction $\mathcal{F}(u)$ est l'inverse de la racine carrée d'un polynome du huitième degré, et qui contiennent des droites avec lesquelles on peut former des polygones gauches d'une nature spéciale, limitant certaines portions de la surface. Supposons, par exemple, que, dans un parallélépipède rectangle, on supprime les six arêtes qui aboutissent à deux sommets opposés; il restera un hexagone gauche, par lequel on pourra faire passer une des surfaces définies par M. Schwarz; la portion de surface limitée par cet hexagone sera simplement connexe et ne contiendra aucun point singulier.

Un autre Mémoire du même Auteur, *Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen*, imprimé en 1872 (¹), contient l'étude détaillée et la solution complète d'un problème proposé en ces termes dès 1816 par Gergonne (²) :

Fig. 18.



Couper un cube (fig. 18) en deux parties de telle manière que la section vienne se terminer aux diagonales inverses de deux

(¹) *Monatsberichte der K. P. Akademie*, janvier 1872.
(²) *Annales de Gergonne*, t. VII, p. 99.

faces opposées et que l'aire de cette section terminée à la surface du cube soit un minimum. Donner en outre l'équation de la courbe suivant laquelle la surface coupante coupe chacune des autres faces de ce cube.

On trouve à la page 148 du Tome VII des *Annales de Gergonne* un essai sur ce problème, dû à Tédenat, recteur de l'Académie de Nîmes, l'un des rédacteurs les plus assidus de ce journal; mais la solution proposée est inexacte. Le calcul des variations permet, en effet, d'établir que la surface cherchée doit couper à angle droit deux des faces latérales du cube, et l'hélicoïde considéré par Tédenat ne satisfait pas à cette condition.

M. Schwarz reprend le problème de Gergonne, ou plutôt il se propose de déterminer toutes les surfaces minima, parmi lesquelles doit se trouver la surface cherchée, qui passent par les deux diagonales inverses de deux faces opposées et qui coupent à angle droit deux autres faces opposées du cube. Le résultat obtenu est particulièrement intéressant : de même qu'il y a une infinité d'hélicoïdes gauches à plan directeur passant par deux droites données, il y a aussi une infinité de surfaces satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer. Il n'est pas difficile de choisir parmi toutes ces surfaces celle dont l'aire est réellement un minimum.

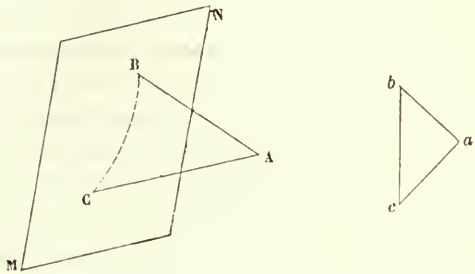
Dans ce même travail, M. Schwarz fait aussi connaître une extension, très digne de remarque, des résultats de Riemann et de Weierstrass; il substitue au problème abordé par ces deux géomètres, le suivant, qui est beaucoup plus général et se résout, comme nous le verrons, par l'emploi des mêmes principes :

On donne une chaîne continue fermée, composée de segments rectilignes, ou de plans, ou de segments rectilignes et de plans; et l'on propose de déterminer une surface minima, à connexion simple, ne contenant aucun point singulier dans son intérieur, limitée par des segments rectilignes et les plans de la chaîne, et coupant ces derniers à angle droit.

Par exemple, si l'on considère (*fig.* 19) deux tiges AB, AC réunies en A et appuyant leurs extrémités B et C contre une lame de verre, la surface que l'on obtient en plongeant le système

entier dans le liquide glycérique s'appuie sur les tiges AB, CA et coupe normalement la lame de verre. Cette surface peut être étudiée et définie analytiquement par des méthodes toutes sem-

Fig. 19.



blables à celles qui avaient été employées antérieurement dans le cas spécial des contours exclusivement composés de lignes droites.

Nous nous contenterons des indications précédentes et nous ferons maintenant connaître les principes sur lesquels reposent les recherches dont nous venons d'exposer les résultats, en négligeant les détails, qui exigeraient beaucoup de développements et que l'on trouvera dans les Mémoires originaux.

267. Au Chapitre IV, nous avons signalé deux tracés géographiques différents de la surface minima. L'un d'eux est déterminé par la représentation sphérique de la surface; si l'on adopte les coordonnées u, u_1, si souvent employées dans les pages précédentes, la variable complexe u est l'affixe d'un point réel de la sphère qui est l'image du point correspondant de la surface minima, et la représentation ainsi obtenue constitue, comme l'a montré O. Bonnet (n° 203), un premier tracé géographique de la surface minima sur la sphère de rayon 1. Si maintenant on introduit la variable complexe définie par l'équation

$$\sigma = \int \sqrt{2\mathcal{F}(u)}\, du, \tag{1}$$

et qu'on représente sur le plan, on obtiendra un nouveau tracé géographique, dans lequel, nous l'avons vu (n° 204), les lignes de courbure auront pour représentation des parallèles aux axes coor-

donnés, tandis que les lignes asymptotiques seront représentées par des parallèles aux bissectrices de ces axes.

La considération simultanée des deux représentations conformes précédentes joue un rôle capital dans les raisonnements qui vont suivre, et conduit par une voie naturelle à la solution du problème proposé.

Si l'on découpe sur une surface minima un segment limité (M), à connexion simple et ne contenant aucun point singulier dans son intérieur, l'intégrale σ sera, sous certaines conditions que nous indiquerons plus loin, une fonction uniforme ayant une valeur finie et bien déterminée pour chaque point de (M). La représentation plane de cette portion de surface sera alors une aire plane, limitée, à connexion simple, qui pourra, dans certaines parties, se composer de plusieurs feuillets et qui se terminera à la courbe dont les points correspondent à ceux de la limite de (M). Or, *si l'on veut que* (M) *soit limitée par des droites ou par des plans qu'elle coupera normalement, les différentes portions du contour seront des lignes asymptotiques de la surface si elles sont des droites, ou des lignes de courbure si elles sont dans les plans que la surface doit couper normalement.* Par conséquent, il leur correspondra, dans le tracé géographique plan, des parallèles aux axes coordonnés dans le second cas, et des parallèles aux bissectrices de ces axes dans le premier. Ainsi, *ce tracé géographique se composera d'une aire plane* (Σ) *limitée par des droites dont la direction au moins sera connue et qui se succéderont dans un ordre déterminé.*

Étudions maintenant la représentation sphérique de (M). Elle se compose d'une aire (S), pouvant recouvrir plusieurs fois certaines parties de la sphère; mais il résulte, comme nous le verrons, des hypothèses faites sur σ que cette aire (S) n'a aucun point de ramification dans son intérieur. Ici encore, on peut déterminer la courbe limite de (S). En effet, pour chaque portion de droite comprise dans le contour, la représentation sphérique sera un arc, plus ou moins étendu, du grand cercle dont le plan est perpendiculaire à cette droite. S'il y a, dans le contour considéré, des plans que la surface doit couper à angle droit, la courbe limite de la surface située dans ce plan sera représentée sur la sphère par une portion de grand cercle dont le plan sera parallèle au plan

du contour : on voit donc que *la représentation sphérique* (S) *du segment* (M) *sera limitée par des arcs de grands cercles dont la position sera connue et qui se succéderont dans un ordre parfaitement déterminé.*

Les deux aires (Σ) et (S) constituent deux représentations conformes de la surface (M). Si celle-ci était connue, il est clair que l'on pourrait obtenir une représentation directe et conforme de l'aire sphérique (S) sur l'aire plane (Σ). Inversement, si l'on a pu déterminer directement ce tracé géographique de (S) sur (Σ), c'est-à-dire si l'on a exprimé σ en fonction de u, on aura

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\frac{d\sigma^2}{du^2}; \tag{2}$$

et la fonction $\mathcal{F}(u)$ étant ainsi connue pour toutes les valeurs de u qui correspondent aux diverses parties de (S), le segment (M) sera pleinement déterminé. Nous sommes donc ramenés à la solution du problème suivant :

Réaliser une représentation conforme d'une aire sphérique (S), *limitée par des arcs de grands cercles, sur une aire plane* (Σ), *limitée par des droites.*

Comme on sait, à l'aide de la projection stéréographique, effectuer la représentation conforme de toute aire sphérique sur une aire plane, on voit que le problème précédent peut encore être énoncé sous la forme suivante :

Réaliser une représentation conforme d'une aire plane (S′) *limitée par des arcs de cercles, sur une aire plane* (Σ) *limitée par des droites.*

L'étude de cette belle question de Géométrie plane fera l'objet du Chapitre suivant.

CHAPITRE XI.

REPRÉSENTATION CONFORME DES AIRES PLANES.

Énoncé du problème à résoudre : faire la représentation conforme d'une aire plane à connexion simple sur une autre aire donnée de même connexion. On peut ramener ce problème au suivant : effectuer la représentation conforme d'une aire donnée (A) sur l'aire d'un cercle de rayon donné, choisi une fois pour toutes. On rappelle les résultats acquis sur ce sujet par les très nombreuses recherches que, depuis Riemann, les géomètres ont consacrées à cette étude, aussi importante pour l'Analyse que pour la Physique mathématique. — Le problème est ramené à la recherche d'une fonction de la variable complexe qui satisfait à des conditions bien déterminées dans l'intérieur de l'aire (A). Application à la portion de l'aire du plan qui se trouve au-dessus de l'axe des x. — Principe posé par M. Schwarz pour résoudre les problèmes de représentation conforme auxquels on a été conduit dans le Chapitre précédent. — Application de ce principe aux aires limitées par des droites. Cas particulier du triangle et du rectangle. — Des aires limitées par des arcs de cercle. On est conduit à intégrer une équation linéaire dont les coefficients sont connus. — Cas particulier du triangle formé par trois arcs de cercle. — Projection stéréographique du triangle formé par trois arcs de grand cercle de la sphère.

Représentation conforme, due à M. Schwarz, d'une aire elliptique sur une aire circulaire.

---

268. Nous avons reconnu au Livre II, Chapitre III, que l'on peut faire correspondre à toute fonction $Z = f(z)$ de la variable complexe une méthode de transformation des figures planes avec similitude directe des éléments infiniment petits, et nous avons exposé les propriétés les plus élémentaires des transformations en nombre illimité que l'on peut ainsi obtenir. Les recherches que nous avons exposées sur le problème de Plateau nous conduisent maintenant à étudier, dans un cas assez étendu, la solution du problème suivant :

Étant données deux aires planes (A), (A_1), *déterminer, si elle existe, la fonction* $Z = f(z)$ *qui permet d'effectuer une représentation conforme de l'une des aires sur l'autre, de telle manière qu'à un point pris dans l'intérieur de l'une quel-*

conque des deux aires corresponde un seul point pris dans l'intérieur de l'autre, et qu'à un point pris sur le contour de l'une des aires corresponde un seul point pris sur le contour de l'autre.

L'examen de cette question, prise dans son énoncé le plus général, se rattache à la solution des problèmes les plus importants de l'Analyse et de la Physique mathématique.

Depuis Riemann, qui l'a abordé dans sa *Dissertation inaugurale* (1) et qui l'a résolue en employant un postulatum auquel l'illustre géomètre a donné le nom de *principe de Dirichlet*, elle a fait l'objet d'un très grand nombre de travaux de haut intérêt et a été résolue par l'emploi des méthodes les plus variées. L'exposition de ces méthodes exigerait tout un volume et nous entraînerait trop loin. Dans l'exposé qui va suivre, nous nous attacherons surtout au cas particulier que nous venons de rencontrer dans l'étude du problème de Plateau, celui où les aires planes (A), (A_1) sont limitées par des lignes droites ou des arcs de cercle, et nous ferons connaître les belles recherches qui, dans ce cas spécial, ont conduit M. Schwarz à la solution (2).

269. Remarquons d'abord que l'énoncé du problème peut être modifié comme il suit.

Supposons, pour fixer les idées, que les deux aires (A), (A_1) soient simplement connexes, et choisissons une troisième aire (A_0), qui soit, elle aussi, simplement connexe, par exemple l'aire plane comprise à l'intérieur d'un cercle de rayon 1. Si l'on peut représenter les deux aires planes (A), (A_1) sur (A_0), on pourra évidemment les rapporter l'une à l'autre avec similitude des éléments infiniment petits. Le problème de Riemann est ainsi ramené au suivant :

Représenter une aire plane quelconque (A) *sur une aire déterminée, par exemple sur la surface* (A_0) *d'un cercle de*

---

(1) Riemann, *Œuvres mathématiques*, traduites par L. Laugel, p. 1.

(2) Les recherches de M. Schwarz sur le principe de Dirichlet, qu'il a démontré le premier dans toute sa généralité, et sur différents problèmes particuliers de représentation conforme se trouvent réunies dans le Tome II de ses *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Berlin, 1890.

rayon donné ou sur toute autre surface qu'on déduira de (A_0) *par une transformation conforme connue.*

Cet énoncé peut encore se transformer comme il suit.

Il est évident que, par la transformation conforme qui permet de représenter (A) sur (A_0), toute fonction de la variable complexe dans (A) se transformera en une fonction semblable dans (A_0) et *vice versa*. Supposons que (A_0) soit un cercle de rayon R ayant pour centre l'origine des coordonnées et considérons la fonction

$$\frac{z}{R}$$

à l'intérieur de ce cercle. Cette fonction aura une racine simple $z = 0$; elle prendra à l'intérieur du cercle, *une fois seulement*, toute valeur dont le module sera inférieur à l'unité. Sur le cercle même, elle prendra toutes les valeurs dont le module est égal à 1.

D'après cela, la fonction de la variable complexe qui lui correspondra dans l'aire (A) devra prendre à l'intérieur de cette aire, *une fois seulement*, toutes les valeurs, y compris zéro, dont le module est inférieur à l'unité et, en outre, prendre sur le contour de l'aire toutes les valeurs dont le module est égal à 1.

Les recherches dont nous avons parlé plus haut nous ont donné la solution de cette belle question. Elles ont montré que, pour des aires satisfaisant à des conditions qui seront toujours remplies dans les problèmes que nous aurons à résoudre, il existe une fonction $\Theta(Z)$ qui s'annule en un point arbitrairement choisi de l'aire et satisfait à toutes les conditions que nous venons d'énumérer. Il est même à remarquer que la fonction $\Theta(Z)$ n'est pas entièrement déterminée par la condition de s'annuler pour un point quelconque, situé à l'intérieur de l'aire et d'affixe $Z = a$, car on peut évidemment la multiplier, sans qu'elle cesse de satisfaire à toutes les conditions énumérées, par une constante $e^{i\alpha}$, de module égal à 1.

Supposons connue cette fonction $\Theta(Z)$, dont la détermination se ramène à celle de *la fonction de Green* relative au contour considéré. Alors, la représentation conforme de (A) sur (A_0) sera donnée par la formule

$$\Theta(Z) = ze^{i\alpha}.$$

On pourra choisir la constante α de telle manière qu'un point

du contour de (A) corresponde à un point arbitrairement choisi du contour de (A_0). Ainsi :

On peut effectuer une représentation conforme de l'aire (A) *sur le cercle* (A_0) *en faisant correspondre au centre du cercle un point quelconque de l'intérieur de* (A) *et à un point de la circonférence de* (A_0) *un point quelconque du contour de* (A).

270. Considérons, par exemple, l'aire (B_0) formée par la région du plan qui se trouve au-dessus de l'axe des x. Pour cette aire, on trouve aisément la fonction $\Theta(Z)$ qui est

$$\Theta(Z) = e^{i\alpha}\frac{Z-a}{Z-a_0},$$

a étant l'affixe d'un point situé dans la région et ayant, par conséquent, sa partie imaginaire positive, a_0 étant l'imaginaire conjuguée de a; a_0 sera donc l'affixe d'un point situé au-dessous de l'axe des x. On voit immédiatement que, pour tout point de l'aire (B_0), $\Theta(Z)$ a son module plus petit que 1, qu'elle passe une fois, et une fois seulement, par toute valeur de module inférieur à 1, que son module devient égal à 1, quand le point Z se trouve sur l'axe des x, limite de l'aire (B_0). Par conséquent, la formule

$$(1) \qquad \frac{z}{R} = e^{i\alpha}\frac{Z-a}{Z-a_0}$$

donnera la représentation conforme de l'aire (B_0) sur celle du cercle (A_0) de rayon R; et cette représentation sera la plus générale que l'on puisse obtenir.

Dans les applications, on substitue volontiers l'aire (B_0) à l'aire (A_0), c'est-à-dire qu'on préfère effectuer la représentation conforme de l'aire que l'on considère sur celle du demi-plan supérieur. C'est en vue de ces applications que nous présenterons la remarque suivante :

Considérons la tranformation conforme définie par la formule

$$(2) \qquad Z = \frac{az+b}{cz+d},$$

où a, b, c, d désignent des constantes *réelles*. Soient Z_0, z_0 les

variables imaginaires conjuguées de Z et de z, on aura

$$Z_0 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d}$$

et, par conséquent,

$$Z - Z_0 = \frac{(ad - bc)(z - z_0)}{(cz + d)(cz_0 + d)}.$$

On voit que, si le déterminant $ad - bc$ de la substitution est positif, $z - z_0$ et $Z - Z_0$ seront de même signe. Par suite, la transformation qui fait correspondre des valeurs réelles de Z à des valeurs réelles de z, fera aussi correspondre, aux valeurs de z dont la partie imaginaire est positive, des valeurs de Z jouissant de la même propriété. En d'autres termes, elle donnera une représentation conforme de la région (B_0) sur elle-même. On démontrera aisément, conformément au théorème général, qu'il est toujours possible de trouver une transformation de ce genre dans laquelle un point de l'intérieur de (B_0) correspond à un autre point donné quelconque de cette même région. Mais, de plus, on pourra établir qu'il existe une transformation de ce genre faisant correspondre trois points donnés de l'axe des x à trois autres points également donnés de cet axe, pourvu que ces derniers soient pris dans un ordre convenable. Par exemple, si les trois premiers points a, b, c sont rangés par ordre d'abscisses croissantes, de même que les trois autres points a', b', c', on pourra faire correspondre respectivement les trois premiers points, soit à a', b', c', soit à b', c', a', soit à c', a', b'. Ainsi :

Étant donnée une aire (A) *à connexion simple, on peut la représenter sur le demi-plan supérieur de telle manière qu'à trois points pris sur le contour de* (A) *correspondent trois points de l'axe des x arbitrairement choisis, mais rangés dans un ordre convenable.*

On peut encore préciser en disant que, le contour de (A) étant parcouru dans le sens direct, l'axe des x doit être parcouru de $-\infty$ à $+\infty$.

271. D'après les résultats que nous venons de rappeler, on peut indiquer les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction de

l'argument complexe

$$Z = f(z),$$

dont l'emploi permet de réaliser la représentation conforme de l'aire (A) sur le demi-plan supérieur :

1° Elle doit être développable en série suivant les puissances de $z - z_0$, si z_0 désigne l'affixe d'un point à l'intérieur de l'aire (A), et la série doit contenir la première puissance de $z - z_0$, sans quoi la fonction inverse ne pourrait être uniforme.

2° La fonction Z ne doit pas cesser d'être continue pour les valeurs réelles de z, qui correspondent à des points de l'axe des x; seulement, on ne suppose pas que, pour ces points, elle soit nécessairement développable suivant les puissances entières et positives de $z - z_0$, car elle n'est définie dans leur voisinage que pour les valeurs de z dont la partie imaginaire est positive.

3° Enfin z, considérée comme fonction de Z, doit satisfaire aux mêmes conditions que Z considérée comme fonction de z; c'est-à-dire qu'elle doit être, dans le voisinage du contour de l'aire (A), une fonction uniforme et continue de Z, prenant des valeurs réelles quand le point Z vient se placer sur le contour.

272. Après avoir indiqué les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction Z, nous allons exposer comment M. Schwarz a donné les moyens de déterminer cette fonction dans le cas où l'aire (A) est limitée par des droites ou par des arcs de cercle.

Voici le principe analytique sur lequel repose la solution [1] :

Soit Z une fonction de z, définie seulement pour la partie supérieure du plan et satisfaisant, d'ailleurs, à toutes les conditions énumérées dans le numéro précédent. Si la fonction est réelle pour toutes les valeurs réelles de z voisines d'une valeur réelle z_0, elle sera développable dans le voisinage de z_0 en une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $z - z_0$ et les coefficients de cette série seront tous réels.

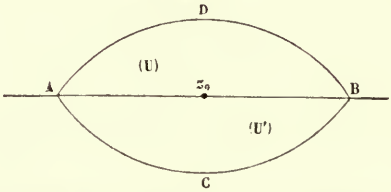
Considérons, en effet (*fig.* 20), une aire (U) limitée par le

---

[1] Ce principe a été énoncé et démontré par M. Schwarz dans un Article déjà cité (*Journal de Crelle*, t. LXX, p. 107). Il a été aussi employé par Riemann dans le Mémoire sur les surfaces minima.

contour Az_0BD, comprise tout entière dans la partie supérieure du plan, et soit (U') l'aire symétrique de la première par rapport à l'axe des x. La fonction Z n'est connue, par hypothèse, que pour la partie supérieure du plan. Mais on peut la définir aussi pour la partie inférieure en convenant qu'à deux valeurs imaginaires

Fig. 20.



conjuguées de la variable, qui sont représentées par deux points placés symétriquement par rapport à Ox, correspondent deux valeurs imaginaires conjuguées de la fonction. Ce *prolongement analytique* de la fonction laisse évidemment subsister la continuité puisque la fonction de Z est, d'après sa définition, réelle et continue pour les valeurs réelles de z.

La fonction étant ainsi définie dans l'intérieur des aires (U) et (U'), considérons les deux intégrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(U)}\frac{Z\,dz}{z-\zeta}, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(U')}\frac{Z\,dz}{z-\zeta},$$

prises le long des contours ABDA, ACBA des deux aires. D'après le théorème de Cauchy, la première de ces intégrales est égale à $f(\zeta)$ et la seconde est nulle, lorsque le point ζ se trouve à l'intérieur de l'aire (U); si, au contraire, le point ζ se trouve à l'intérieur de (U'), le résultat est inverse : la première intégrale est nulle et l'autre est égale à $f(\zeta)$ [1]. Donc, toutes les fois que le point ζ se trouve à l'intérieur de l'aire $(U) + U')$, la somme des deux intégrales est égale à $f(\zeta)$. Mais si l'on ajoute les deux inté-

[1] Il y a ici une légère difficulté que nous nous contenterons de signaler et qu'il est d'ailleurs facile de faire disparaître, tenant à ce que l'on applique le théorème de Cauchy à une fonction dont la dérivée n'existe pas nécessairement pour tous les points du contour. On reconnaîtra aisément que le théorème est encore applicable toutes les fois que la fonction $f(z)$ est supposée continue dans le voisinage du contour de l'aire.

grales, les parties relatives à la portion commune du contour AB, étant égales et contraires, se détruiront mutuellement, et il restera seulement l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{Z\,dz}{z-\zeta},$$

prise le long du contour ACBDA. Or, on sait, et il est évident, que cette intégrale est développable en série dans le voisinage de tous les points à l'intérieur du contour et, en particulier, pour les valeurs réelles de ζ, qui sont représentées par les points de la droite AB.

On aura, en particulier, pour $\zeta = z_0$,

$$Z - Z_0 = a(z - z_0) + b(z - z_0)^2 + c(z - z_0)^3 + \ldots,$$

et, comme à des valeurs réelles de z doivent correspondre des valeurs réelles de Z, les coefficients a, b, c seront tous réels. Si, de plus, il arrive, comme dans les exemples que nous allons traiter, que z, considérée comme fonction de Z, doive satisfaire aux mêmes conditions que Z, considérée comme une fonction de z, l'équation précédente, résolue par rapport à $z - z_0$, devra donner une série ordonnée par rapport aux puissances entières de $Z - Z_0$ et, par conséquent, le coefficient a sera toujours différent de zéro.

273. Ce lemme préliminaire étant établi, considérons d'abord une aire (A), limitée par des lignes droites $(L_1), \ldots, (L_n)$. Soit Z_0 l'affixe d'un point situé sur une des lignes (L) et soit $h\pi$ l'angle de cette ligne avec l'axe réel. Considérons la fonction

$$(Z - Z_0)\,e^{-th\pi}.$$

Pour un point Z situé à l'intérieur du contour, elle aura les mêmes propriétés que la fonction Z. Si le point Z se trouve sur la ligne (L) dans le voisinage de Z_0, elle sera réelle et changera de signe quand Z passera par la valeur Z_0. Il suit de là que l'on peut appliquer le lemme démontré au numéro précédent et poser

$$(3) \qquad e^{-th\pi}(Z - Z_0) = (z - z_0)\,p(z - z_0),$$

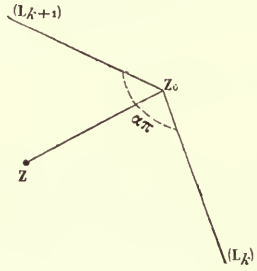
le symbole $p(z - z_0)$ désignant une série, ordonnée suivant les puissances positives et entières de $z - z_0$, dont tous les coefficients seront réels, le premier d'entre eux étant différent de zéro.

Étudions maintenant la fonction Z dans le voisinage de la valeur Z_0 qui correspond au point de rencontre de deux droites consécutives (L_k), (L_{k+1}) (*fig.* 21) faisant entre elles l'angle $\alpha\pi$.

Considérons la fonction $Z_0 - Z$; son argument, qui est l'angle de la droite ZZ_0 avec l'axe réel, varie entre les deux limites

$$h_k\pi, \quad h_k\pi - \alpha\pi.$$

Fig 21.



quand le point Z se déplace dans l'intérieur de l'aire et se dirige de (L_k) vers (L_{k+1}). Il suit de là que la fonction

$$[(Z_0 - Z)e^{-i\pi_k}]^{\frac{1}{\alpha}}$$

sera réelle et positive sur le côté (L_k), réelle et négative sur le côté (L_{k+1}) et, d'ailleurs, elle aura les mêmes propriétés que la fonction Z à l'intérieur de l'aire (A). L'application du lemme précédent nous donnera donc

$$[(Z_0 - Z)e^{-i\pi h_k}]^{\frac{1}{\alpha}} = (z - z_0)p(z - z_0),$$

$p(z - z_0)$ ayant la même signification que précédemment. On peut encore écrire, en élevant les deux membres de l'égalité à la puissance α,

$$(4) \qquad Z - Z_0 = e^{i\pi h_k}(z - z_0)^\alpha p(z - z_0).$$

Enfin, pour tous les points à l'intérieur du contour, la dérivée de Z n'étant jamais nulle, on aura

$$(5) \qquad Z - Z_0 = (z - z_0)\,P(z - z_0),$$

$P(z - z_0)$ désignant une série analogue à la série $p(z - z_0)$, mais dont les coefficients ne sont pas nécessairement réels.

Il nous reste à considérer le point du contour qui correspond à la valeur infinie de z. Comme on peut toujours effectuer la substitution

$$z = \frac{-1}{z_1},$$

qui donne une représentation conforme de la portion supérieure du plan sur elle-même, ce cas se ramène aux précédents et l'on aura

$$Z - Z_0 = \frac{e^{ih\pi}}{z} p\left(\frac{1}{z}\right) \tag{6}$$

si le point n'est pas un sommet du contour, et

$$Z - Z_0 = \frac{e^{ih\pi}}{z^\alpha} p\left(\frac{1}{z}\right) \tag{7}$$

si le point est un sommet où les deux côtés consécutifs se rencontrent sous l'angle $\alpha\pi$, mesuré toujours dans l'intérieur de (A).

274. Les développements précédents embrassent toutes les hypothèses possibles. Pour éliminer les constantes Z_0 et h qui changent de valeur quand on passe de l'un à l'autre, considérons avec M. Schwarz la fonction

$$\frac{d}{dz} \log \frac{dZ}{dz} = E(z). \tag{8}$$

On trouvera, par un calcul facile .

1° Pour un point pris à l'intérieur de l'aire,

$$E(z) = P_1(z - z_0); \tag{9}$$

2° Pour un point pris sur un des côtés du contour,

$$E(z) = p_1(z - z_0); \tag{10}$$

3° Pour un sommet du contour correspondant à l'angle $\alpha\pi$,

$$E(z) = \frac{\alpha - 1}{z - z_0} + p_1(z - z_0), \tag{11}$$

$P_1(z - z_0)$, $p_1(z - z_0)$ désignant des séries de puissances et les séries $p_1(z - z_0)$ ayant de plus leurs coefficients réels;

4° Enfin, pour le point correspondant à la valeur infinie de z,

$$(12) \qquad E(z) = -\frac{2}{z} + \frac{1}{z_2} p_1\left(\frac{1}{z}\right)$$

si ce point n'est pas un sommet du contour.

Les trois dernières formules nous montrent que la fonction $E(z)$ est réelle pour toutes les valeurs réelles de z et qu'elle peut, par conséquent, être prolongée analytiquement d'après la méthode indiquée au n° 272. D'ailleurs, elle n'a, d'après les développements précédents, qu'un nombre limité de pôles, qui correspondent aux sommets du contour; et elle devient infiniment petite pour z infiniment grand. D'après les théorèmes connus de la théorie des fonctions, elle sera donc une fraction rationnelle.

Soient a, b, c, ..., l les valeurs de z qui correspondent aux sommets du contour et soient $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, ..., $\lambda\pi$ les angles formés en ces sommets, mesurés dans l'intérieur du polygone. On aura

$$(13) \qquad E(z) = \sum \frac{\alpha - 1}{z - a} = \frac{d}{dz} \log \frac{dZ}{dz},$$

avec la condition

$$\Sigma(\alpha - 1) = -2,$$

qui n'est que l'expression analytique du théorème relatif à la somme des angles d'un polygone.

L'intégration de l'équation (13) nous donne

$$Z = C \int (z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1}\ldots(z-l)^{\lambda-1}\,dz + C',$$

C et C′ désignant deux constantes arbitraires réelles ou imaginaires. En déplaçant l'aire (A) sans changer ni sa forme ni sa grandeur, on peut ramener l'expression de Z à la forme

$$(14) \qquad Z = H \int (z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1}\ldots(z-l)^{\lambda-1}\,dz,$$

où H désigne une constante réelle.

Telle est la formule donnée par M. Schwarz [1] et par Christoffel [2].

Comme on peut prendre arbitrairement (n° 270) les valeurs de z qui correspondent à trois sommets du polygone, elle contient en réalité $2n-3$ const. On peut disposer de ces constantes de manière à obtenir la représentation conforme d'un polygone quelconque, mais ce résultat essentiel se déduit seulement du théorème général relatif à la représentation conforme des aires planes quelconques, et nous ne connaissons qu'un travail développé où se trouve étudiée d'une manière générale la détermination des constantes $a, b, c, \ldots, l$, H lorsque le polygone est donné [3].

Dans le cas du triangle, dont la forme est déterminée par la valeur des angles, la solution est évidente. En faisant varier la constante H, on obtiendra tous les triangles semblables à un triangle donné, et l'on pourra déterminer cette constante de manière à obtenir l'un quelconque de ces triangles.

Si le polygone est un rectangle, on aura

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{2};$$

Z deviendra une intégrale elliptique que l'on pourra supposer ramenée à la forme normale

$$(15) \qquad Z = H \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

Les côtés du rectangle seront

$$a = 2HK, \qquad b = HK',$$

K et K′ désignant les intégrales complètes qui entrent dans la

---

(1) Schwarz, *Ueber einige Abbildungsaufgaben* (*Gesammelte mathematische Abhandlungen*, t. II, p. 76).

(2) Christoffel, *Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie* (*Annali di Matematica*, t. I, 1867, p. 97).

(3) Schälfli, *Ueber die allgemeine Möglichkeit der conformen Abbildung einer von Geraden begrenzten ebenen Figur in eine Halbebene* (*Journal de Crelle*, t. LXXVIII, 1873, p. 63).

Voir, au sujet de ce travail, un Mémoire de M. Jules Riemann, *Sur le principe de Dirichlet*, inséré en 1888 aux *Annales de l'École Normale supérieure* (3e série, t. V, p. 327).

formation des périodes; par conséquent, si l'on pose

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}} = e^{-\frac{2\pi b}{a}},$$

le module sera défini par l'équation

$$k = 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4,$$

qui donnera ainsi, dans ce cas particulier, la solution complète du problème.

275. Passons maintenant à l'examen du cas où le contour est composé d'arcs de cercles; nous supposerons, pour plus de netteté, que deux cercles consécutifs ne soient jamais tangents.

Comme on peut toujours, au moyen de la transformation circulaire (n° 124) définie par la formule

$$Z = \frac{aZ_1 + b}{cZ_1 + d}, \tag{16}$$

transformer en une ligne droite un quelconque des cercles qui composent le contour, et même deux cercles consécutifs de ce contour, nous pouvons appliquer immédiatement les résultats obtenus au n° 273 et nous voyons que l'on pourra toujours choisir les constantes réelles ou imaginaires a, b, c, d de telle manière que Z_1 prenne la forme (3) sur un des côtés, et la forme (4) en un des sommets du contour. On aura donc pour Z les expressions suivantes :

1° En un point quelconque du contour,

$$Z = \frac{a(z-z_0)p(z-z_0)+b}{c(z-z_0)p(z-z_0)+d}; \tag{17}$$

2° En un sommet où deux cercles consécutifs font l'angle $\alpha\pi$, mesuré dans l'intérieur de l'aire,

$$Z = \frac{a(z-z_0)^\alpha p(z-z_0)+b}{c(z-z_0)^\alpha p(z-z_0)+d}; \tag{18}$$

3° Au point du contour qui correspond à la valeur ∞ de z,

$$Z = \frac{\frac{a}{z}p\left(\frac{1}{z}\right)+b}{\frac{c}{z}p\left(\frac{1}{z}\right)+d}, \tag{19}$$

si le point n'est pas un des sommets du contour, et

$$(20)\qquad Z = \frac{\frac{a}{z^\alpha} p\left(\frac{1}{z}\right) + b}{\frac{c}{z^\alpha} p\left(\frac{1}{z}\right) + d},$$

si le point est un sommet où deux côtés consécutifs font l'angle $\alpha\pi$.

4° Enfin, pour un point à l'intérieur de l'aire, on aura, comme précédemment,

$$(21)\qquad Z - Z_0 = (z - z_0)\, P(z - z_0).$$

276. Dans ces différentes formules, a, b, c, d désignent des constantes réelles ou imaginaires, qui ont des valeurs différentes suivant les développements que l'on considère. Voici l'artifice ingénieux par lequel M. Schwarz a éliminé tout ce qui concerne ces constantes.

Soit, d'une manière générale,

$$Z = \frac{aT + b}{cT + d}, \qquad cZT + dZ - aT - b = 0$$

une relation entre deux fonctions Z et T d'une variable z. Si l'on élimine les constantes par la différentiation, on sera conduit à la relation

$$\begin{vmatrix} (ZT)' & Z' & T' \\ (ZT)'' & Z'' & T'' \\ (ZT)''' & Z''' & T''' \end{vmatrix}$$

qui, développée, prend la forme élégante

$$(22)\qquad \frac{d^2}{dz^2}\left(\log\frac{dZ}{dz}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\log\frac{dZ}{dz}\right)^2 = \frac{d^2}{dz^2}\left(\log\frac{dT}{dz}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\log\frac{dT}{dz}\right)^2,$$

où les variables sont séparées. Si l'on adopte une notation de Cayley [1] et si l'on pose

$$(23)\qquad \{Z, z\} = \frac{d^2}{dz^2}\left(\log\frac{dZ}{dz}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\log\frac{dZ}{dz}\right)^2,$$

on aura donc

$$\{Z, z\} = \{T, z\}.$$

---

[1] Cayley, *On the schwarzian derivative and the polyhedral fonctions* (*Cambridge philosophical Transactions*, mars 1880).

En nous servant des résultats précédents, nous allons étudier le développement de la fonction $\{Z, z\}$, pour tous les points situés à l'intérieur ou sur le contour de l'aire (A).

1° Pour un point quelconque du contour, il faut remplacer T par le développement

$$(z - z_0)\, p\,(z - z_0),$$

qui entre dans la formule (17). On trouve ainsi un résultat de la forme

$$\{Z, z\} = h\,(z - z_0) + k\,(z - z_0)^2 + \ldots.$$

2° Pour un sommet, la valeur de T est celle qui figure dans la formule (18),

$$T = (z - z_0)^\alpha p\,(z - z_0).$$

Un calcul facile donne alors

$$\{Z, z\} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \alpha^2}{(z - z_0)^2} + \frac{h}{z - z_0} + k + l\,(z - z_0) + \ldots.$$

3° Pour le point du contour correspondant à la valeur ∞ de z, on trouve de même

$$\{Z, z\} = \frac{h}{z^4} + \frac{k}{z^5} + \ldots,$$

si le point n'est pas un sommet et si l'on emploie la valeur de T correspondant au développement (19). Si, au contraire, le point est un sommet, il faut mettre pour T la valeur $\frac{1}{z^\alpha} p\left(\frac{1}{z}\right)$, ce qui donne

$$\{Z, z\} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \alpha^2}{z^2} + \frac{h}{z^3} + \frac{k}{z^4} + \ldots.$$

Remarquons, d'une manière générale, que, pour tous ces développements, les coefficients sont tous réels. La fonction $\{Z, z\}$ est donc réelle pour toutes les valeurs réelles de z; elle pourra être prolongée analytiquement d'après la méthode du n° 272 et sera, par suite, définie dans toute l'étendue du plan.

4° Enfin, pour un point à l'intérieur de (A), la dérivée $\frac{dZ}{dz}$ ne sera jamais nulle et $\{Z, z\}$ sera, comme z, une fonction développable pour toutes les valeurs de z.

La fonction $\{Z, z\}$ ayant toutes les propriétés d'une fraction

rationnelle pour les valeurs finies de z et devenant infiniment petite pour z infini, sera une fraction rationnelle. Soient a_1, a_2, ..., a_n les valeurs de z qui correspondent aux sommets du contour $\alpha_1\pi$, $a_2\pi$, ..., $\alpha_n\pi$ les angles correspondants formés par deux côtés consécutifs. Si l'on a, pour $z = a_i$,

$$\{Z, z\} = \frac{1}{2}\frac{1-\alpha_i^2}{(z-a_i)^2} + \frac{h_i}{z-a_i} + k_i + \ldots,$$

la fonction

$$\{Z, z\} - \sum \frac{1}{2}\frac{1-\alpha_i^2}{(z-a_i)^2} - \sum \frac{h_i}{z-a_i},$$

demeurant finie pour toutes les valeurs finies de z et devenant infiniment petite pour z infini, sera nécessairement égale à zéro; on aura, par conséquent,

$$(24) \qquad \{Z, z\} = \sum \frac{1}{2}\frac{1-a_i^2}{(z-a_i)^2} + \sum \frac{h_i}{z-a_i} = F(z).$$

Si le point du contour qui correspond à la valeur infinie de z n'est pas un sommet, il faudra, nous l'avons vu, que le développement du second membre suivant les puissances de $\frac{1}{z}$ commence au terme en $\frac{z}{z^4}$, ce qui donnera les égalités

$$(25) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \Sigma h_i = 0, \\ \sum \left(a_i h_i + \frac{1+\alpha_i^2}{2}\right) = 0, \\ \Sigma\,[a_i^2 h_i + a_i(1-a_i^2)] = 0, \end{array} \right.$$

auxquelles devront satisfaire les constantes h_i, α_i.

Si, au contraire, le point du contour correspondant à la valeur $z = \infty$ est un sommet où l'angle de deux côtés consécutifs est $\beta\pi$, le développement devra commencer par le terme $\frac{1-\beta^2}{2z^2}$, ce qui donnera seulement les deux relations

$$(26) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \Sigma h_i = 0, \\ \sum \left(a_i h_i + \frac{1-a_i^2}{2}\right) = \frac{1-\beta^2}{2}. \end{array} \right.$$

La valeur de $\{Z, z\}$ étant obtenue, la suite des raisonnements

nous conduit à considérer l'équation du troisième ordre

$$\{Z, z\} = F(z) \tag{27}$$

et à essayer de l'intégrer.

L'origine et les propriétés de cette équation simplifient beaucoup la résolution de ce problème. En effet, d'après le mode de formation de l'expression $\{Z, z\}$, la relation différentielle

$$\{Z, z\} = \{Z_1, z\}$$

est *équivalente* à la relation, en termes finis,

$$Z = \frac{aZ_1 + b}{cZ_1 + d},$$

et, par suite, la connaissance d'*une seule* solution particulière Z_1 de l'équation (27) entraînera celle de l'intégrale générale, qui sera donnée par la formule précédente, où les constantes a, b, c, d pourront recevoir des valeurs quelconques. Cette propriété si remarquable de l'équation (27) la rapproche des équations linéaires et, effectivement, il est aisé de montrer que l'intégration de cette équation peut être ramenée à celle d'une équation linéaire du second ordre.

Considérons, en effet, une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + p\frac{d\theta}{dz} + q\theta = 0, \tag{28}$$

où p et q sont des fonctions données de z, et cherchons l'équation différentielle à laquelle satisfait le rapport

$$Z = \frac{\theta_2}{\theta_1} \tag{29}$$

de deux intégrales particulières. On trouvera, par un calcul facile,

$$\{Z, z\} = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dz}. \tag{30}$$

L'équation ainsi obtenue est de même forme que la proposée (27). Il suffira de choisir p arbitrairement, de déterminer q par la relation

$$2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dz} = F(z), \tag{31}$$

et l'intégration de l'équation (27) sera ramenée à celle de l'équation linéaire (28). Si l'on prenait, par exemple, $p = 0$, l'équation linéaire se réduirait à la suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{2} F(z)\,\theta = 0. \tag{32}$$

Au reste, on s'explique qu'une certaine indétermination puisse subsister relativement à l'équation linéaire, puisque le rapport de deux intégrales particulières ne change pas quand on les multiplie l'une et l'autre par une même fonction donnée, mais quelconque, de z.

L'équation (32), ainsi que toutes celles que l'on obtiendrait en prenant pour p la valeur suivante :

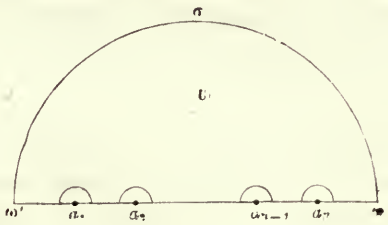
$$p = \sum \frac{\beta_i}{z - a_i},$$

où les constantes β_i sont des nombres réels quelconques, a tous ses coefficients et tous ses points singuliers réels ; de plus, toutes ses intégrales sont *régulières*.

Réciproquement, si l'on considère *a priori* une équation linéaire quelconque du second ordre possédant toutes ces propriétés, on peut établir que le rapport de ses intégrales donne la représentation conforme sur la partie supérieure du plan d'une aire plus ou moins complexe, limitée par des arcs de cercle.

Marquons, en effet, sur l'axe réel (*fig.* 22) les points singuliers

Fig. 22.



$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ de l'équation, et soit

$$Z = \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

le rapport de deux intégrales particulières quelconques, qui, d'après les hypothèses relatives à l'équation, sont des fonctions uniformes de z dans l'aire (U) limitée par l'axe réel et par le demi-cercle $\omega\sigma\omega$ de rayon infini. Dans chacun des intervalles $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, ..., $a_{i-1} a_i$, ..., $a_n \infty_1$, on pourra obtenir deux intégrales particulières qui seront réelles toutes les deux pour des valeurs réelles de z. Si l'on désigne, par exemple, par t_{i-1} le rapport de ces deux intégrales dans l'intervalle $a_{i-1} a_i$, on aura évidemment

$$Z = \frac{\alpha_{i-1} + \beta_{i-1} t_{i-1}}{\gamma_{i-1} + \delta_{i-1} t_{i-i}},$$

α_{i-1}, β_{i-1}, γ_{i-1}, δ_{i-1} désignant des constantes réelles ou imaginaires, et, comme la variable t_{i-1} demeure réelle lorsque le point z décrit le segment $a_{i-1} a_i$, on voit que le point Z décrira un arc de cercle. Les arcs de cercle décrits par le point Z qui correspondent ainsi aux n intervalles forment un polygone fermé dans lequel les côtés consécutifs se coupent sous des angles dont la grandeur est quelconque; deux côtés consécutifs peuvent même être tangents quand les développements des intégrales dans le voisinage d'un point singulier contiennent des logarithmes. Mais l'examen de tous les cas, la définition précise de l'aire dont on obtient ainsi la représentation conforme, nous entraîneraient trop loin.

Nous nous contenterons de remarquer que l'équation (27) contient bien le nombre de constantes qui est nécessaire si l'on veut effectuer la représentation conforme d'un polygone quelconque composé d'arcs de cercle sur la partie supérieure du plan. En effet, la fonction $F(z)$ dépend de $3n$ constantes réelles liées par les trois équations (25), et, comme, d'ailleurs, on peut prendre arbitrairement trois des quantités a_i (n° 270), il reste seulement $3n - 6$ paramètres réels; mais il faut leur ajouter six autres paramètres réels servant à former les trois constantes imaginaires qui figurent dans l'intégrale générale de l'équation (27). Le nombre $3n$ de constantes réelles ainsi obtenu est précisément égal à celui des paramètres arbitraires dont dépend un polygone formé de n arcs de cercle.

Il résulte des propositions générales qui ont été rappelées que l'on pourra toujours déterminer ces constantes de manière à obtenir effectivement la solution du problème proposé.

277. Proposons-nous, comme application, de déterminer la représentation conforme d'un triangle formé par trois arcs de cercle. Nous pouvons toujours supposer que les trois sommets de ce triangle correspondent aux valeurs 0, 1, ∞ de z. Soient $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ les angles du triangle en ces trois sommets. Nous aurons ici

$$\{Z, z\} = \frac{1}{2}\frac{1-\lambda^2}{z^2} + \frac{a_1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1-\mu^2}{(1-z)^2} + \frac{z-1}{a_2},$$

et, de plus, le développement suivant les puissances positives de $\frac{1}{z}$ devra commencer par le terme $\frac{1}{2}\frac{1-\nu^2}{z^2}$. Cette condition détermine a_1, a_2, et l'on trouve

$$(33)\qquad \{Z, z\} = \frac{1}{2}\frac{1-\lambda^2}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{1-\mu^2}{(1-z)^2} + \frac{1}{2}\frac{1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2}{z(1-z)}.$$

Or, si l'on considère l'équation

$$(34)\qquad z(1-z)\frac{d^2\theta}{dz^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\frac{d\theta}{dz} - \alpha\beta\theta = 0,$$

qui définit la série hypergéométrique de Gauss, on reconnaît aisément, en appliquant la formule (30), que le rapport de ses deux intégrales satisfait à l'équation (33) si l'on prend

$$(35)\qquad \lambda^2 = (1-\gamma)^2, \qquad \mu^2 = (\gamma-\alpha-\beta)^2, \qquad \nu^2 = (\alpha-\beta)^2.$$

On pourra donc exprimer Z par le quotient de deux intégrales particulières de l'équation (34). Ces intégrales sont bien connues; on peut déterminer les variations qu'elles éprouvent quand on suit un chemin quelconque du plan [1] et l'on vérifie qu'elles fournissent effectivement la représentation cherchée.

Parmi les quatre systèmes de valeurs de α, β, γ déterminés par les équations (35), choisissons le suivant, par exemple,

$$(36)\qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(1-\lambda-\mu+\nu), \\ \beta = \frac{1}{2}(1-\lambda-\mu-\nu), \\ \gamma = 1-\lambda. \end{cases}$$

---

[1] Krummer, *Ueber die hypergeometrische Reihe* (*Journal de Crelle*, t. 15, 1836).

E. Goursat, *Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique* (*Annales de l'École Normale*, 2e série. Supplément au Tome X, 1881).

L'équation différentielle (34) admet plusieurs solutions particulières, parmi lesquelles nous distinguerons les suivantes :

$$(37)\quad \begin{cases} \theta_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, z), \\ \theta_2 = z^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, z), \\ \theta_3 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - z), \\ \theta_4 = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta, 1 - z), \end{cases}$$

où le symbole F désigne la série hypergéométrique de Gauss. Si l'on convient que les arguments de z et de $1 - z$ seront pris égaux à zéro quand la variable z sera réelle et comprise entre 0 et 1, ces intégrales seront déterminées sans ambiguïté pour toute la région supérieure du plan, et les formules que l'on trouvera aux pages 20 et 21 du beau Mémoire de M. Goursat permettront d'en calculer la valeur pour chaque point de cette région. Elles satisfont, d'ailleurs, dans toute la région considérée, aux deux équations (que l'on trouvera à la page 28 de ce Mémoire)

$$(38)\quad \begin{cases} \theta_1 = a\theta_3 + b\theta_4, \\ \theta_2 = a'\theta_3 + b'\theta_4, \end{cases}$$

où l'on a

$$(39)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}, & b = \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, \\ a' = \dfrac{\Gamma(2 - \gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)}, & b' = \dfrac{\Gamma(2 - \gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha + 1 - \gamma)\Gamma(\beta + 1 - \gamma)}. \end{cases}$$

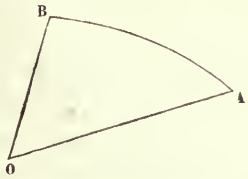
Ces points étant admis, désignons par C une constante réelle ou imaginaire, et posons

$$(40)\quad CZ = \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

Quand z varie entre 0 et 1, le rapport $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ est réel, l'argument de Z est constant et égal à celui de $\frac{1}{C}$. Le point Z décrit donc un segment de droite OA (*fig.* 23). Si, au contraire, le point z passe, par la partie supérieure du plan, aux valeurs comprises entre zéro et $-\infty$, θ_1 reste réelle, l'argument de θ_2 devient égal à $\pi(1 - \gamma)$ ou $\pi\lambda$. L'argument de Z augmente donc de $\pi\lambda$ et, comme il demeure encore constant, le point Z décrit un segment OB ayant son origine en O et faisant avec OA l'angle $\lambda\pi$.

Supposons maintenant que z passe, par la région supérieure du plan, aux valeurs comprises entre 1 et $+\infty$. L'intégrale θ_3 est

Fig. 23.



réelle. Quant à l'intégrale θ_4, elle est imaginaire et, comme l'argument de $1 - z$ devient égal à $-\pi$, celui de l'intégrale est

$$-\pi(\gamma - \alpha - \beta) \qquad \text{ou} \qquad -\mu\pi.$$

Si donc on pose

$$\frac{\theta_4}{\theta_3} = \mathrm{T}e^{-i\mu\pi},$$

la variable T sera réelle. En divisant membre à membre les deux équations (38), on aura

$$\mathrm{CZ} = \frac{a' + b'\mathrm{T}e^{-i\mu\pi}}{a + b\mathrm{T}e^{-i\mu\pi}}.$$

Si l'on change i en $-i$ et si l'on désigne par C_0, Z_0 les imaginaires conjuguées de C et de Z, on trouvera

$$\mathrm{C}_0\mathrm{Z}_0 = \frac{a' + b'\mathrm{T}e^{i\mu\pi}}{a + b\mathrm{T}e^{i\mu\pi}}.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer T entre les deux équations précédentes et l'on obtient l'équation

$$\begin{aligned}(ab\,\mathrm{CC}_0\mathrm{ZZ}_0 + a'b')(1 - e^{2i\mu\pi}) + \mathrm{CZ}(ab'e^{2i\mu\pi} - ba') \\ + \mathrm{C}_0\mathrm{Z}_0(ba'e^{2i\mu\pi} - ab') = 0,\end{aligned}$$

qui représente l'arc de cercle passant par les points A, B et décrit par le point Z quand z varie entre 1 et $+\infty$.

La puissance t^2 de l'origine par rapport au cercle précédent a pour expression

$$t^2 = \frac{1}{\mathrm{CC}_0}\,\frac{a'b'}{ab}$$

ou, en remplaçant a, b, a', b' par leurs valeurs

$$(41)\quad t^2 = \frac{1}{CC_0}\,\frac{\Gamma^2(1+\lambda)}{\Gamma^2(1-\lambda)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu-\nu}{2}\right)}.$$

Le calcul de cette puissance t^2 offre de l'intérêt; car, si elle est positive, il y aura un cercle décrit de l'origine comme centre et coupant à angle droit le côté AB, c'est-à-dire un cercle orthogonal aux trois côtés du triangle OAB. Si, au contraire, elle est négative, il n'y aura pas de cercle réel satisfaisant à ces conditions.

Comme les arguments des fonctions Γ qui figurent dans la formule précédente sont tous supérieurs à -1, ces fonctions auront le même signe que les variables dont elles dépendent. On reconnaît ainsi que la puissance t^2 sera négative, si l'on a

$$(42)\quad \begin{cases} \lambda+\mu+\nu > 1, \\ \nu+1 > \lambda+\nu, \\ \mu+1 > \lambda+\mu, \\ \lambda+1 > \mu+\nu, \end{cases}$$

c'est-à-dire si les angles du triangle OAB satisfont à toutes les relations d'inégalité qui existent entre les angles d'un triangle sphérique. Au contraire, la puissance t^2 sera positive si les inégalités précédentes ne sont pas toutes vérifiées. Ce résultat est bien conforme à celui que donne la Géométrie : pour qu'un triangle formé par trois arcs de cercle soit la projection stéréographique d'un triangle sphérique, il faut et il suffit, comme on sait, que le cercle orthogonal aux trois côtés du triangle soit imaginaire.

Si, au lieu de la variable Z définie par la formule (40), nous avions choisi la suivante :

$$Z_1 = \frac{aZ+b}{cZ-d},$$

a, b, c, d désignant des constantes quelconques, nous aurions obtenu, au lieu du triangle OAB, un triangle ayant les mêmes angles, mais dont les côtés auraient été, en général, des arcs de cercle; car il se déduit du triangle OAB par une transformation circulaire quelconque.

Supposons que les angles λ, μ, ν satisfassent aux relations d'iné-

galité (42) et prenons pour le module de C la valeur

$$(43)\quad \sqrt{CC_0} = \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(1-\lambda)} \times \sqrt{-\frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu-\nu}{2}\right)}}$$

t^2 deviendra égal à -1, et les trois côtés du triangle OAB seront orthogonaux au cercle de rayon i ayant l'origine pour centre. On sait que, dans ce cas, les trois côtés peuvent être considérés comme la projection stéréographique de trois arcs de grand cercle tracés sur la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine. Si donc on représente, suivant la méthode de Riemann, la variable Z par un point de cette sphère, les résultats précédents donnent la représentation conforme de l'aire d'un triangle sphérique sur la partie supérieure du plan. Le sommet de ce triangle qui correspond à l'angle $\lambda\pi$ est placé au point le plus bas de la sphère et diamétralement opposé au pôle de la projection stéréographique.

278. Nous terminerons ce Chapitre en démontrant un résultat qui se déduit facilement de celui qui a été donné au n° **274**.

Considérons la transformation conforme définie d'une manière générale par l'équation différentielle

$$(44)\qquad \frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-k^2Z^2)}} = M\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

où k désigne une constante réelle et plus petite que 1. Pour préciser, nous supposerons que l'on ait choisi les signes des radicaux de telle manière qu'ils se réduisent à 1 lorsqu'on égale à zéro la variable dont ils dépendent, et que la constante M ait été choisie de telle manière que l'on ait $z = 1$ pour $Z = 1$, $z = 0$ pour $Z = 0$. On aura alors

$$(45)\qquad \int_0^Z \frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-k^2Z^2)}} = \frac{2K}{\pi}\int_0^Z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Si l'on suppose que la variable Z se meuve dans une aire ne contenant aucun des deux points d'affixes $\frac{1}{k}$, $\frac{-1}{k}$, par exemple dans

un cercle de rayon inférieur à $\frac{1}{k}$, on peut établir que la transformation sera univoque.

Car, quel que soit le chemin suivi dans cette aire pour aller de l'origine au point d'affixe Z, les valeurs de l'intégrale

$$\int_0^Z \frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-k^2Z^2)}}$$

seront comprises dans l'une ou l'autre des formules

$$4m\mathrm{K}+\alpha, \quad (4m+2)\mathrm{K}-\alpha,$$

α désignant, par exemple, l'intégrale rectiligne de O à Z et m étant un nombre entier. D'après la formule (45), les valeurs de l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

seront comprises dans l'une ou l'autre des formules

$$2m\pi+\frac{\pi\alpha}{2\mathrm{K}}, \quad (2m+1)\pi-\frac{\pi\alpha}{2\mathrm{K}}$$

et *correspondront, par conséquent, à la même valeur de* z.

Bien que transcendante, la transformation définie par la formule (45), ou par la suivante qui lui est équivalente,

$$\mathrm{Z}=\mathrm{sn}\left(\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\arcsin z\right) \tag{46}$$

fait correspondre des courbes algébriques à des courbes algébriques. Les courbes d'égale partie réelle et d'égale partie imaginaire de l'intégrale qui figure dans le second membre de la formule sont, d'après les propriétés des fonctions circulaires (n° **126**), des hyperboles et des ellipses ayant pour foyers les deux points

$$z=\pm 1.$$

De même, d'après les propriétés des fonctions elliptiques, les courbes d'égale partie réelle et d'égale partie imaginaire de l'intégrale qui figure dans le premier membre de la même formule (45) sont des courbes anallagmatiques du quatrième ordre ayant pour

foyers les quatre points

$$z = \pm 1, \qquad z = \pm k.$$

L'une de ces courbes, celle qui est définie par l'équation

$$\int_0^Z \frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-k^2Z^2)}} - \int_0^{Z_0} \frac{dZ_0}{\sqrt{(1-Z_0^2)(1-k^2Z_0^2)}} = iK,$$

est précisément le cercle

$$ZZ_0 = \frac{1}{K}, \tag{47}$$

limitant une région où, d'après les remarques faites plus haut, *la transformation est univoque.*

La courbe correspondante dans le plan de la variable z sera définie par l'équation

$$\int_0^Z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_0^{Z_0} \frac{dz_0}{\sqrt{1-z_0^2}} = \frac{\pi i K'}{2K},$$

qui définit une ellipse dont les demi-axes sont

$$\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} = a, \qquad \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} = b,$$

β ayant pour valeur

$$\beta = \frac{\pi K'}{4K}.$$

Ainsi, l'intérieur de cette ellipse est représenté d'une manière conforme sur l'intérieur du cercle (47) de rayon $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

D'après la théorie des fonctions elliptiques, on sait que si l'on pose

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2},$$

on a

$$k = 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4. \tag{48}$$

Ainsi, on déterminera aisément le cercle quand l'ellipse sera connue.

Cette belle solution du problème de la représentation conforme de l'intérieur d'une ellipse sur l'intérieur d'un cercle est due à M. Schwarz, qui l'a donnée en 1869 dans les *Annali di Matematica pura ed applicata*, 2e série, t. III [1].

---

[1] *Voir* H. A. Schwarz, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, t. II, 1890, p. 102.

CHAPITRE XII.

LE PROBLÈME DE PLATEAU. APPLICATIONS.

Surface minima limitée par deux droites quelconques. — Surface minima limitée par deux droites qui se coupent et par un plan qui rencontre les deux droites et que la surface doit couper à angle droit. — Surface minima limitée par trois droites dont l'une rencontre les deux autres. — Surface minima limitée par les côtés d'un quadrilatère gauche. Équation linéaire du second ordre dont dépend la solution du problème; formes diverses que l'on peut donner à cette équation. — Cas particulier où le quadrilatère a un plan de symétrie. — Après ces applications particulières, on discute les cas les plus généraux et l'on montre qu'il est nécessaire d'élargir les hypothèses faites sur les deux représentations conformes de la surface en admettant l'existence de *points de ramification.*

---

279. Les développements donnés au Chapitre précédent nous permettent de poursuivre l'application de la méthode que nous avons donnée à la fin du Chapitre X pour la solution du problème de Plateau dans les cas spéciaux considérés par Riemann et M. Schwarz. Supposons qu'on ait pu obtenir, par l'emploi des méthodes indiquées au Chapitre précédent, la représentation sur le demi-plan supérieur des deux aires que nous avons désignées par (S) et (Σ); on aura ainsi exprimé σ et u en fonction d'une variable t assujettie à l'unique condition que sa partie imaginaire soit positive. On portera ces valeurs de u et de σ dans les formules de Weierstrass, où l'on aura remplacé $\mathcal{F}(u)$ par sa valeur tirée de la formule (2) du n° 267; ce qui donnera

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \mathcal{R}\int \frac{1-u^2}{2}\,\frac{d\sigma^2}{du},\\ y &= \mathcal{R}\int i\,\frac{1+u^2}{2}\,\frac{d\sigma^2}{du},\\ z &= \mathcal{R}\int u\,\frac{d\sigma^2}{du},\end{aligned}\right.$$

u et σ étant des fonctions connues de la variable t.

280. Nous allons indiquer différents exemples auxquels on peut appliquer la méthode précédente.

Proposons-nous d'abord de déterminer la surface minima (M), nécessairement infinie, limitée par deux droites quelconques. Construisons, sur la sphère de rayon 1, les deux grands cercles COC'O', DOD'O' se coupant en O, O', dont les plans sont perpendiculaires à ces droites; et soit $\alpha\pi$ l'angle COD de ces deux cercles, égal à celui des deux droites. La surface cherchée (M) aura pour représentation sphérique une aire limitée par ces deux cercles. Choisissons, par exemple, pour cette aire, le fuseau OCO'D, d'angle $\alpha\pi$. Si l'on prend pour axe des z le diamètre O'O et pour plan des yz le plan ODO', l'origine des coordonnées étant toujours au centre de la sphère, le point O correspondra à la valeur zéro de la valeur u et le tracé géographique du fuseau OCO'D sur la partie supérieure du plan sera déterminé par la formule

$$u = t^{\alpha}, \tag{4}$$

car on voit immédiatement que, lorsque l'argument de t varie entre zéro et π, celui de u varie entre zéro et $\alpha\pi$.

Mais, il importe de le remarquer, on peut imaginer une infinité d'aires sphériques ayant les mêmes limites que le fuseau précédent; si l'on fait tourner, en effet, le demi-cercle ODO', dans tel sens que l'on voudra, autour de OO', en continuant indéfiniment le mouvement, il viendra périodiquement coïncider avec l'une des moitiés du second cercle OCO'C', et la $n^{\text{ième}}$ coïncidence se produira après que ODO' aura fait $n - 1$ demi-révolutions.

L'aire sphérique ainsi engendrée par le demi-cercle se composera de plusieurs feuillets superposés et pourra recouvrir la sphère autant de fois qu'on le voudra; il sera évidemment permis de la substituer au fuseau précédent et de la considérer comme la représentation sphérique de la surface cherchée. On reconnaît d'ailleurs aisément que l'on embrasse tous les cas que nous venons d'énumérer en augmentant α, dans la formule (4), d'un nombre entier quelconque, positif ou négatif, ou, ce qui est la même chose, en convenant de désigner par $\alpha\pi$ une quelconque des déterminations de l'angle des deux droites données.

Examinons maintenant le second tracé géographique, la repré-

sentation plane (Σ) de (M). Si l'on suppose que les deux droites qui limitent (M) appartiennent à un même système de lignes asymptotiques, cette représentation se composera d'une bande du plan comprise entre deux parallèles à une même bissectrice des axes coordonnés. Cette bande peut être considérée comme un quadrilatère dont deux angles opposés seraient égaux à π, les deux autres étant nuls. Par suite, en appliquant la formule donnée au n° 274 et en remarquant que les angles nuls correspondent aux valeurs zéro, ∞ de t, on aura

$$\sigma = \mathrm{C}\, e^{ih} \int \frac{dt}{t} = \mathrm{C}\, e^{ih} \log t.$$

Lorsque la variable t varie de zéro à ∞, l'argument de σ doit être égal à $\frac{\pi}{4}$ ou à $-\frac{\pi}{4}$. Le choix est indifférent, par suite de la présence du radical $\sqrt{\mathcal{F}(u)}$ dans l'expression de σ. Posons donc

$$\sigma = \mathrm{C}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \log t. \tag{5}$$

On aura alors

$$\sigma = \frac{\mathrm{C}}{\alpha} e^{-i\frac{\pi}{4}} \log u,$$

et, par suite, en prenant la dérivée par rapport à u,

$$\sqrt{2\mathcal{F}(u)} = \frac{\mathrm{C}}{\alpha u} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ou

$$\mathcal{F}(u) = \frac{i\mathrm{K}}{u^2},$$

K désignant une constante réelle. Nous retrouvons la valeur de $\mathcal{F}(u)$, qui caractérise un hélicoïde gauche à plan directeur (n° 196).

Mais, si l'on veut déterminer la constante C, il vaudra mieux substituer les valeurs de σ et de u en fonction de t dans les formules (3). On aura ainsi

$$z = \mathcal{R}\, \frac{-i\mathrm{C}^2}{\alpha} \log t.$$

Si l'on remplace t par $\rho e^{i\theta}$, ρ et θ désignant le module et

l'argument de t, θ variera entre zéro et π et l'on aura

$$z = \frac{C^2}{\alpha}\theta.$$

Les deux droites, parallèles au plan des xy, qui limitent la surface (M) correspondent aux valeurs zéro et π de θ. On a donc, en désignant par Δ leur plus courte distance,

$$\Delta = \frac{C^2\pi}{\alpha},$$

et les formules (3) prennent ici la forme définitive

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \mathcal{R}\int i\Delta\,\frac{t^\alpha - t^{-\alpha}}{2\pi}\,\frac{dt}{t} = \mathcal{R}\,\frac{i\Delta}{2\pi\alpha}(t^\alpha + t^{-\alpha}),\\ y &= \mathcal{R}\int \Delta\,\frac{t^\alpha + t^{-\alpha}}{2\pi}\,\frac{dt}{t} = \mathcal{R}\,\frac{\Delta}{2\pi\alpha}(t^\alpha - t^{-\alpha}),\\ z &= \mathcal{R}\int -\frac{i\Delta}{\pi}\,\frac{dt}{t} = \mathcal{R} - \frac{i\Delta}{\pi}\log t, \end{aligned}\right.$$

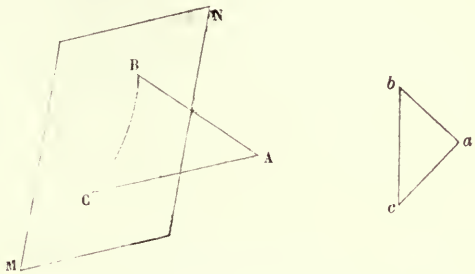
où tout est connu. Il suffira de donner à α toutes les valeurs de l'angle pour obtenir tous les hélicoïdes qui contiennent les deux droites.

281. Dans l'exemple précédent, il y a une certaine indétermination, relativement au moins à la représentation sphérique; et cette même indétermination, qui se présente, comme nous l'avons indiqué, dans les solutions si étudiées données par M. Schwarz pour certains problèmes particuliers, se reproduirait évidemment dans les problèmes plus compliqués que nous avons à examiner. Voici comment on pourra opérer lorsqu'on voudra, négligeant tous les cas possibles, obtenir, par exemple, la surface réellement minimum, celle qui est réalisée par les expériences de Plateau.

Proposons-nous, par exemple, de déterminer la surface (M), qui est limitée par deux droites AB, AC et qui coupe normalement un plan MN (*fig.* 24). Soit BC la courbe inconnue suivant laquelle la surface cherchée coupe le plan MN. L'expérience apprend que cette courbe, qui se réduit à une droite quand le plan BAC est perpendiculaire au plan MN, n'a pas d'inflexion et est placée, par rapport à la droite BC, du même côté que la projection de A sur le plan MN. Les normales en A, B, C à (M) sont connues de

direction; car la normale en A est perpendiculaire au plan ABC, et la normale en B, par exemple, doit se trouver dans le plan MN et être perpendiculaire à AB. D'ailleurs, le sens de la normale en A détermine celui des normales en B, C et, généralement, en tout

Fig. 24.



point de (M). On voit donc que la surface (M) aura pour représentation sphérique un triangle sphérique dont les sommets seront parfaitement déterminés.

Considérons maintenant la représentation plane. Les lignes AB, AC auront pour images des parallèles aux bissectrices des axes coordonnés, tandis que la ligne de courbure BC sera représentée par une parallèle à l'un des axes. Il faut donc admettre que cette représentation est donnée par la surface d'un triangle rectangle isoscèle abc, dont l'hypoténuse est parallèle à l'un des axes coordonnés.

Soient $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ les angles du triangle sphérique qui sert de représentation à (M). En conservant toutes les notations du n° 277 et en supposant que les sommets λ, μ, ν correspondent aux valeurs 0, 1, ∞ de t, nous aurons, pour déterminer la représentation de ce triangle sur la moitié supérieure du plan, la formule

$$(7) \qquad Cu = \frac{t^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ t)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ t)},$$

α, β, γ étant déterminés par les formules

$$(8) \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(1-\lambda-\mu+\nu), & \alpha+1-\gamma = \frac{1}{2}(1+\lambda-\mu+\nu), \\ \beta = \frac{1}{2}(1-\lambda-\mu-\nu), & \beta+1-\gamma = \frac{1}{2}(1+\lambda-\mu-\nu), \\ \gamma = 1-\lambda, & 2-\gamma = 1+\lambda, \end{cases}$$

et le module $\sqrt{CC_0}$ de C ayant pour valeur

$$(9)\quad \sqrt{CC_0} = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\sqrt{-\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}}.$$

Quant à la représentation plane, on l'obtiendra en appliquant la formule (14) du n° 274 au triangle rectangle isocèle. En supposant que le sommet λ corresponde au point de rencontre A des deux droites et, par conséquent, au sommet a de l'angle droit du triangle rectangle, il faudra faire dans cette formule

$$a = 0, \qquad \beta = 1, \qquad c = \infty,$$
$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{4}, \qquad \gamma = \frac{1}{4},$$

ce qui donnera

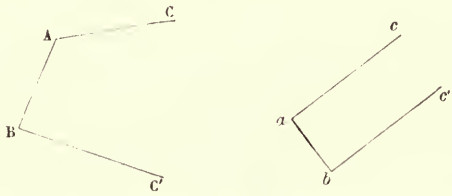
$$(10)\qquad \sigma = \sqrt{K}\int \frac{dt}{t^{\frac{1}{4}}(t-1)^{\frac{3}{4}}},$$

K étant une constante réelle afin que l'hypoténuse du triangle soit dirigée parallèlement à l'un des axes coordonnés.

L'exemple précédent, qui a été traité pour la première fois, comme nous l'avons indiqué (n° 266), par M. Schwarz, a été, depuis, étudié d'une manière approfondie dans un intéressant travail de M. Neovius [1].

282. On peut traiter de la même manière le cas, considéré par Riemann, où le contour est formé (*fig.* 25) par une droite AB qui

Fig. 25.



en rencontre deux autres AC, BC'. Ici encore, la représentation sphérique du segment (M) sera un triangle sphérique. La repré-

[1] Neovius, *Bestimmung zweier speciellen periodischen Minimalflächen auf welchen unendlich viele gerade Linien und unendlich viele ebene geodätische Linien liegen.* Helsingsfors, 1883.

sentation sphérique du point A sera située sur le rayon perpendiculaire à AB et à AC, la représentation sphérique de B sera située sur le rayon perpendiculaire à AB et à BC′ et enfin la représentation sphérique du point situé à l'infini, soit sur AC, soit sur BC′, sera située sur le rayon perpendiculaire à ces deux droites. Nous adoptons ici l'hypothèse la plus simple relativement à ce secteur infini; il faut concevoir le segment (M) comme étant limité par une droite CC′ qui rencontre AC et BC′ et s'éloigne indéfiniment.

Quant à la représentation plane, elle sera évidemment formée d'une droite ab, correspondant à AB, parallèle à l'une des bissectrices des axes, et de deux droites ac, bc' perpendiculaires à ab. On peut envisager cette figure comme un triangle dont l'un des sommets s'est éloigné indéfiniment. Si l'on suppose que les valeurs 0, 1, ∞ de t correspondent respectivement aux points a, b et c, c', la formule, déjà rappelée, du n° 274 nous donnera ici

$$\sigma = \sqrt{K} e^{i\frac{\pi}{4}} \int \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}, \tag{11}$$

K étant une constante réelle. Cette formule, jointe à celles qui définissent la représentation sphérique, déterminera la surface cherchée.

283. Il nous reste à étudier le plus important et le plus difficile des problèmes auxquels peut encore s'appliquer la méthode élémentaire précédente. Supposons que le contour donné soit formé par un quadrilatère gauche quelconque, ABCD. On aperçoit ici encore d'une manière très nette la représentation sphérique de la surface. Elle est formée par un quadrilatère sphérique dont les sommets sont parfaitement déterminés, et elle est la même que celle du paraboloïde hyperbolique passant par les quatre côtés du quadrilatère gauche [1]. On peut toujours supposer (n° 273) que

---

[1] On peut signaler à ce sujet un rapprochement très curieux donné par M. Schwarz dans une des notes du Mémoire déjà cité : *Bestimmung einer speciellen Minimalfläche*. Dans le cas où le quadrilatère est régulier et a ses angles égaux à $\frac{\pi}{3}$, la différence entre l'aire du paraboloïde et celle de la surface minima est inférieure à $\frac{1}{800}$ de la valeur de l'une quelconque des aires; de plus, les deux surfaces sont tangentes l'une à l'autre au point central du quadrilatère.

les sommets consécutifs du quadrilatère correspondent aux valeurs $0, 1, \frac{1}{k^2}, \infty$ de t, k désignant une constante réelle plus petite que 1. D'après les méthodes développées au n° 276, on obtiendra le tracé géographique du quadrilatère sphérique, qui est la représentation de (M) sur la moitié supérieure du plan, en posant

$$u = \frac{\theta_2}{\theta_1},$$

θ_1 et θ_2 étant deux solutions particulières, convenablement choisies, d'une équation linéaire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p\frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0, \tag{12}$$

dont les coefficients p et q doivent satisfaire à l'unique condition

$$2q - \frac{p^2}{2} - \frac{dp}{dt} = \{u, t\}; \tag{13}$$

$\{u, t\}$ ayant ici la valeur suivante :

$$\{u, t\} = \frac{1-\alpha_1^2}{2t^2} + \frac{1-\alpha_2^2}{2(1-t)^2} + \frac{(1-\alpha_3^2)k^4}{2(1-k^2t)^2} + \frac{h_1}{t} + \frac{h_2}{t-1} + \frac{h_3k^2}{k^2t-1}, \tag{14}$$

avec les relations

$$\left\{\begin{array}{c} h_1 + h_2 + h_3 = 0, \\ \dfrac{1-\alpha_1^2}{2} + \dfrac{1-\alpha_2^2}{2} + \dfrac{1-\alpha_3^2}{2} + h_2 + \dfrac{h_3}{k^2} = \dfrac{1-\alpha_4^2}{2}. \end{array}\right. \tag{15}$$

Dans ces formules, $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$, $\alpha_4\pi$ désignent les angles du quadrilatère qui correspondent respectivement aux sommets 0, 1 $\frac{1}{k^2}$, ∞; h_1, h_2, h_3 sont des constantes arbitraires et inconnues, comme le module k^2, assujetties uniquement à vérifier les relations (15); il reste donc deux constantes arbitraires dont il faut fixer la valeur. Les théorèmes généraux que nous avons rappelés permettent d'affirmer qu' sera toujours possible de déterminer ces constantes de manière à obtenir effectivement, par le quotient de deux solutions particulières convenablement choisies de l'équation (12), la représentation cherchée du quadrilatère sphérique sur la partie supérieure du plan.

La représentation plane (Σ) du segment cherché (M) est évidemment limitée par les côtés d'un rectangle; on aura donc (n° 274)

$$(16)\qquad \sigma = \sqrt{\Pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \int \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2 t)}},$$

Π désignant une constante réelle.

284. On voit que la surface serait complètement déterminée par des quadratures si l'on savait intégrer l'équation linéaire (12). Parmi les formes différentes que peut recevoir cette équation, nous signalerons la suivante :

Adoptons pour la fonction p, qui peut être choisie arbitrairement, une expression de la forme

$$p = \frac{e_1}{t} + \frac{e_2}{t-1} + \frac{e_3 k^2}{k^2 t - 1}.$$

On démontre aisément que les termes en $\frac{1}{t^2}$, $\frac{1}{(t-1)^2}$, $\frac{1}{(k^2 t - 1)^2}$ pourront disparaître de l'expression de q. Il suffit, pour cela, que e_1, e_2, e_3 satisfassent aux équations

$$(e_2 - 1)^2 = \alpha_1^2, \qquad (e_2 - 1)^2 = \alpha_2^2, \qquad (e_3 - 1)^2 = \alpha_3^2.$$

Si l'on prend, par exemple,

$$(17)\qquad p = \frac{\alpha_1 + 1}{t} + \frac{\alpha_2 + 1}{t-1} + k^2 \frac{\alpha_3 + 1}{k^2 t - 1},$$

on aura

$$(18)\qquad \begin{aligned} 2q = {} & \frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}{t(t-1)} + \frac{(\alpha_1+1)(\alpha_3+1)k^2}{t(k^2 t - 1)} \\ & + \frac{(\alpha_3+1)(\alpha_2+1)k^2}{(t-1)(k^2 t - 1)} + \frac{h_1}{t} + \frac{h_2}{t-1} + \frac{k^2 h_3}{k^2 t - 1}. \end{aligned}$$

L'équation (12) peut donc se ramener à la forme suivante :

$$(19)\qquad t(1-t)(1-k^2 t)\frac{d^2\theta}{dt^2} + (\mathrm{M}t^2 + \mathrm{N}t + \mathrm{P})\frac{d\theta}{dt} + (\mathrm{M}'t + \mathrm{N}')\theta = 0,$$

qui a été l'objet d'un grand nombre de recherches; car elle est la plus simple de toutes les équations du second ordre, après l'équation de Gauss, dont elle peut être considérée comme une généra-

lisation [1]. On n'a pu jusqu'ici l'intégrer que dans un petit nombre de cas particuliers; et même les résultats obtenus dans cette voie ne seraient pas toujours applicables à la question que nous avons à résoudre.

285. Si le quadrilatère gauche a un plan de symétrie passant par deux sommets opposés, la surface qui donne la solution du problème de Plateau devra nécessairement, si elle est unique, comme il est naturel de l'admettre, avoir le même plan de symétrie que le quadrilatère et, par conséquent, couper ce plan à angle droit. Par suite, si l'on se propose de déterminer seulement la portion de cette surface qui se trouve d'un côté déterminé de ce plan de symétrie, on sera ramené au problème que nous avons résolu précédemment (n° 281). Telle est la méthode suivie par M. Schwarz dans les Mémoires que nous avons analysés.

286. Ici se terminent les applications que nous voulions donner de la méthode générale. Dans chaque cas particulier, nous avons obtenu les valeurs de σ et de u en fonction de t; il suffira de porter ces valeurs dans la formule (3) et de donner à t toutes les valeurs dont la partie imaginaire est positive. Mais, pour compléter

---

[1] Si l'on prenait pour p la valeur suivante :

$$p = \frac{1}{2t} + \frac{1}{2(t-1)} + \frac{k^2}{2(k^2 t - 1)},$$

on obtiendrait l'équation même donnée par Riemann (*Gesammelte Werke*, p. 308). En substituant à t la variable u définie par l'équation

$$t = \operatorname{sn}^2 u,$$

et qui ne diffère de σ que par un facteur constant, on donnera à cette équation la forme élégante

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta}\frac{d^2\theta}{du^2} = &\left(\alpha_1^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} + \left(\alpha_2^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}\\ &+ \left(\alpha_3^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{k^2 \operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u} + \left(\alpha_4^2 - \frac{1}{4}\right)k^2 \operatorname{sn}^2 u + l,\end{aligned}$$

l étant une constante arbitraire que l'on peut substituer à h_1. Dans un article inséré au Tome XCIV (p. 1645) des *Comptes rendus*, j'ai montré que cette équation peut être intégrée, par l'application des belles méthodes d'Hermite, de la même manière que l'équation de Lamé, qu'elle comprend comme cas particulier, toutes les fois que les nombres $\alpha_1 - \frac{1}{2}$, $\alpha_2 - \frac{1}{2}$, $\alpha_3 - \frac{1}{2}$, $\alpha_4 - \frac{1}{2}$ sont entiers.

la théorie précédente, il nous reste à démontrer que la surface à laquelle on est ainsi conduit donne effectivement la solution du problème proposé. Voici comment on peut discuter ce point essentiel.

On reconnaîtra d'abord aisément que le segment de surface (M) n'a aucun point singulier dans son intérieur. Négligeons ce premier point, qui apparaîtra de la manière la plus claire dans une autre méthode que nous donnerons au Chapitre suivant, et qu'il est d'ailleurs très aisé de démontrer. Il suffira donc de prouver que la courbe limite du segment (M) se compose de droites et de courbes planes, et qu'elle peut être identifiée avec le contour donné *a priori* dans chaque cas particulier.

Pour le démontrer, nous donnerons à t les valeurs réelles, qui fournissent tous les points de la limite du segment, et nous supposerons d'abord que t varie seulement dans l'intervalle auquel doit correspondre une droite (d) du contour.

D'après la détermination de σ, la portion considérée du contour, étant représentée sur le plan par une parallèle à l'une des bissectrices des axes, sera nécessairement une ligne asymptotique; et, d'après la détermination de u, cette même portion du contour aura pour représentation sphérique un arc de grand cercle dont le plan sera perpendiculaire à la droite (d). Or, toute ligne asymptotique qui admet un grand cercle pour représentation sphérique est nécessairement une ligne droite : car les tangentes d'une ligne asymptotique sont perpendiculaires à celles de sa représentation sphérique; et, par conséquent, elles seront ici toutes perpendiculaires au plan du grand cercle. Ainsi, cette portion du contour de la surface trouvée (M) sera une droite *parallèle à* (d).

Considérons maintenant l'un des intervalles pour lesquels la portion du contour doit se composer d'une ligne plane située dans un plan (P). D'après la détermination de σ, cette portion du contour aura pour représentation plane une droite parallèle à l'un des axes coordonnés et sera, par conséquent, une ligne de courbure; d'après la valeur attribuée à u, cette ligne de courbure aura pour représentation sphérique un arc du grand cercle dont le plan est parallèle à (P). Donc, cette portion du contour de la surface trouvée sera bien une courbe plane située dans un plan que la surface coupera normalement et *qui sera parallèle au plan* (P).

On voit donc que, dans chaque cas particulier, la surface minima obtenue sera limitée par une chaîne composée de droites et de plans, parallèles à ceux qui avaient été choisis *a priori*. Mais ici se présente une seconde question.

287. Les directions des droites et des plans qui composent le contour de la surface obtenue sont bien celles des droites et des plans de la chaîne donnée. Mais la solution ne contient plus qu'une constante arbitraire, celle qui entre en facteur dans σ et qui est toujours réelle (K dans les premiers exemples, H dans le dernier); et, par conséquent, elle ne peut donner que les surfaces limitées par un certain contour, ou par tous les contours homothétiques. Or, il est évident que deux chaînes, telles que celles considérées par M. Schwarz, ne sont pas nécessairement identiques ou homothétiques dès qu'elles sont composées d'éléments parallèles. Supposons, pour fixer les idées, que le contour ne se compose que de droites dont la direction soit connue. Le théorème des projections donnera seulement trois relations entre les longueurs des côtés. Si le nombre de ceux-ci est supérieur à 4, si l'on a par exemple un hexagone, il y aura une infinité d'hexagones non homothétiques dont les côtés seront parallèles.

On est donc obligé de reconnaître que les hypothèses faites précédemment sur la surface cherchée sont trop limitatives. Alors même qu'elles pourraient être maintenues dans tous les cas, elles ne donneraient la solution du problème que pour des contours spéciaux. Elles pourront être acceptées, et donneront certainement une solution du problème, quand la forme de la chaîne sera déterminée par la direction de ses éléments : c'est ce qui a lieu dans tous les exemples précédents; mais, dans le cas où la direction des éléments ne suffit plus à déterminer les rapports de leurs longueurs, elles seront trop spéciales et ne pourront conduire à des solutions générales. Il faut donc reprendre la solution du problème, examiner la signification des différentes hypothèses que nous avons faites, et rechercher celles de ces hypothèses auxquelles on est obligé de renoncer.

288. Nous avons admis que l'intégrale σ ou $\int\sqrt{2\mathcal{F}(u)}\,du$ est une fonction finie et uniforme dans toute l'étendue du segment (M)

qu'on veut déterminer. Nous allons voir que, même en excluant le cas où la surface (M) aurait des points singuliers, il faut admettre qu'il peut exister des points particuliers du segment (M) qui seront des points critiques de cette intégrale; en sorte qu'elle cessera d'être uniforme.

Imaginons, par exemple, trois plans, désignés par les numéros d'ordre 1, 2, 3, se coupant suivant une droite (d) et formant ainsi six angles dièdres que nous supposerons égaux entre eux, ayant, par suite, pour valeur commune $\frac{\pi}{3}$. Construisons un segment de droite terminé aux plans 1 et 2. Si l'on prend le symétrique de ce segment par rapport au plan 2, puis les symétriques des deux segments obtenus par rapport aux deux plans 1 et 3, on formera un hexagone gauche doué d'une certaine régularité, admettant la droite (d) pour axe de symétrie ternaire. La surface minimum limitée par les côtés de cet hexagone jouira évidemment de la même propriété; elle sera normale en un point μ à la droite (d), qui sera aussi pour elle un axe de symétrie ternaire. Par suite, si l'on porte l'origine des coordonnées au point μ, en prenant la droite (d) pour axe des z, il sera impossible que le développement de z suivant les puissances de x et de y commence aux termes du second degré, aucune surface du second degré *à courbures opposées* n'ayant un axe de symétrie ternaire. Il n'est pas impossible, au contraire, que le développement de z commence aux termes du troisième degré. Le point μ ne cessera pas d'être simple, mais l'équation différentielle des lignes de courbure et celle des lignes asymptotiques s'y présenteront sous une forme indéterminée.

289. Il faut donc considérer ces points pour lesquels l'équation de la surface rapportée à des axes convenablement choisis prend la forme suivante :

$$z = \varphi_n(x, y) + \varphi_{n+1}(x, y) + \ldots, \tag{20}$$

$\varphi_i(x, y)$ désignant un polynome homogène de degré i et n pouvant être supérieur à 2.

On verra facilement, en prenant les termes de degré moindre dans l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima donnée

au n° 176, qu'on doit avoir

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} = 0.$$

En choisissant convenablement l'axe des x, on pourra donc prendre

$$\varphi_n = \frac{a}{n}[(x+yi)^n + (x-yi)^n],$$

a désignant une constante réelle. Posons

$$(21) \qquad x + yi = \xi, \qquad x - yi = \eta;$$

on aura

$$(20\ bis) \qquad z = \frac{a}{n}[\xi^n + \eta^n] + \ldots.$$

Les valeurs de u et de u_1 relatives à l'origine peuvent être supposées nulles. Pour reconnaître comment s'expriment u et $\mathcal{F}(u)$ dans le voisinage de ce point, on peut employer la méthode suivante.

L'une des lignes de longueur nulle passant par l'origine est représentée par les équations

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= -\int_0^u u^2 \mathcal{F}(u)\,du, \\ \eta &= \int_0^u \mathcal{F}(u)\,du, \\ z &= \int_0^u u\mathcal{F}(u)\,du. \end{aligned} \right.$$

En différentiant l'équation (20 *bis*) et remplaçant $d\xi$, $d\eta$, dz par leurs valeurs déduites des formules précédentes, on trouve

$$u = -(a\xi^{n-1} + \ldots)u^2 + a\eta^{n-1} + \ldots.$$

ce qui donne pour u une valeur de la forme

$$(23) \qquad u = a\eta^{n-1} + \ldots,$$

les termes négligés étant, par rapport à ξ, η, de degré supérieur

à $n-1$. Si l'on porte cette valeur de u dans l'équation

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -u^2, \tag{24}$$

on aura l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -a^2\eta^{2n-2} + \ldots.$$

La valeur de ξ qui satisfait à cette équation et s'annule pour $\eta = 0$ sera, comme on sait, de la forme

$$\xi = \eta^{2n-1}\,\mathrm{P}(\eta), \tag{25}$$

$\mathrm{P}(\eta)$ désignant, suivant nos conventions, une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de η et *qui ne s'annule pas pour* $\eta = 0$. On déduit de là et de la formule (23)

$$u = \eta^{n-1}\,\mathrm{P}_1(\eta),$$

$\mathrm{P}_1(\eta)$ ayant la même signification que $\mathrm{P}(\eta)$. En résolvant par rapport à η, on trouvera

$$\eta = u^{\frac{1}{n-1}}\,\mathrm{P}_2\left(u^{\frac{1}{n-1}}\right). \tag{26}$$

Si l'on différentie maintenant cette équation, en remplaçant $d\eta$ par sa valeur $\mathcal{F}(u)\,du$, on aura

$$\mathcal{F}(u) = u^{\frac{2-n}{n-1}}\,\mathrm{P}_3\left(u^{\frac{1}{n-1}}\right). \tag{27}$$

Telle est la forme de $\mathcal{F}(u)$ qui convient au point considéré; et il est aisé de démontrer que, réciproquement, toute valeur de cette forme donne un point simple pour lequel le développement de z a la forme (20).

Faisons, en effet,

$$u = \rho^{n-1},$$

les formules du n° 191 qui définissent la surface deviendront ici

$$\left\{\begin{aligned} x &= (n-1)\,\mathcal{R}\int_0^\rho (1-\rho^{2n-2})\,\mathrm{P}_3(\rho)\,d\rho,\\ y &= (n-1)\,\mathcal{R}\int_0^\rho i(1+\rho^{2n-2})\,\mathrm{P}_3(\rho)\,d\rho,\\ z &= (n-1)\,\mathcal{R}\int_0^\rho 2\rho^{n-1}\,\mathrm{P}_3(\rho)\,d\rho. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Comme $P_3(v)$ contient un terme constant, les valeurs de x et de y sont du premier degré par rapport à v et à sa conjuguée v_1. On peut toujours les résoudre par rapport à v et à v_1, puis porter les valeurs obtenues dans z; les premiers termes de z seront bien du degré n en x et en y.

290. Imaginons maintenant qu'on ait représenté la surface cherchée (M) sur la moitié supérieure du plan [1]. Soit t la variable complexe représentée sur la moitié supérieure du plan, et soit a la valeur de t relative au point considéré de (M). Les coordonnées x et y de ce point seront développables suivant les puissances de $t-a$ et de la quantité conjuguée t_1-a_1; et elles contiendront nécessairement les premières puissances de ces deux quantités. D'ailleurs, comme la variable v qui figure dans les formules (28) est le paramètre d'une ligne de longueur nulle, elle sera fonction, soit de t, soit de t_1. En échangeant, si cela est nécessaire, la partie inférieure et la partie supérieure du plan, on peut toujours supposer v fonction de t. Cela posé, il faudra que, des deux intégrales

$$\int_0^v P_3(v)\,dv, \qquad \int_0^v v^{2n-2}\,P_3(v)\,dv,$$

qui entrent dans les expressions de x et de y et qui sont développables suivant les puissances de $t-a$, l'une contienne la première puissance de cette quantité. Ce sera évidemment celle qui est du degré le moins élevé, et l'on pourra poser

$$\int_0^v P_3(v)\,dv = (t-a)\,P(t-a).$$

En intégrant par rapport à v et en résolvant, on déduira de cette équation la valeur suivante de v :

$$v = (t-a)\,P_1(t-a),$$

---

[1] Étant donnée une portion de surface quelconque (M) à connexion simple, peut-on la représenter sur la partie supérieure du plan? La proposition qui résulte d'une réponse affirmative à cette question n'a pas encore été établie. Dans le cas des surfaces minima, elle a été énoncée dans les articles si souvent cités de Weierstrass, et l'on pourrait la faire dériver de l'existence et des propriétés de la représentation sphérique de la surface. Pour abréger, nous l'admettrons ici.

ou, en remplaçant v par sa valeur en fonction de u,

$$u = (t-a)^{n-1} P_2(t-a). \tag{29}$$

Comme on connaît déjà l'expression (27) de $\mathcal{F}(u)$ en u, on conclura de l'équation précédente

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{du}\right)^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\mathcal{F}(u)\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

ou, en substituant,

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = (t-a)^{n-2} P_3(t-a). \tag{30}$$

Telles sont les deux formules qui permettent de déterminer la forme de u et de σ dans le voisinage du point $t = a$. Il nous reste à indiquer les propriétés géométriques qui en résultent, et pour la représentation sphérique (S), et pour la représentation plane (Σ).

291. Désignons par α le point de (M) qui correspond à la valeur a de t et par α' sa représentation sur la sphère; soient μ un point de la surface, très voisin de α, et μ' le point correspondant de la sphère. Lorsque le point μ décrit un petit cercle autour de α, l'argument de $t-a$ augmente de 2π. D'après la formule (29) l'argument de u augmentera de $2(n-1)\pi$ et, par conséquent, le point μ' fera $n-1$ tours autour de α'. On voit que le point α' sera un point de ramification, d'ordre $n-2$, de la surface de Riemann qui forme la représentation sphérique de (M). Aussi, dans la suite, donnerons-nous aux points tels que α le nom de *points de ramification d'ordre* $n-2$ [1]. Si le point α se trouve sur le contour de (M), le point μ de la surface, situé dans l'intérieur de l'aire, ne pourra faire qu'un demi-tour autour de α, et cela quand on passera de la partie du contour qui précède α à celle qui le suit. Alors le point correspondant de la sphère fera seulement $n-1$ demi-tours.

Supposons d'abord n égal à 3 ou, plus généralement, n impair.

---

[1] Riemann s'est borné à considérer le cas où $n = 3$, en indiquant que les points les plus généraux peuvent être formés par la réunion de plusieurs de ces points particuliers.

Lorsque le point μ parcourt cette portion du contour qui est voisine de α, le point μ' parcourt un arc de grand cercle passant par le point correspondant α'. Si le point μ décrit à l'intérieur de (M) un demi-cercle, en passant de la partie du contour qui précède α à celle qui le suit, le point μ' décrira un nombre entier de tours, et reviendra, par conséquent, sur la partie de l'arc de cercle qui précède α'. Il y aura donc un *rebroussement* dans le mouvement de μ' sur l'arc de cercle. Si la portion considérée du contour de (M) est rectiligne, cela signifie que la normale à la surface, après avoir tourné dans un sens bien déterminé, et toujours le même, autour de la droite, commencera à tourner en sens contraire. Si cette partie du contour est une ligne de courbure plane, le mouvement de la tangente changera de sens et l'on passera par un point d'inflexion.

Supposons, au contraire, n pair; il y aura un simple *stationnement* dans la rotation de la normale si le contour est rectiligne, et un *sommet* de la courbe si le contour est une ligne de courbure plane.

292. Relativement à la représentation plane (Σ) définie par la fonction σ, on peut obtenir des conclusions tout aussi précises.

Si n est impair et si le point α est dans l'intérieur de l'aire, on aura, d'après la formule (30), un point critique $t = a$ pour l'intégrale σ. Par conséquent, cette intégrale sera multiforme, et la représentation plane se composera d'une série de portions se reproduisant périodiquement. On voit ainsi que *l'hypothèse d'une représentation plane parfaitement limitée ne saurait convenir à tous les cas.* Si le point α est sur le contour de l'aire, la fonction σ cessera d'être multiforme, mais son argument augmentera de $\pi\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ lorsque t passera par la valeur a. Par conséquent, la portion du contour de (M) sur laquelle se trouve le point α, au lieu d'être représentée par une seule droite, le sera par deux segments perpendiculaires l'un à l'autre.

Supposons, au contraire, n pair. Si le point α est dans l'intérieur de l'aire, la représentation plane (Σ) admettra un point de ramification d'ordre $\frac{n}{2} - 1$. Si le point α est sur le contour, il y aura simplement un *stationnement* ou un *rebroussement* sur la ligne droite parcourue par le point de (Σ).

293. Il nous reste maintenant à examiner les modifications, d'ailleurs très simples, qu'il faudra faire subir à la méthode générale par laquelle nous avons déterminé les deux fonctions u et σ. Si l'on reprend la suite des raisonnements développés au Chapitre XI, et si l'on tient compte des singularités qui résultent pour u et pour σ de la présence des points de ramification, on verra que chaque point de ramification d'ordre $n-2$ introduira simplement dans $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ le facteur

$$(1-a)^{n-2}(t-a_0)^{n-2}$$

(a_0 étant la quantité conjuguée de a), s'il est situé dans l'intérieur de l'aire, ou le facteur

$$(t-a)^{n-2},$$

s'il est situé sur le contour et si, par conséquent, a est réel. D'ailleurs, le degré total de $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ devra toujours être égal à -4 lorsque la valeur $t=\infty$ ne correspondra, ni à un sommet, ni à un point de ramification.

Pour déterminer la fonction u, il faudra ajouter à l'expression de $\{u, t\}$, donnée au n° 276, des termes tels que les suivants :

$$\frac{1}{2}\,\frac{1-(n-1)^2}{(t-a)^2}+\frac{h}{t-a}+\frac{1}{2}\,\frac{1-(n-1)^2}{(t-a_0)^2}+\frac{h_0}{t-a^0},$$

si le point de ramification est dans l'intérieur de (M), et seulement la moitié de ces termes

$$\frac{1}{2}\,\frac{1-(n-1)^2}{(t-a)^2}+\frac{h}{t-a},$$

si le point se trouve sur le contour. Quant aux angles du polygone sphérique et aux valeurs de n, on les déterminera, dans chaque cas, en se faisant une idée de la forme de la surface cherchée, c'est-à-dire en résolvant, pour éviter des tâtonnements, un problème plus ou moins difficile de Géométrie de situation. On pourra étudier à ce point de vue l'exemple donné au n° 288; si l'on veut déterminer la représentation sphérique de la surface, on peut hésiter entre deux hexagones; mais on reconnaît aisément, et de

différentes manières, qu'il faut choisir celui qui fait deux fois le tour de la sphère.

Nous ne développerons pas davantage la méthode précédente, qui présente encore des lacunes. Dans le Chapitre suivant, nous allons proposer une autre solution, qui se rapproche peut-être de celle de Weierstrass, et qui repose dans tous les cas sur de belles formules dues à cet illustre géomètre.

CHAPITRE XIII.

LES FORMULES DE WEIERSTRASS.

Forme nouvelle, due à Weierstrass, sous laquelle on peut mettre les équations qui définissent une surface minima. — Formules relatives à une transformation de coordonnées ou à un déplacement de la surface — Équation linéaire du second ordre à laquelle satisfont les deux fonctions G et H. — Définition d'une *famille* de surface minima. — Application à la détermination de la surface minima passant par un contour donné. — Formation de l'équation linéaire correspondant à cette surface. — Indication des questions qui resteront à résoudre après la formation de cette équation. — Propriétés géométriques de la famille de surfaces minima définie par cette équation.

---

294. Reprenons les équations du n° 191

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \mathcal{R}\int (1-u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du, \\ y = \mathcal{R}\int i(1+u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du, \\ z = \mathcal{R}\int 2u\,\mathcal{F}(u)\,du, \end{cases}$$

qui définissent une surface minima réelle, et supposons qu'on substitue à la variable indépendante u une fonction quelconque t de u. Si l'on veut étudier, par exemple, une portion limitée de la surface, à connexion simple, et si on la suppose représentée sur la partie supérieure du plan, t pourra être l'affixe du point du plan qui correspond au point de la surface; mais, pour le moment, nous supposerons que la nouvelle variable t ait été choisie d'une manière quelconque. Cela posé, si l'on introduit les notations nouvelles

$$(2)\qquad u = -\frac{G(t)}{H(t)}, \qquad \mathcal{F}(u)\,du = -i\,H^2(t)\,dt,$$

les équations (1) prendront la forme suivante :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \mathcal{R}\int i[G^2(t) - H^2(t)]\,dt,\\ y &= \mathcal{R}\int [G^2(t) + H^2(t)]\,dt,\\ z &= \mathcal{R}\int 2i\,G(t)\,H(t)\,dt,\end{aligned}\right.$$

qui a été donnée par Weierstrass [1].

Des formules (2), qui servent de définition à $H(t)$ et à $G(t)$, on déduit les suivantes :

$$(4)\qquad \mathcal{F}(u) = \frac{iH^4}{HG - GH'}$$

et

$$(4_a)\qquad \mathcal{F}(u)\,du^2 = i(HG' - GH')\,dt^2,$$

G' et H' désignant les dérivées de G et de H par rapport à t. Par suite, la fonction σ définie dans le Chapitre précédent aura ici pour expression

$$(5)\qquad \sigma = \int \sqrt{2i(HG' - GH')}\,dt;$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques (n° 197) deviendra

$$(6)\qquad \mathcal{R}\,i(HG' - GH')\,dt^2 = 0$$

et celle des lignes de courbure sera, de même,

$$(7)\qquad \mathcal{R}(HG' - GH')\,dt^2 = 0.$$

Nous allons maintenant chercher comment se transforment, avec les notations nouvelles, les équations relatives à un déplacement de la surface ou à un changement d'axes coordonnés.

295. Reprenons les formules, données aux n°s 198, 199,

$$(8)\qquad u = \frac{mv + n}{m_0 - n_0 v},\qquad \mathcal{G}(v) = \mathcal{F}(u)\,\frac{\delta^2}{(m_0 - n_0 v)^4},$$

---

[1] *Monatsberichte der K. P. Akademie*, p. 612 et suiv.; 1863. *Voir* aussi le Tome III des *Œuvres mathématiques* de Weierstrass.

qui définissent le déplacement. On peut écrire la seconde sous la forme

$$(9) \qquad \mathcal{G}(v)\,dv = \frac{\delta}{(m_0 - n_0 v)^2}\,\mathcal{F}(u)\,du.$$

Si l'on désigne par $G_1(t)$, $H_1(t)$ les valeurs nouvelles de $G(t)$, $H(t)$, c'est-à-dire les valeurs de ces fonctions relatives à la surface déplacée, on aura, d'après la définition même de ces quantités,

$$(10) \qquad v = -\frac{G_1(t)}{H_1(t)}, \qquad \mathcal{G}(v)\,dv = -i H_1^2(t)\,dt.$$

En portant ces valeurs dans la première équation (8) et dans l'équation (9), on trouvera

$$\frac{G(t)}{H(t)} = \frac{m G_1(t) - n H_1(t)}{(t) + n_0 G_1(t) m_0 H_1},$$

$$H_1^2(t) = \frac{\delta H^2(t) H_1^2(t)}{[m_0 H_1(t) + n_0 G_1(t)]^2}$$

ou, plus simplement,

$$(11) \qquad \begin{cases} G(t) = \dfrac{m}{\sqrt{\delta}} G_1(t) + \dfrac{m_0}{\sqrt{\delta}} H_1(t), \\[2ex] H(t) = \dfrac{n_0}{\sqrt{\delta}} G_1(t) + \dfrac{m_0}{\sqrt{\delta}} H_1(t), \end{cases}$$

le radical $\sqrt{\delta}$ pouvant être pris, soit avec le signe $+$, soit avec le signe $-$. Ce double signe devait naturellement se présenter, car la forme (3) donnée aux équations qui définissent la surface n'est pas altérée si l'on change à la fois le signe de H et celui de G.

Comme δ désigne, dans les formules précédentes (n° 198), le déterminant

$$m m_0 + n n_0,$$

on voit que *le déterminant de la substitution linéaire définie par les formules* (11) *est toujours égal à l'unité.* De là résulte le théorème suivant :

Un déplacement de la courbe minima définie par les équations

$$(12) \qquad x = i\int (G^2 - H^2)\,dt, \qquad y = \int (G^2 + H^2)\,dt, \qquad z = \int 2iGH\,dt$$

se traduit par une substitution linéaire, au déterminant $+1$, *effectuée sur* $G(t)$ *et* $H(t)$.

H_1 *et* G_1 *désignant les nouvelles valeurs de* H *et de* G, *on a*

$$G(t) = \frac{m}{\sqrt{\delta}} G_1(t) - \frac{n}{\sqrt{\delta}} H_1(t),$$

$$H(t) = \frac{n_0}{\sqrt{\delta}} G_1(t) + \frac{m_0}{\sqrt{\delta}} H_1(t);$$

si le déplacement est réel, m_0 *et* n_0 *sont respectivement les imaginaires conjuguées de* m *et* n.

296. La proposition si simple que nous venons d'établir conduit immédiatement à une conséquence importante. Formons l'équation du second ordre

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p\frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0, \tag{13}$$

qui admet comme solutions particulières les deux fonctions $G(t)$ et $H(t)$; il résulte du théorème précédent que cette équation demeurera la même lorsqu'on déplacera la surface d'une manière quelconque dans l'espace. Il est donc naturel de se proposer la question suivante :

Considérons une équation linéaire du second ordre donnée *a priori*, et prenons pour $G(t)$ et $H(t)$ deux solutions partilières quelconques de cette équation. On aura ainsi une infinité de surfaces minima qui dépendront de quatre constantes arbitraires, pouvant être imaginaires. Nous dirons que ces surfaces forment une même *famille*. Peut-on passer d'une de ces surfaces à toute autre par un simple déplacement? Ou, s'il n'en est pas ainsi, quelles sont les relations géométriques entre les différentes surfaces de la même famille?

Pour répondre à cette question, il suffit de remarquer qu'on passe d'une des surfaces à toute autre de la même famille en effectuant sur G et H la substitution linéaire la plus générale. Or, une telle substitution résulte toujours de la composition des deux suivantes :

$$G = aG_1 \qquad H = aH_1$$

et

$$G = e^{i\alpha}G_1, \qquad H = e^{i\alpha}H_1,$$

où a et α désignent des quantités réelles, avec une substitution quelconque, au déterminant $+1$.

La première de ces trois substitutions définit une transformation homothétique à pôle et à module réel, suivie, si l'on veut, d'une translation. Elle aura donc pour effet de remplacer la surface minima par une surface homothétique.

La seconde définit une transformation homothétique à pôle réel et à module imaginaire; en sorte que les modules des deux transformations appliquées aux deux courbes minima dont la translation engendre la surface sont imaginaires conjugués. Si l'on se reporte au commencement du Chapitre V, on reconnaît immédiatement que les surfaces obtenues sont les surfaces *associées* à la surface primitive. On aura, en particulier, la surface *adjointe* si l'on prend

$$(14) \qquad G_1 = \sqrt{i}\,G. \qquad H_1 = \sqrt{i}\,H.$$

Enfin, la troisième substitution, au déterminant $+1$, définit un déplacement qui est généralement imaginaire [1].

---

[1] Les déplacements imaginaires, malgré tout l'intérêt qu'ils présentent dans certaines recherches, n'ont pas été, croyons-nous, étudiés au point de vue de la Géométrie. Nous croyons donc utile d'indiquer comment on peut les ramener, en quelque sorte, à une forme canonique.

Tout déplacement autour d'un point fixe réel peut s'obtenir, on le sait, par l'emploi successif de deux *renversements*, c'est-à-dire de deux symétries prises successivement par rapport à deux droites (D), (Δ), que l'on peut même faire tourner dans leur plan sans modifier leur angle. Or, ce plan, passant par le point fixe réel comme les droites (D), (Δ), admet au moins une droite réelle. Ainsi, tout déplacement autour d'un point fixe peut se remplacer par un renversement autour d'une droite réelle (D) passant par ce point fixe et un renversement autour d'une droite (Δ), qui peut être imaginaire.

Considérons maintenant la droite (Δ); elle se trouve certainement dans un plan réel (P); on peut donc la remplacer par une droite réelle (Δ') de ce plan réel à condition d'ajouter au renversement autour de (Δ') une rotation autour de la perpendiculaire (Δ'') au plan (P), rotation qui sera d'un angle égal au double de l'angle de (Δ') et de (Δ). Soit $\theta + i\sigma$ la grandeur de cette rotation.

En résumé, le déplacement est ramené à deux renversements successifs autour des droites réelles (D), (Δ') et à une rotation autour de la droite réelle (Δ'') qu'on peut partager en deux : l'une réelle d'angle θ, l'autre imaginaire d'angle $i\sigma$.

Les deux renversements autour des droites (D), (Δ') et la rotation θ autour de (Δ'') constituent, en somme, un déplacement réel qu'on peut remplacer par une rotation *réelle* autour d'une droite réelle (Δ'''). On est donc conduit au résultat définitif suivant :

Tout déplacement autour d'un point fixe réel équivaut à deux rotations

En réunissant les résultats précédents, nous obtenons la réponse suivante à la question proposée.

Toutes les surfaces réelles d'une même famille se déduisent de l'une d'elles par l'emploi des deux opérations suivantes : transformations homothétiques à pôle réel et à modules imaginaires conjugués, appliquées respectivement aux deux courbes minima dont la translation engendre la surface ; déplacements imaginaires conjugués respectivement appliqués à ces deux courbes. La première de ces opérations donne les surfaces homothétiques des surfaces *associées* à la proposée. Quant à la seconde, elle n'a pas encore été étudiée avec tout le soin qu'elle paraît mériter. En général, l'étude des surfaces minima qui correspondent à une même équation linéaire du second ordre présenterait, au point de vue analytique aussi bien qu'au point de vue géométrique, un réel intérêt.

297. Nous venons de voir qu'un déplacement de la surface se traduit par une substitution linéaire, au déterminant $+1$, effectuée sur G et H; on reconnaît aisément que l'opération plus complexe pour laquelle, après avoir déplacé la surface, on prend sa symétrique par rapport à un plan, se traduit de même par la substitution, au déterminant -1,

$$(15)\qquad \begin{cases} G(t) = \dfrac{m}{\sqrt{\delta}} G_1(t) + \dfrac{n}{\sqrt{\delta}} H_1(t), \\ H(t) = \dfrac{n_0}{\sqrt{\delta}} G_1(t) - \dfrac{m_0}{\sqrt{\delta}} H_1(t), \end{cases}$$

où m_0, n_0 sont les conjugués de m et de n quand la transformation est réelle.

---

autour de deux droites réelles; l'une de ces rotations a son angle réel, l'autre a son angle égal à une imaginaire pure $i\sigma$.

On voit que les déplacements imaginaires d'un corps solide ayant un point fixe réel n'introduisent qu'un élément nouveau, à savoir une rotation imaginaire pure autour d'un axe réel, Si cet axe réel a été pris pour axe des z, de telles rotations sont représentées par les équations

$$X + iY = e^{-\sigma}(x + iy), \qquad X - iY = e^{\sigma}(x - iy),$$
$$Z = z.$$

Cela revient à remplacer dans les formules (3), écrites plus haut, G par $\frac{G}{\alpha}$, H par $H\alpha$, α désignant une constante réelle.

Pour obtenir, en effet, par rapport à un plan donné (P), la symétrique (F_1) d'une figure (F) qu'on a déplacée d'abord d'une manière quelconque, on peut évidemment prendre la symétrique (F′) de (F) par rapport à un plan particulier et soumettre ensuite (F′) à un déplacement convenablement choisi. Or, si l'on effectue ici la transformation

$$G(t) = G_2(t), \qquad H(t) = -H_2(t),$$

la coordonnée z de la surface change seule de signe, et cette surface est remplacée par sa symétrique relativement au plan des xy. Si l'on applique ensuite à G_2 et à H_2 les transformations qui caractérisent un déplacement réel, on obtient effectivement la substitution, de déterminant -1, définie par les courbes (15).

Nous aurons à employer dans la suite les formes canoniques des substitutions linéaires (11) et (15); on les obtient sans difficulté de la manière suivante :

Nous avons déjà remarqué que, si l'on considère la rotation définie par la substitution linéaire

$$u = \frac{mv + n}{m_0 - n_0 v}$$

et si l'on prend pour axe des z l'axe de cette rotation, on doit faire

$$n = n_0 = 0, \qquad m = e^{-i\frac{\alpha}{2}}, \qquad m_0 = e^{i\frac{\alpha}{2}},$$

α désignant l'axe de rotation. Si l'on introduit ces hypothèses dans les formules (11) et (15), on trouvera

$$(11_a) \qquad \begin{cases} G(t) = \varepsilon e^{-i\frac{\alpha}{2}} G_1(t), \\ H(t) = \varepsilon e^{i\frac{\alpha}{2}} H_1(t), \end{cases}$$

pour la forme canonique de la substitution (11), et

$$(15_a) \qquad \begin{cases} G(t) = \quad \varepsilon e^{-i\frac{\alpha}{2}} G_1(t), \\ H(t) = -\varepsilon e^{i\frac{\alpha}{2}} H_1(t_1), \end{cases}$$

pour la forme canonique de la substitution (15). Dans ces deux systèmes de formules, ε désigne l'unité positive ou négative. Les

dernières mettent en évidence le théorème suivant, auquel on parvient aussi par la Géométrie : Tout déplacement suivi d'une transformation par symétrie relative à un plan quelconque équivaut à une rotation d'angle fini autour d'une droite, suivie d'une transformation par symétrie relative à un plan perpendiculaire à la droite.

298. Nous allons appliquer les remarques précédentes à la résolution du problème étudié dans le Chapitre précédent, c'est-à-dire à la détermination du segment de surface minima (M) limité par la chaîne de plans et de droites qui a été déjà définie; mais nous présenterons d'abord la remarque suivante, qui simplifiera la solution :

Imaginons le segment de surface (N), *adjoint* à (M), et cherchons comment il sera limité. D'après les propriétés données au Chapitre V (n° 211), les plans tangents aux points correspondants des deux segments seront parallèles, et deux éléments correspondants seront toujours perpendiculaires. Il suit de là qu'à une droite (d) limitant (M) correspondra nécessairement sur (N) une courbe (C) dont les tangentes seront perpendiculaires à la droite. La courbe (C) sera donc située dans un plan (P) perpendiculaire à la droite; et le plan tangent à (N) en chaque point de cette courbe sera nécessairement parallèle à la droite (d), c'est-à-dire perpendiculaire au plan (P). Ainsi, à chaque droite (d), limite de (M), correspond une courbe plane (C), limite de (N); et cette courbe est située dans un plan que la surface doit couper normalement.

On démontrera tout aussi facilement qu'à chaque courbe plane, limite de (M), correspond une droite, limite de (N); et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Le segment adjoint (N) *est limité par une chaîne toute pareille à celle qui limite* (M); *deux éléments correspondants des deux chaînes sont toujours d'espèce différente et sont perpendiculaires l'un à l'autre.*

Cela posé, considérons la représentation conforme du segment (M) sur la partie supérieure du plan; et prenons maintenant pour t la variable complexe qui réalise cette transformation, c'est-à-dire l'affixe du point de la partie supérieure du plan qui correspond

au point de la surface; $G(t)$ et $H(t)$ seront alors des fonctions qu'il faudra déterminer, au moins pour toutes les valeurs de t dont la partie imaginaire est positive. Nous avons vu que, si l'on passe au segment adjoint (N), il faut les multiplier l'une et l'autre par $\sqrt{i}$.

Formons l'équation du second ordre

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p\frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0, \tag{16}$$

à laquelle satisfont G et H. Les coefficients p et q sont des fonctions de t déterminées par les formules

$$p = -\frac{GH'' - HG''}{GH' - HG'}, \qquad q = \frac{G'H'' - H'G''}{GH' - HG'}. \tag{17}$$

D'après les remarques précédentes, ces fonctions nouvelles ne changent pas lorsqu'on déplace la surface (M), ou lorsqu'on la remplace par son adjointe. Ces propriétés sont très importantes au point de vue de la question que nous avons à résoudre; elles permettent de substituer, avec de grands avantages, l'étude des fonctions p et q à celles de G et de H; on pourra, en effet, dans l'étude de p et de q, orienter le contour donné de la manière qui sera le plus commode, ou encore substituer au segment (M) le segment adjoint (N).

299. Prenons d'abord un point à l'intérieur de (M), correspondant à une valeur imaginaire a de t. On peut choisir ce point pour origine et prendre pour axe des z la normale en ce point; les coordonnées x, y, z d'un point voisin de la surface seront développables suivant les puissances de $t - a$ et de la quantité conjuguée $t_1 - a_1$; et les premières puissances de ces deux binomes devront apparaître dans l'un au moins de ces développements. Par suite, les trois intégrales

$$\int_a^t G_2(t)\,dt, \quad \int_a^t G(t)H(t)\,dt, \quad \int_a^t H^2(t)\,dt$$

seront développables suivant les puissances entières de $t - a$, et l'un des deux développements au moins devra contenir la première puissance de $t - a$. Comme la variable u doit être nulle ou infinie

à l'origine, d'après la direction attribuée à l'axe des z, il résulte de l'expression (2) de u que l'une des fonctions $G(t)$, $H(t)$ sera infiniment petite par rapport à l'autre. Soit, pour fixer les idées, $H(t)$ celle dont le degré est le moins élevé. La dernière des trois intégrales précédentes sera celle qui aura le moindre degré et qui contiendra, par conséquent, la première puissance de $t-a$. On pourra donc écrire

$$\int_a H^2(t)\,dt = (t-a)P(t-a),$$

ou, en différentiant,

$$H(t) = P(t-a), \tag{18}$$

$P(t-a)$ ayant la signification que nous lui avons toujours donnée, c'est-à-dire représentant une série ordonnée suivant les puissances positives de $t-a$ et ne s'annulant pas pour $t=a$.

Quant à $G(t)$, il sera déterminé par la formule

$$\int_a^t G(t)H(t)\,dt = (t-a)^n P(t-a);$$

d'où l'on déduira, par la différentiation et la substitution de la valeur de H,

$$G(t) = (t-a)^{n-1}P(t-a). \tag{18$_a$}$$

n étant un nombre entier au moins égal à 2.

D'après ces développements, on voit que le point $t=a$ est nécessairement un point ordinaire de l'équation linéaire toutes les fois que n est égal à 2. Si n est égal ou supérieur à 3, ce sera au contraire un point *à apparence singulière*. Le point correspondant du segment (M) sera alors un de ceux auxquels nous avons donné (n° 291) le nom de *points de ramification*. En réunissant les deux cas, nous pouvons énoncer cette première proposition :

L'équation linéaire n'aura que des points ordinaires ou des points à apparence singulière pour toutes les valeurs de t qui sont représentées par des points de la partie supérieure du plan.

Si, des expressions de G et de H, on déduit celles de p et q, on trouvera

$$(19)\qquad \begin{cases} p = -\dfrac{n-2}{t-a} + \mathrm{A} + \mathrm{B}(t-a) + \ldots, \\ q = \dfrac{h}{t-a} + \ldots, \end{cases}$$

les coefficients h, A, B, ... pouvant être nuls. On aura de même, en substituant les valeurs de G et de H dans les équations (2) et (5),

$$(19_a)\qquad \begin{cases} u = (t-a)^{n-1}\mathrm{P}(t-a), \\ \left(\dfrac{d\sigma}{dt}\right)^2 = (t-a)^{n-2}\mathrm{P}(t-a). \end{cases}$$

300. Examinons maintenant les points situés sur le contour de (M) et supposons d'abord que la portion du contour considérée soit une droite (d). Choisissons les axes de telle manière que (d) soit parallèle à l'axe des y. Si l'on se déplace sur la droite, t prendra des valeurs réelles comprises entre les deux valeurs a_k, a_{k+1} qui correspondent aux deux sommets du contour situé sur (d), et les différentielles dx, dz devront être nulles. On sera ainsi conduit aux deux équations

$$\mathcal{R}i(\mathrm{G}^2 - \mathrm{H}^2) = 0, \qquad \mathcal{R}i\,\mathrm{GH} = 0,$$

ou, en désignant par G_1 et H_1 les imaginaires conjuguées de G et de H,

$$\mathrm{G}^2 - \mathrm{H}^2 = \mathrm{G}_1^2 - \mathrm{H}_1^2,$$
$$\mathrm{GH} = \mathrm{G}_1\mathrm{H}_1.$$

On déduit de là l'un des systèmes

$$\begin{cases} \mathrm{G} = \varepsilon\,\mathrm{G}_1, \\ \mathrm{H} = \varepsilon\,\mathrm{H}_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{G} = -\varepsilon i\,\mathrm{H}_1, \\ \mathrm{H} = \varepsilon i\,\mathrm{G}_1, \end{cases}$$

où ε désigne l'unité, positive ou négative. Le second doit être écarté; car il conduirait à l'équation impossible

$$\mathrm{GG}_1 + \mathrm{HH}_1 = 0,$$

et, d'ailleurs, il donnerait $dy = 0$. Il reste donc seulement le premier, d'où l'on conclut que les quantités

$$e^{\frac{(1-\varepsilon)i\pi}{4}}\mathrm{G}, \qquad e^{\frac{(1-\varepsilon)i\pi}{4}}\mathrm{H}$$

sont égales à leurs conjuguées *et sont, par conséquent, réelles.*

Ainsi l'équation linéaire doit admettre, pour toutes les valeurs réelles de t comprises entre a_k et a_{k+1}, deux solutions particulières réelles.

La même conclusion a lieu lorsque la partie considérée du contour est une des courbes planes situées dans les plans que la surface doit couper normalement; car il suffit alors (n° 298), pour retrouver le cas précédent, de passer à la surface adjointe et de remplacer G, H par $\mathrm{G}\sqrt{i}$, $\mathrm{H}\sqrt{i}$. On est ainsi conduit à la règle suivante :

Si la portion considérée du contour est une droite, supposons que l'axe des y ait été choisi parallèle à cette droite; si elle est une courbe plane, supposons que l'axe des y soit perpendiculaire au plan de cette courbe; et soient $\mathrm{G}(t)$, $\mathrm{H}(t)$ les solutions particulières relatives à cette position des axes coordonnés. *Les intégrales*

$$e^{ni\frac{\pi}{4}}\mathrm{G}(t), \qquad e^{ni\frac{\pi}{4}}\mathrm{H}(t)$$

seront réelles sur toute la partie considérée du contour, n étant un nombre entier, qui sera pair si la portion du contour est rectiligne et impair si elle est simplement plane.

Il suit de là que, si l'on considère une chaîne composée de s éléments et si l'on désigne par $a_1, a_2, \ldots, a_s$ les valeurs de t relatives aux divers sommets de cette chaîne, l'équation linéaire admettra deux solutions particulières réelles pour chacun des intervalles $(a_1 a_2)$, $(a_2 a_3)$, ..., $(a_{s-1} a_s)$, $(a_s \infty a_1)$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles de t. Donc *les fonctions p et q de la variable t seront nécessairement réelles pour toutes les valeurs réelles de t.*

301. On peut déduire des résultats précédents d'autres conséquences en adoptant la méthode de prolongement analytique due

à Riemann et à M. Schwarz et développée au n° 272. Nous avons vu que, si une fonction est déterminée pour la partie supérieure du plan et si elle est réelle pour des valeurs réelles de t, elle peut être définie, pour la partie inférieure du plan, par la convention que les valeurs de la fonction relatives à deux valeurs imaginaires conjuguées de t soient elles-mêmes imaginaires conjuguées.

Appliquons cette méthode aux deux intégrales

$$e^{ni\frac{\pi}{4}}G(t), \qquad e^{ni\frac{\pi}{4}}H(t),$$

qui ont été reconnues réelles; mais supposons qu'on passe de la partie supérieure à la partie inférieure du plan, seulement en franchissant la portion de l'axe réel qui est comprise entre les deux points a_k, a_{k+1} et qui correspond à la portion spécialement considérée du contour. Nous allons montrer que le prolongement analytique de deux intégrales donne un segment de surface minima (M_k^0) qui est précisément le symétrique de (M) par rapport à la droite ou au plan de la chaîne; de plus, deux points des deux segments placés symétriquement par rapport à l'élément de la chaîne correspondent à des valeurs imaginaires conjuguées de t. Pour plus de netteté, supposons que cet élément de la chaîne soit une droite; alors on pourra poser

$$G(t) = e^{-\frac{ni\pi}{2}} g(t),$$
$$H(t) = e^{-\frac{ni\pi}{2}} h(t),$$

g et h étant réelles pour des valeurs réelles de t et n étant entier.

Le segment de surface qui correspond aux valeurs t_1 de t représentées dans la partie inférieure du plan sera défini par les formules

$$(20) \qquad \begin{cases} x = \mathcal{R}\int (-1)^n i[g^2(t_1) - h^2(t_1)]\,dt_1, \\ y = \mathcal{R}\int (-1)^n [g^2(t_1) + h^2(t_1)]\,dt_1, \\ z = \mathcal{R}\int (-1)^n 2ig(t_1)h(t_1)\,dt_1. \end{cases}$$

Si l'on change i en $-i$ dans les expressions soumises au signe $\mathcal{R}$, ce qui ne change pas les parties réelles, on a

$$(21)\qquad \begin{cases} x = \mathcal{R}\int(-1)^{n+1} i[g^2(t) - h^2(t)]\,dt, \\ y = \mathcal{R}\int(-1)^{n} \quad [g^2(t) + h^2(t)]\,dt, \\ z = \mathcal{R}\int(-1)^{n+1} 2ig(t)h(t)\,dt. \end{cases}$$

Ce sont les formules qui conviennent au segment (M), mais où l'on aurait changé le signe de x et de z. On obtient donc, comme nous l'avons annoncé, le segment symétrique de (M) par rapport à la droite considérée du contour.

Les intégrales $g(t)$, $h(t)$ de l'équation différentielle étant des fonctions linéaires connues des deux intégrales qui correspondent à une position déterminée, toujours la même, de (M) par rapport aux axes, on voit que ces deux intégrales peuvent être prolongées analytiquement; mais il y aura autant de prolongements analytiques qu'il y a d'éléments au contour. Si l'on passe de la partie supérieure du plan à la partie inférieure en traversant le segment a_1a_2 de l'axe réel, on obtiendra un segment (M_1^0) symétrique de (M) par rapport au premier élément de la chaîne qui détermine le contour; si l'on traverse le segment a_2a_3, on obtiendra le segment (M_2^0) symétrique de (M) par rapport au second élément de la chaîne, et ainsi de suite; si l'on traverse enfin le dernier segment $a_s\infty a_1$, on aura le segment (M_s^0) symétrique de (M) par rapport au $s^{\text{ième}}$ et dernier élément du contour. Dans tous ces segments, le point symétrique d'un même point de (M) correspond à une même valeur t_1 de t, et cette valeur est imaginaire conjuguée de celle qui définit le point de (M).

On obtient ainsi s prolongements analytiques différents des fonctions $G(t)$, $H(t)$; mais, comme ces prolongements donnent des segments tous symétriques de (M) et qui peuvent, par conséquent, se déduire les uns des autres, soit par des déplacements, soit par des déplacements suivis d'une transformation par symétrie relative à un plan, on doit conclure de la proposition du n° 295 que les divers systèmes de valeurs de G et de H ainsi définis s'obtien-

dront en combinant linéairement les valeurs de G et de H relatives à l'un quelconque d'entre eux ([1]).

Par suite, l'équation (16) demeurera la même pour tous ces segments, ou, ce qui est la même chose, les fonctions p et q ne peuvent être prolongées analytiquement que d'une seule manière. En d'autres termes, *les fonctions p et q doivent être uniformes dans toute l'étendue du plan.* Elles sont réelles pour des valeurs réelles de t, et prennent des valeurs imaginaires conjuguées lorsqu'on substitue à t des valeurs imaginaires conjuguées. Comme, d'après les propriétés du prolongement analytique (n° 272), les fonctions G et H ne cessent pas d'être développables en séries entières pour les différents points du contour qui ne sont pas des sommets, on voit qu'en dehors de ces sommets l'équation linéaire ne peut avoir que des points ordinaires, ou des points à apparence singulière; et même, si l'on exclut l'hypothèse de points multiples de la surface situés sur le contour, une des intégrales particulières devra rester finie pour chacun de ces points.

En résumé, *l'équation linéaire dont dépend la solution du problème doit avoir ses coefficients uniformes dans toute l'étendue du plan, et réels pour des valeurs réelles de t. Si l'on exclut les valeurs $t = a_k$ qui correspondent aux sommets du contour, elle ne peut avoir que des points à apparence singulière pour lesquels une des deux intégrales particulières demeure finie et différente de zéro.*

([1]) S'il subsistait un doute sur ce point, on pourrait le lever de la manière suivante :

Nous avons vu que, pour chacun des intervalles $(a_k a_{k+1})$, il existe deux intégrales de l'équation linéaire qui sont réelles pour les valeurs réelles de t comprises dans l'intervalle et qui, par suite, prennent des valeurs imaginaires conjuguées pour des valeurs imaginaires conjuguées de t lorsqu'on les prolonge à travers l'intervalle $(a_k a_{k+1})$.

Il suit de là que l'on peut prolonger analytiquement deux intégrales quelconques de l'équation linéaire, et cela d'autant de manières qu'il y a d'intervalles différents. Chacun de ces prolongements donnera évidemment pour $G(t_1)$, $H(t_1)$, t étant imaginaire conjuguée de t_1, des fonctions linéaires

$$aG_1 + bH_1, \quad a'G_1 + b'H_1$$

des quantités G_1 et H_1 qui sont les imaginaires conjuguées de $G(t)$, $H(t)$. Par suite, les différents systèmes de valeurs de $G(t_1)$, $H(t_1)$ s'obtiendront en combinant linéairement l'un quelconque d'entre eux.

Les points à apparence singulière pourront être réels; mais, s'ils sont imaginaires, ils seront placés symétriquement par rapport à l'axe réel.

302. Si le point correspondant à la valeur ∞ de t n'est pas un des sommets de la chaîne qui limite le contour, il est aisé de reconnaître quelle sera la forme de p et q dans le domaine de l'infini. Il suffit, pour cela, de faire la remarque suivante :

Soient t une variable quelconque et $G(t)$, $H(t)$ les deux fonctions qui déterminent la surface minima; si l'on substitue à t une nouvelle variable t', les nouvelles valeurs de G et de H seront

$$G\sqrt{\frac{dt'}{dt}}, \quad H\sqrt{\frac{dt'}{dt}}.$$

D'après cela, si nous désignons par α une valeur réelle de t qui détermine un point ordinaire de l'équation différentielle, cette équation admettra deux solutions de la forme

$$P(t-\alpha), \quad (t-\alpha)P_1(t-\alpha);$$

si l'on effectue la substitution réelle

$$t-\alpha=\frac{1}{t'}$$

et si l'on applique la règle que nous venons d'énoncer, on trouvera les deux solutions

$$\frac{1}{t'}P\left(\frac{1}{t'}\right), \quad \frac{1}{t'^2}P^1\left(\frac{1}{t'}\right),$$

qui caractérisent le cas où le point $t=\infty$ n'est ni un sommet du contour, ni un point à apparence singulière. En portant ces deux solutions dans les formules (17), on trouvera, pour les valeurs de p et de q,

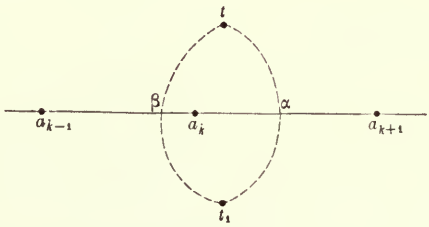
$$(22) \qquad \begin{cases} p=\dfrac{4}{t}+\dfrac{A}{t^2}+\ldots, \\ q=\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{A}{t^3}+\ldots. \end{cases}$$

Il faut remarquer l'égalité des coefficients de $\frac{1}{t^2}$ dans p et de $\frac{1}{t^3}$ dans q.

303. Il reste donc, pour terminer cette discussion, à examiner quelle est la forme des intégrales G, H et des coefficients p, q dans le voisinage des valeurs $t = a_k$ qui correspondent aux sommets de la chaîne. On peut employer pour cela deux méthodes différentes. Voici la première :

Soit (*fig.* 26) t un point compris dans la partie supérieure du

Fig. 26.



plan, auquel correspond un point m de (M); soit t_1 le point symétrique de t par rapport à l'axe réel. Si l'on passe de t à t_1 par le chemin $t\alpha t_1$ qui coupe l'axe entre a_k et a_{k+1}, on doit passer, sur la surface, du point m au point m_1 qui est l'homologue ou le symétrique de m dans le segment (M_k^0). Si, au contraire, on suit le chemin $t\beta t_1$ qui coupe l'axe réel entre a_{k-1} et a_k, on obtiendra le point m_2 symétrique de m dans le segment (M_{k-1}^0). Il suit de là que le lacet $t_1\beta t\alpha t_1$ effectuera, sur les deux intégrales particulières relatives au segment (M_{k-1}^0), précisément la substitution linéaire par laquelle on passe de ce segment au suivant (M_k^0).

Les deux formes canoniques de cette substitution ont été données au n° 297. Elles sont contenues dans les deux systèmes suivants :

$$(23)\qquad \begin{cases} G(t) = & e^{-i\alpha\pi}\, G_1(t), \\ H(t) = & e^{i\alpha\pi}\, H_1(t), \end{cases}$$

$$(24)\qquad \begin{cases} G(t) = & e^{-i\alpha\pi}\, G_1(t), \\ H(t) = & -e^{i\alpha\pi}\, H_1(t), \end{cases}$$

qui conviennent, le premier au cas où les deux éléments du contour qui se croisent au sommet a_k sont de même espèce, le second au cas où ces éléments sont d'espèce différente. On déduit immédiatement de là qu'il existe, pour le point critique a_k, deux inté-

grales G et H telles que les produits

$$(t-a_k)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{G}, \quad (t-a_k)^{-\frac{\alpha}{2}}\mathrm{H}$$

pour le premier cas, et

$$(t-a_k)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{G}, \quad (t-a_k)^{\frac{1-\alpha}{2}}\mathrm{H}$$

pour le second, soient des fonctions uniformes dans le domaine du point a_k.

Comme les quadratures

$$\int \mathrm{G}^2 dt, \quad \int \mathrm{GH}\, dt, \quad \int \mathrm{H}^2 dt,$$

qui entrent dans les équations par lesquelles se détermine la surface, ne peuvent devenir infinies ou indéterminées dans le voisinage de la valeur a_k, il est inadmissible que les fonctions uniformes auxquelles nous sommes conduits admettent le point a_k comme point singulier essentiel. Ce point ne peut être qu'un pôle et, par suite, *l'équation linéaire devra admettre deux intégrales régulières à exposants réels.* On voit même que la somme des exposants de ces deux intégrales sera un nombre entier, ou la moitié d'un nombre impair, suivant que les éléments du contour qui se réunissent au sommet déterminé sont de même espèce ou d'espèce différente.

304. On peut encore établir tous ces résultats en utilisant les deux représentations conformes de (M). Supposons seulement que la portion de (M) infiniment voisine du sommet a_k ait une représentation sphérique (S) et une représentation plane (Σ) parfaitement définies. Alors, en suivant la marche indiquée aux n°s 273, 275 et appliquée déjà dans le Chapitre précédent, on reconnaît qu'avec des axes convenablement choisis la valeur de u, dans le voisinage du point $t = a_k$, est

$$u = (t-a_k)^{\alpha_k}\,\mathrm{P}(t-a_k),$$

$\alpha_k\pi$ étant l'angle dont il faut faire tourner l'un des côtés du contour dans la représentation sphérique (S) pour l'appliquer sur le suivant, en restant toujours dans la surface de Riemann qui sert

de représentation sphérique à (M). De même, dans la représentation plane (Σ) définie au Chapitre précédent, il faudra faire tourner l'un des côtés du contour d'un angle $n\frac{\pi}{4}$ pour l'appliquer sur le suivant; n sera pair si les deux éléments consécutifs sont de même espèce, c'est-à-dire si les portions du contour qui se réunissent au sommet sont toutes deux des droites, ou toutes deux des lignes de courbure planes; il sera impair dans le cas contraire. On aura donc

$$\sigma = (t - a_k)^{\frac{n}{4}} P(t - a_k).$$

Ces deux valeurs de u et de σ permettent de déterminer deux intégrales particulières $G(t)$ et $H(t)$. On déduit, en effet, des formules (2) et (5) les valeurs suivantes :

$$(25) \qquad G = -\sqrt{\frac{i}{2}}\,\frac{u\,d\sigma}{\sqrt{du\,dt}}, \qquad H = \sqrt{\frac{i}{2}}\,\frac{d\sigma}{\sqrt{du\,dt}}$$

de G et de H. En y portant les développements en série obtenus pour σ et pour u, on trouve les expressions

$$G = (t - a_k)^{\frac{n-2}{4} + \frac{\alpha_k}{2}} P(t - a_k),$$
$$H = (t - a_k)^{\frac{n-2}{4} + \frac{\alpha_k}{2}} P_1(t - a_k),$$

qui mettent en évidence la forme régulière de G et de H. Il sera plus commode d'écrire par la suite

$$(26) \qquad \begin{cases} G = (t - a_k)^{\frac{n_k}{4} + \frac{\alpha_k}{2}} P(t - a_k), \\ H = (t - a_k)^{\frac{n_k}{4} - \frac{\alpha_k}{2}} P_1(t - a_k). \end{cases}$$

Le nouveau nombre entier n_k se déterminera, d'ailleurs, comme l'ancien. Il sera pair si les deux côtés consécutifs du contour sont de même nature : nous dirons alors que le sommet considéré est de *première espèce*. Il sera impair si les deux côtés consécutifs sont de nature différente; nous dirons alors que le sommet est de *seconde espèce*.

Des expressions de G et de H, on déduit par les formules (17)

celles de p et de q. On a ainsi

$$(27)\quad \begin{cases} p = \dfrac{1 - \dfrac{n_k}{2}}{t - a_k} + A + B(t - a_k) + \ldots, \\ q = \dfrac{\dfrac{n_k^2}{16} - \dfrac{\alpha_k^2}{4}}{(t - a_k)^2} + \dfrac{h_k}{t - a_k} + A_1 + B_1(t - a_k) + \ldots, \end{cases}$$

A, B, h_k, A_1, B_1, ... étant des coefficients qui pourront être nuls, mais sont évidemment réels.

305. Les formules précédentes dépendent de nombres entiers qu'il ne sera pas toujours facile de fixer *a priori*. Nous donnerons plus loin des relations auxquelles ils doivent satisfaire; mais il ne sera pas inutile de montrer comment on peut les déterminer immédiatement lorsqu'on a une idée nette et une vue générale de la surface cherchée.

D'abord a_k sera déterminé sans ambiguïté si l'on aperçoit nettement la représentation sphérique de la surface.

En ce qui concerne n_k, remarquons d'abord que, si le sommet considéré est à distance finie, il faudra que les intégrales

$$\int G^2(t)\,dt, \quad \int H^2(t)\,dt, \quad \int G(t)H(t)\,dt$$

demeurent finies pour $t = a_k$. Cela donne la relation d'inégalité

$$\frac{n_k}{2} - \alpha_k + 1 > 0,$$

qui devra toujours être vérifiée.

D'autre part, si l'on néglige les termes de degré supérieur, l'équation de la surface dans le voisinage du point a_k est de la forme

$$(28)\quad \begin{cases} x = \Re\, A\, i(t - a_k)^{\frac{n_k}{2} - \alpha_k + 1}, \\ y = \Re\, A\, (t - a_k)^{\frac{n_k}{2} - \alpha_k + 1}, \\ z = 0, \end{cases}$$

A étant une constante quelconque réelle ou imaginaire. Par conséquent, lorsque la variable t décrira, dans la partie supérieure du plan, un demi-cercle infiniment petit autour du point a_k, le

point correspondant de la surface décrira un petit arc de cercle égal à

$$\pi\left(\frac{n_k}{2} - \alpha_k + 1\right) = \alpha'_k \pi.$$

Cet angle est donc celui dont tourne le rayon vecteur qui joint le point de la surface au sommet infiniment voisin quand on passe d'un côté du contour au suivant. Il est évidemment connu si l'on a une idée générale de la forme de la surface; sa valeur suffira à déterminer n_k.

306. Les formes de G, H, p, q étant déterminées dans le voisinage de tous les points du plan, il est aisé maintenant d'obtenir les expressions générales de p et de q. Désignons par la lettre b les valeurs de t qui correspondent aux points à apparence singulière réels et par n', h' les valeurs correspondantes de l'exposant et du coefficient h qui figurent dans les formules (19). Désignons de même par les lettres c, c_1 les valeurs de t imaginaires conjuguées correspondant aux différents points à apparence singulière qui sont deux à deux imaginaires conjugués, et soient de même n'', h'', h''_1 les valeurs de l'entier n et de la constante h relatives à ces points. D'après les résultats établis plus haut et les formules (19) et (27), les deux fonctions

$$p - \sum \frac{1 - \frac{n_k}{2}}{t - a_k} - \sum \frac{2 - n'}{t - b} \sum \left(\frac{2 - n''}{t - c} + \frac{2 - n'}{t - c_1}\right),$$

$$q - \sum \left[\frac{1}{4} \frac{\frac{n_k^2}{4} - \alpha_k^2}{(t - \alpha_k)^2} + \frac{h_k}{t - a_k}\right] - \sum \frac{h'}{t - b} - \sum \left(\frac{h''}{t - c} + \frac{h''_1}{t - c_1}\right)$$

demeureront finies et continues pour toutes les valeurs finies de t; elles deviennent d'ailleurs nulles, d'après les formules (22), pour $t = \infty$. Ces deux fonctions seront donc nulles pour toutes les valeurs de t, et l'on pourra poser

$$(29) \quad \begin{cases} p = \sum \dfrac{1 - \frac{n_k}{2}}{t - a_k} + \sum \dfrac{2 - n'}{t - b} + \sum \left(\dfrac{2 - n''}{t - c} + \dfrac{2 - n''}{t - c^1}\right), \\ q = \sum \left[\dfrac{1}{4} \dfrac{\frac{n_k^2}{4} - \alpha_k^2}{(t - a_k)^2} + \dfrac{h'}{t - a_k}\right] + \sum \dfrac{h'}{t - b} + \sum \left(\dfrac{h''}{t - c} + \dfrac{h''_1}{t - c_1}\right). \end{cases}$$

Il faudra de plus, pour que les fonctions p et q admettent la forme (22) dans le domaine de l'infini, que les constantes satisfassent aux équations

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum\left(1-\frac{n_k}{2}\right)+\sum(2-n')+2\sum(2-n'')=4,\\
&\sum h_k+\sum h'+\sum(h''+h''_1)=0,\\
&\sum\left[\frac{n_k^2}{16}-\frac{\alpha_k^2}{4}+a_k h_k\right]+\sum bh'+\sum(ch''+c_1h''_1)=2,\\
&\sum\left[\left(\frac{n_k^2}{8}-\frac{\alpha_k^2}{2}\right)a_k+a_k^2h_k\right]+\sum b^2h'+\sum(c^2h''+c_1^2h''_1)\\
&\quad=\sum\left(1-\frac{n_k}{2}\right)a_k+\sum(2-n')b+\sum(2-n'')(c+c_1).
\end{aligned}\right.$$

Telles sont les relations qui déterminent, autant que possible, l'équation linéaire; il faudra leur ajouter encore, pour chacun des points à apparence singulière, l'équation de condition, d'une formation facile, par laquelle on exprime que l'intégrale générale ne contient pas de logarithmes, dans le voisinage de ce point.

307. L'équation différentielle une fois formée, le problème est loin d'être résolu. Il y a encore à examiner deux questions très essentielles. Reprenons ces segments (M_1^0), (M_1^0), ..., (M_s^0) qui sont les symétriques de (M) par rapport aux divers éléments de la chaîne; et soient, par exemple, $G(t_1)$, $H(t_1)$ les valeurs des intégrales qui correspondent au premier segment. Pour passer de ces valeurs à celles qui correspondent au second segment, il faut suivre un lacet qui, partant du point t_1, pénétrera dans la partie supérieure du plan en passant entre a_1 et a_2, puis reviendra au point de départ en passant entre a_2 et a_3. On reviendra alors au point t_1 et les nouvelles valeurs de G et de H seront des fonctions linéaires des anciennes. Or, ces nouvelles valeurs, nous l'avons déjà remarqué, sont connues *a priori*. On les obtiendrait en effectuant sur les intégrales primitives la substitution, au déterminant $+1$ ou -1 suivant les cas, par laquelle on peut passer directement du segment (M_1^0) au segment (M_2^0).

Comme ce raisonnement peut s'appliquer à tous les lacets décrits autour des différents points critiques, nous sommes conduits à la conclusion suivante :

Il ne suffira pas de savoir former l'équation différentielle; il faudra encore exprimer que deux intégrales convenablement choisies subissent des modifications parfaitement déterminées lorsqu'on suit un chemin quelconque ramenant au point de départ.

Ce problème est posé depuis la publication des recherches récentes sur les équations linéaires, et il n'a encore reçu de solution que pour certains cas particuliers.

Quoi qu'il en soit, supposons résolue cette première difficulté. Une énumération de constantes, que l'on trouvera dans le Mémoire de Riemann et que nous omettrons ici, montre facilement que l'on pourra disposer de celles de ces constantes qui demeurent arbitraires pour identifier le contour obtenu avec celui qui est donné *a priori*, c'est-à-dire que l'on aura autant d'équations que d'inconnues. Mais le problème qui consisterait à résoudre ces équations, ou à démontrer au moins qu'elles sont possibles, n'a pas été traité d'une manière générale, et n'a été examiné par Riemann que dans un cas particulier, qui sera étudié plus loin au n° 318. Tous les exemples complètement achevés donnés dans le Chapitre précédent appartiennent, comme nous l'avons remarqué, à la classe de ceux pour lesquels la forme du contour est entièrement définie par la direction des éléments.

308. On peut éclaircir encore les remarques précédentes en supposant donnée *a priori*, l'équation linéaire (16), dans laquelle p et q auront les valeurs déterminées par les formules (29), et en étudiant la *famille* de surfaces minima (n° 296) définie par cette équation. Pour chacune des surfaces de cette famille, il existe un segment (M) correspondant aux valeurs de t dont la partie réelle est positive, segment parfaitement continu et limité par un contour dont la représentation sphérique (S) est formée par des arcs de grand cercle ou de petit cercle, se coupant consécutivement sous des angles déterminés. Cette dernière propriété a été déjà donnée au n° 276 pour une équation linéaire plus générale et résulte uniquement de ce que l'équation admet deux solutions particulières réelles dans chacun des intervalles réels déterminés par les points singuliers. Considérons maintenant la représentation plane (Σ)

définie par la formule

$$(31)\quad \frac{d\sigma}{dt} = e^{-\frac{1}{2}\int p\,dt}$$
$$= C\prod (t-a_k)^{\frac{n_k}{4}-\frac{1}{2}}\prod (t-b)^{\frac{n'}{2}-1}\prod [(t-c)(t-c_1)]^{\frac{n''}{2}-1}.$$

Les portions du contour qui devraient être des droites ont ici pour représentation des droites (δ), toutes parallèles ou perpendiculaires les unes aux autres; il en est de même pour les portions du contour de (M) qui devraient être des lignes de courbure planes; elles ont pour représentation plane des droites (δ') qui font avec les précédentes (δ) des angles égaux à un multiple impair de $\frac{\pi}{4}$. Si donc on a choisi arbitrairement deux solutions particulières, G et H, de l'équation linéaire, on pourra toujours, en les multipliant par une même constante, ce qui ne change pas leur rapport et ne modifie pas, par conséquent, la représentation sphérique de la surface minima correspondante, donner à la constante C qui figure dans la formule (31) un argument tel que les droites (δ') deviennent, toutes, parallèles aux axes coordonnés, tandis que les droites (δ) seront parallèles aux bissectrices des mêmes axes. Alors, toutes les portions du contour qui devaient être des droites seront au moins des lignes asymptotiques; toutes celles qui devaient être des lignes de courbure situées dans des plans coupant normalement la surface seront au moins des lignes de courbure.

Comme les lignes asymptotiques qui figurent dans le contour ont pour représentation sphérique des arcs de cercle, elles seront, on le reconnaît aisément, des hélices tracées sur un cylindre quelconque si l'arc de cercle appartient à un petit cercle, et des droites si l'arc appartient à un grand cercle [1]. De même, les lignes de

[1] D'après une proposition énoncée au n° 142, les tangentes d'une ligne asymptotique sont perpendiculaires aux tangentes correspondantes de la représentation sphérique de cette ligne. Il suit de là que, si une ligne asymptotique admet pour image sphérique un petit cercle de la sphère, ses tangentes seront parallèles aux génératrices rectilignes du cône circonscrit à la sphère suivant ce cercle, et feront, par conséquent, un angle constant avec le diamètre perpendiculaire au plan du cercle. La ligne asymptotique sera donc une hélice tracée sur un cylindre, d'ailleurs quelconque. Réciproquement, si la ligne asymptotique est une hélice, sa représentation sphérique, on le reconnaît aisément, sera un petit cercle de la sphère.

courbure qui figurent dans le contour seront des lignes planes situées dans des plans coupant obliquement la surface si elles ont pour représentation sphérique un arc de petit cercle, et des lignes situées dans un plan normal à la surface si l'arc qui leur sert de représentation appartient à un grand cercle. Ainsi :

Parmi les surfaces de la famille définie par l'équation linéaire, il en existe une infinité (qui dépendent de quatre paramètres réels) pour lesquelles le segment (M) *est limité par des lignes asymptotiques hélicoïdales et des lignes de courbure planes se succédant suivant le même ordre que les droites et les plans qui composent le contour donné* a priori.

La première question proposée dans le numéro précédent s'interprète donc géométriquement de la manière suivante :

Peut-on choisir deux solutions particulières G et H de l'équation linéaire de telle manière que la représentation sphérique de contour (M) de la surface correspondante soit composée exclusivement d'arcs de grands cercles ?

Considérons une surface quelconque de la famille, correspondant à deux intégrales particulières déterminées G′ et H′, et pour laquelle la représentation sphérique du contour sera un polygone (P′) composé d'arcs de petit cercle, polygone (P′) que l'on saura construire si l'on a intégré l'équation linéaire. Si l'on pose

$$u = -\frac{G}{H}, \qquad u' = -\frac{G'}{H'},$$

on aura évidemment

$$u = \frac{mu' + n}{pu' + q}, \tag{32}$$

m, n, p, q étant des constantes arbitraires et inconnues. La question proposée revient évidemment à la suivante : Peut-on, par l'emploi d'une transformation de la forme précédente, substituer au polygone (P′) un autre polygone (P), exclusivement composé d'arcs de grands cercles ?

Or, la formule (32) définit ce que nous avons appelé au n° **124**, une transformation *circulaire*, c'est-à-dire une transformation qui résulte d'un nombre pair d'inversions et dans laquelle, à un cercle, correspond un cercle. Pour qu'une telle transformation

fasse correspondre au polygone (P′) un polygone (P) exclusivement composé d'arcs de grand cercle, il faut et il suffit, comme on sait, que tous les petits cercles qui forment les côtés de (P′) soient orthogonaux à un même cercle, qui sera nécessairement imaginaire. On aura ainsi autant de conditions à écrire qu'il y aura de côtés moins 3. Ces conditions seront nécessairement transcendantes; mais, d'après les résultats généraux relatifs au principe de Dirichlet, elles peuvent toujours être résolues et permettront de déterminer un nombre égal de constantes.

Cette première difficulté une fois levée, on obtiendra effectivement des surfaces minima limitées par des contours dont les éléments seront parallèles aux éléments correspondants du contour donné *a priori*; et il faudra disposer des constantes restées arbitraires pour rendre l'un de ces contours superposable au contour donné. Cette dernière question est celle dont l'étude générale n'a pas encore été entreprise.

On remarquera les caractères distinctifs de la méthode employée dans ce Chapitre. Les propriétés relatives aux deux représentations conformes de la surface n'y interviennent que d'une manière accessoire, et auraient même pu être complètement supprimées.

CHAPITRE XIV.

APPLICATIONS DIVERSES.

Méthode inverse dans laquelle on prend comme point de départ certaines équations différentielles linéaires dont on connaît l'intégrale générale. — Surfaces que l'on peut déduire de l'équation à laquelle satisfait la série hypergéométrique de Gauss. — Surfaces déduites de la forme $A \prod (t-\alpha)^{\alpha}$ adoptée pour $G(t)$ et $H(t)$. — Surface minima limitée par une ligne brisée plane et une droite parallèle au plan de la ligne brisée. — Problème de Gergonne. — Surfaces déduites de la forme $A \prod \Theta^{\alpha}(t-\alpha) \prod H^{\beta}(^2-b)$ adoptée pour $\mathcal{G}(t)$ et $\mathcal{H}(t)$, Θ et H désignant les fonctions de Jacobi. — Surface minima limitée par deux polygones fermés situés dans des plans parallèles. — Remarque générale sur les moyens de multiplier le nombre des solutions du problème. — Surface passant par trois droites situées d'une manière quelconque dans l'espace.

---

309. Le problème proposé ne pouvant être complètement résolu que dans le cas où l'équation linéaire formée au n° 306 est intégrable, ou du moins, appartient à la classe de celles pour lesquelles on peut suivre la variation de deux intégrales dans toute l'étendue du plan, on est naturellement conduit à une marche inverse de celle qui a été suivie dans les deux Chapitres précédents. Il semble préférable d'étudier directement les équations du second ordre, en très petit nombre, auxquelles on a reconnu la propriété que nous venons de rappeler, c'est-à-dire dont on sait déterminer le groupe, et de chercher ensuite quels sont les contours pour lesquels elles peuvent donner la solution du problème proposé.

Au premier rang de ces équations, il faut placer celle à laquelle satisfait la série hypergéométrique

$$(1) \qquad t(1-t)\frac{d^2\theta}{dt^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)t]\frac{d\theta}{dt} - \alpha\beta\theta = 0.$$

Nous avons vu (n° 277) que si α, β, γ sont réels, le rapport de

deux solutions particulières donne la représentation sur la moitié supérieure du plan d'une aire plane ou sphérique, plus ou moins complexe, limitée par trois arcs de cercle. Dans le cas où les trois cercles limites sont orthogonaux à un cercle imaginaire, on peut, en choisissant convenablement deux solutions, obtenir la représentation plane d'une aire sphérique limitée par trois arcs de grand cercle. Ce cas est caractérisé (n° 277) par l'inégalité

$$(2)\qquad \frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+1-\gamma)\,\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} < 0,$$

à laquelle on peut donner la forme la plus simple

$$(3)\qquad \sin\alpha\pi\,\sin\beta\pi\,\sin(\gamma-\alpha)\,\pi\,\sin(\gamma-\beta)\,\pi < 0.$$

Toutefois, l'équation à laquelle satisfait la série hypergéométrique ne peut pas être employée sans préparation. Nous savons que, pour l'équation linéaire dont dépend la solution du problème et qui a été formée au n° 306, la somme des exposants des deux intégrales régulières relatives à chaque point critique doit être un nombre entier, si le sommet correspondant est de première espèce, et la moitié d'un nombre impair dans le cas contraire. Or, les exposants relatifs aux divers points singuliers de l'équation (1) sont

Pour le point 0.....	0,	$1-\gamma$;
Pour le point 1.....	0,	$\gamma-\alpha-\beta$;
Pour le point ∞.....	α,	β,

et ne satisfont pas, par conséquent, à la condition que nous venons de rappeler.

Mais il suffira de substituer à la fonction θ, qui satisfait à l'équation (1), la fonction plus générale

$$(4)\qquad \Theta = t^{\frac{\mu-1}{2}}(1-t)^{\frac{\nu-1}{2}}\,\theta,$$

qui est déterminée également par une équation du second ordre; et l'on reconnaîtra aisément qu'il est possible de déterminer μ et ν de manière à satisfaire, pour les trois points, à la condition

indiquée. Car les trois équations auxquelles on est ainsi conduit,

$$(5)\qquad \begin{cases} \mu - 1 + 1 - \gamma = \dfrac{n-2}{2}, \\ \nu - 1 + \gamma - \alpha - \beta = \dfrac{n'-2}{2}, \\ \alpha + \beta - \mu - \nu + 2 = \dfrac{n''+6}{2}, \end{cases}$$

sont toujours compatibles, pourvu que les nombres entiers n, n' et n'' vérifient la relation

$$n + n' + n'' = 0,$$

qui détermine n'' lorsque n et n' sont connus.

Nous venons de multiplier θ par des puissances de t et de $1-t$. On sait que, si ces puissances sont convenablement choisies, on peut trouver trois fonctions qui satisfont à une équation de même forme que l'équation (1), mais où α, β, γ ont d'autres valeurs. L'une quelconque des quatre équations ainsi obtenues pourrait être choisie et conduirait toujours aux mêmes valeurs de Θ. Pour ces quatre équations, les quantités $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ ont les mêmes valeurs absolues et ne diffèrent que par le signe; nous supposerons que l'on ait choisi celle pour laquelle les inégalités suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} 1-\gamma > 0, \\ \gamma-\alpha-\beta > 0, \\ \alpha-\beta > 0 \end{cases}$$

sont vérifiées.

310. Conformément aux résultats du n° **277**, on obtiendra l'équation de la surface minima, en prenant pour G et H les valeurs suivantes :

$$(7)\qquad \begin{cases} G = \dfrac{K}{C} t^{\frac{\mu-1}{2}+1-\gamma} (1-t)^{\frac{\nu-1}{2}} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, t), \\ H = -K t^{\frac{\mu-1}{2}} (1-t)^{\frac{\nu-1}{2}} F(\alpha, \beta, \gamma, t) \end{cases}$$

C étant la constante dont la valeur est donnée par la formule (9) du n° **281**,

$$(8)\qquad C = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \sqrt{-\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha-\gamma)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta-\gamma)}},$$

et K désignant une constante arbitraire.

Comme on a, d'après une formule connue,

$$(9)\qquad GH' - HG' = \frac{(1-\gamma)K^2}{C} t^{\frac{n}{2}-2}(1-t)^{\frac{n'}{2}-2},$$

on déduira de là

$$(10)\qquad \sigma = \sqrt{\frac{1-\gamma}{C}}\sqrt{-2iK^2}\int t^{\frac{n}{2}-1}(1-t)^{\frac{n'}{2}-1}dt.$$

On voit que, si la portion du contour relative aux valeurs de t comprises entre 0 et 1 est une droite, il faudra prendre pour K^2 une valeur réelle; sinon, K^2 devra être purement imaginaire.

La surface que nous venons de déterminer pourra avoir des formes très variées dans le voisinage des sommets du contour. Cherchons d'abord à quelles conditions l'un quelconque de ces sommets sera à distance finie.

Pour le sommet (0), le plus petit des exposants est $\frac{\mu-1}{2}$; pour que l'intégrale $\int H^2(t)\,dt$ qui lui correspond soit finie, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu > 0.$$

On trouvera de même pour le sommet (1) la condition

$$\nu > 0,$$

et pour le sommet (∞) la condition

$$\rho > 0,$$

après avoir posé

$$\mu + \nu - 2 - 2\beta = -1 - \rho;$$

ce qui ramène les équations entre μ, ν, α, β, γ aux formes

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} 1-\gamma &= \frac{n}{2} - \mu,\\ \gamma - \alpha - \beta &= \frac{n'}{2} - \nu,\\ \alpha - \beta &= 2 - \frac{n+n'}{2}.\end{aligned}\right.$$

Nous allons d'abord examiner si les trois sommets peuvent être à distance finie.

Les premiers membres des équations précédentes étant néces-

sairement positif ainsi que μ, ν, ρ, on aura, dans le cas qui nous occupe, les inégalités

$$n > 0, \qquad n' > 0, \qquad \frac{n+n'}{2} < 2,$$

qui n'admettent que les trois solutions suivantes :

$$\begin{array}{lll} n = 1, & n' = 1, & n'' = -2; \\ n = 1, & n' = 2, & n'' = -3; \\ n = 2, & n' = 1, & n'' = -3. \end{array}$$

Dans les trois solutions, le contour a un seul sommet de première espèce. On peut supposer qu'il corresponde à la valeur ∞ de t, et l'on voit ainsi que les deux derniers cas se ramènent au premier.

Les surfaces obtenues sont celles qui ont été étudiées au n° 281 et leurs surfaces adjointes, qui sont limitées par une droite et par deux plans.

Si l'on veut que la surface ait un secteur infini, il y aura une infinité de solutions. Il suffira, par exemple, de prendre pour les entiers n et n' des valeurs positives dont la somme soit supérieure à 3. Mais on peut, avec Riemann, ne considérer que les secteurs infinis ayant une forme particulière, et semblables à un hélicoïde ou à la portion de la caténoïde comprise entre deux plans méridiens. Alors, il faudra que, comme cela a lieu dans l'hélicoïde à plan directeur, la somme des exposants des deux intégrales régulières relatives au point considéré soit égale à -1 ou à 1, suivant que la valeur correspondante de t sera finie ou infinie. Si nous supposons que le secteur infini correspond à la valeur ∞ de t, nous trouverons, en exprimant la condition précédente,

$$\alpha + \beta - \mu - \nu + 2 = 1,$$

ce qui donne

$$n + n' = 4.$$

Prenons

$$n = 2 + h, \qquad n' = 2 - h;$$

nous aurons, d'après les formules (11),

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 1 - \gamma = 1 + \dfrac{h}{2} - \mu, \\ \gamma - \alpha - \beta = 1 - \dfrac{h}{2} - \nu, \\ \alpha - \beta = -\rho. \end{array} \right.$$

Si les deux autres sommets du contour doivent être à distance finie, on aura nécessairement

$$\mu > 0, \qquad \nu > 0.$$

On déduit de là et des équations précédentes

$$\frac{h}{2} > -\gamma, \qquad \frac{h}{2} < 1 - (\gamma - \alpha - \beta)$$

et, par suite,

$$h > -2, \qquad h < 2,$$

Si l'on prend $h = -1$, on obtient le système suivant :

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} 1 - \gamma &= \frac{1}{2} - \mu, \\ \gamma - \alpha - \beta &= \frac{3}{2} - \nu, \\ \alpha - \beta &= \quad - \rho; \end{aligned} \right.$$

si l'on fait $h = 0$, on trouve

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} 1 - \gamma &= 1 - \mu, \\ \gamma - \alpha - \beta &= 1 - \nu, \\ \alpha - \beta &= \quad - \rho. \end{aligned} \right.$$

Il est inutile de considérer le cas où $h = 1$, qui se ramène au premier par l'échange de t et de $1 - t$.

Pour le premier cas, correspondant aux formules (13), les deux sommets à distance finie sont de seconde espèce. La chaîne se compose, soit d'un plan et de deux droites qui coupent le plan et ne se coupent pas, soit d'une droite et de deux plans qui coupent la droite.

Dans le second cas, qui correspond aux formules (14) et a été considéré par Riemann (n° **282**), le contour est formé de trois droites dont l'une coupe les deux autres.

Dans l'un et l'autre cas, il y a une infinité de surfaces passant par un contour donné.

En donnant d'autres valeurs aux nombres entiers qui entrent dans les formules (11), on trouverait d'autres cas dans lesquels le segment déterminé aura deux ou trois secteurs infinis. Mais deux seulement de ses secteurs pourront être hélicoïdaux; car, si les trois l'étaient, la somme des exposants des six intégrales régulières

relatives aux trois points critiques devrait être égale à -1, tandis que sa valeur est 1 dans tous les cas. Nous retrouverons plus loin, et par d'autres méthodes, la surface passant par trois droites et pour laquelle les trois segments sont hélicoïdaux.

311. Nous allons maintenant nous donner *a priori* des valeurs de $G(t)$ et $H(t)$ qui permettront de résoudre le problème proposé dans un cas très étendu.

Prenons

$$(15)\qquad \begin{cases} G(t) = A\prod(t-a)^{\alpha}, \\ H(t) = B\prod(t-a)^{\beta}, \end{cases}$$

les a, α, β désignant des constantes réelles, A, B des constantes quelconques. Nous supposerons que les exposants soient liés par les relations

$$(16)\qquad \Sigma\alpha = \Sigma\beta = -1,$$

par lesquelles on exprime simplement que la valeur ∞ attribuée à t n'est une valeur critique pour aucune des deux fonctions.

Les seuls points singuliers des intégrales G et H correspondent alors aux valeurs de t telles que a; et pour que, dans le voisinage de ces points singuliers, G et H soient de la forme (26) (n° 304), il faudra que l'on ait

$$(17)\qquad \alpha + \beta = \frac{n}{2},$$

l'entier n étant pair si le sommet correspondant du contour est de première espèce, et impair dans le cas contraire. Les relations (16) nous donnent alors

$$(18)\qquad \Sigma n = -4;$$

examinons maintenant quel est le contour de la surface obtenue.

Le calcul de σ nous donne

$$(19)\qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2iAB\prod(t-a)^{\frac{n}{2}}\sum\frac{\alpha-\beta}{t-\alpha}.$$

D'autre part, la valeur de z est déterminée, en chaque point du

contour, par l'équation

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{R}\, 2i\, \mathrm{AB} \prod (t-a)^{\frac{n}{2}}. \tag{20}$$

Supposons que les constantes A, B aient été choisies de telle manière que le produit A^2B^2 soit réel. Il est évident que le produit

$$\mathrm{AB} \prod (t-a)^{\frac{n}{2}}$$

est, ou réel, ou purement imaginaire, dans chacun des intervalles réels séparés par les valeurs singulières. Soit $(a_k a_{k+1})$ un des intervalles pour lesquels ce produit est réel; alors, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ étant purement imaginaire, la portion correspondante du contour sera une ligne asymptotique; d'autre part, $\frac{dz}{dt}$ étant nulle d'après la formule (20), cette ligne asymptotique sera dans un plan parallèle au plan des xy : ces deux conditions ne peuvent être remplies que par une droite parallèle au plan des xy. Si, au contraire, nous considérons un des intervalles pour lesquels $\mathrm{AB} \prod (t-a)^{\frac{n}{2}}$ est purement imaginaire, il suffira de passer à la surface adjointe et de répéter le raisonnement précédent; la portion du contour de la surface adjointe relative à l'intervalle considéré sera une droite parallèle au plan des xy. Donc (n° 298) la portion correspondante du contour de la surface proposée sera formée par une courbe plane située dans un plan parallèle à l'axe des z et que la surface coupera normalement.

On obtient donc une solution du problème proposé *pour le cas où le contour est formé par des droites, en nombre quelconque, parallèles à un plan fixe* (P) *et par des plans, également en nombre quelconque, perpendiculaires au même plan* (P). Il serait aisé, d'ailleurs, de démontrer que cette solution est la plus générale, au moins si l'on suppose qu'à l'intérieur, ou sur le contour et en dehors des sommets du segment cherché, ne se trouve aucun point où le plan tangent soit parallèle au plan (P) [1].

---

[1] Pour établir *a priori* la forme admise dans le texte, supposons que le plan (P) soit horizontal et ait été pris pour plan des xy. Alors, sur chaque

312. Nous indiquerons les deux applications suivantes :

Prenons d'abord tous les entiers n égaux à zéro, sauf deux auxquels nous attribuerons la valeur -2, pour satisfaire à la relation (18); et supposons que les valeurs a de t correspondant à ces deux derniers exposants soient o et ∞. Les valeurs de G et

---

partie du contour, la normale demeurera parallèle à un plan vertical fixe et, par conséquent, l'argument de u sera constant. Donc la fonction

$$\frac{d\log u}{dt}$$

sera réelle pour toutes les valeurs réelles de t. Cette fonction a des pôles qui correspondent aux divers sommets du contour; d'autre part, si le plan tangent ne devient horizontal en aucun point situé à l'intérieur du segment ou sur un côté du contour, elle ne devient infinie pour aucune valeur réelle ou imaginaire de t différente de celles qui correspondent aux sommets de ce contour. On a donc

$$\frac{d\log u}{dt} = \sum \frac{\alpha'}{t-a},$$

et l'on déduit de là, en intégrant,

$$u = \mathrm{A}' \prod (t-a)^{\alpha'}.$$

De même, la fonction $\frac{dz}{dt}$ étant nulle sur toutes les droites du contour, le produit GH demeurera réel quand on se déplacera sur chacune de ses droites. La considération de la surface adjointe montre que GH sera, au contraire, purement imaginaire sur chacune des lignes de courbure planes du contour. On déduit de là, en considérant encore la fonction $\frac{d\log \mathrm{GH}}{dt}$, que GH sera de la forme

$$\mathrm{GH} = \mathrm{B}' \prod (t-a)^{\frac{n}{2}}.$$

Les deux formules précédentes donnent bien les valeurs de G et de H admises dans le texte.

Si l'on veut faire intervenir des points où le plan tangent soit horizontal et qui soient situés, soit à l'intérieur, soit sur le contour du segment, il suffira d'adjoindre à une des deux intégrales G, H des facteurs tels que

$$(t-b^{n'},$$

où b sera réel, et

$$(t-c)^{n''}(t-c_1)^{n''},$$

où c et c_1 seront des quantités imaginaires conjuguées.

de H prendront alors la forme suivante :

$$(21)\quad \begin{cases} G(t) = A t^h \prod (t-a)^{-\alpha}, \\ H(t) = B t^{-1-h} \prod (t-a)^{-\alpha}. \end{cases}$$

Si le produit AB est réel et si les exposants α sont tous inférieurs en valeur absolue à $\frac{1}{2}$, tous les sommets correspondant aux valeurs finies de t seront à distance finie, tandis qu'il y aura deux secteurs infinis correspondant aux valeurs 0, ∞ de t. Nous déterminerons ainsi le segment (M) de surface minima *compris entre une ligne brisée plane composée d'un nombre quelconque de côtés et une droite qui est parallèle au plan de la ligne brisée.*

On trouve

$$z = \mathcal{R} \int 2i\mathrm{AB}\frac{dt}{t} = \mathcal{R}\, 2i\mathrm{AB}\log t.$$

Comme on a

$$\log t = \log\rho + i\varphi,$$

ρ désignant le module et φ l'argument de t qui demeure compris entre 0 et π, on voit que z varie entre 0 et $-2\mathrm{AB}\pi$. On devra donc prendre

$$2\mathrm{AB}\pi = -\delta,$$

δ étant la distance de la droite au plan de la ligne brisée. Les constantes qui demeurent arbitraires se détermineront par la condition que les côtés de la ligne brisée aient des longueurs données.

Cet exemple comprend comme cas particulier un de ceux qui ont été traités par Riemann; il suffit de supposer que la ligne brisée se réduit aux deux côtés d'un angle pour retrouver le second des problèmes signalés au n° 264.

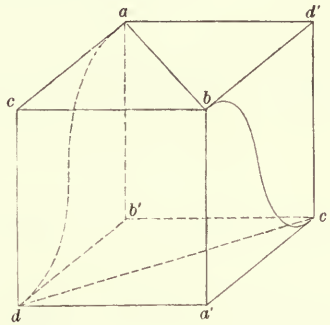
313. On peut traiter de la même manière le problème de Gergonne (n° 266) et déterminer complètement la surface minima qui, passant par deux diagonales opposées d'un parallélépipède droit, coupe à angle droit deux faces latérales opposées de ce parallélépipède. Pour plus de simplicité, nous supposerons le parallélépipède rectangle (*fig.* 27).

On peut toujours admettre que les sommets a, b, c, d du contour correspondent à des valeurs de t que nous désignerons par

$$-b, \quad -a, \quad +a, \quad +b,$$

a étant plus petit que b. De cette manière, les courbes planes bc et da du contour correspondront aux deux intervalles $(-a, +a)$ et $(b, \infty, -b)$.

Fig. 27.



On doit poser ici

$$(22) \qquad \begin{cases} G = A(b+t)^{\alpha_1}(a+t)^{\alpha_2}(a-t)^{\alpha_3}(b-t)^{\alpha_4}, \\ H = B(b+t)^{\beta_1}(a+t)^{\beta_2}(a-t)^{\beta_3}(b-t)^{\beta_4}, \end{cases}$$

avec les conditions

$$(23) \qquad \alpha_i + \beta_i = \frac{n_i}{2}, \qquad \Sigma n_i = -4,$$

les entiers n_i étant impairs, puisque tous les sommets du contour sont de seconde espèce. D'ailleurs, comme tous les sommets sont à distance finie, nous devons avoir

$$(24) \qquad \alpha_i > -\frac{1}{2}, \qquad \beta_i > -\frac{1}{2},$$

et, par conséquent, en ajoutant,

$$n_i > -2.$$

Les quantités n_i doivent être supérieures à -2; comme leur somme est -4, on a nécessairement

$$n_i = -1;$$

et les conditions (23) se ramènent à la forme

$$\alpha_i + \beta_i = -\frac{1}{2}. \tag{25}$$

Si l'on tient compte des inégalités (24), on voit que α_i et β_i doivent être compris entre o et $-\frac{1}{2}$. Par suite, la différence $\alpha_i - \beta_i$ sera inférieure à $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

Or, $(\alpha_i - \beta_i)\pi$ mesure, au signe près, l'un des angles formés par les deux grands cercles qui servent de représentation sphérique aux deux portions du contour se coupant au sommet (i); si l'on désigne par $\alpha\pi$ l'angle de la diagonale ab avec le côté ad' du parallélépipède, ces deux cercles font entre eux les angles

$$\alpha\pi, \quad (1-\alpha)\pi.$$

Comme $(\alpha_i - \beta_i)\pi$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, il faudra prendre

$$(\alpha_i - \beta_i)\pi = \pm \alpha\pi;$$

cette équation, jointe à la formule (25), donne les deux systèmes de valeurs

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}, \\ \beta_i &= -\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2}, \\ \beta_i &= -\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

pour α_i et β_i. On pourrait faire différentes combinaisons de ces deux systèmes; mais, pour obtenir celle qui correspond à la figure 27, nous remarquerons que l'on a ici

$$u = -\frac{G}{H} = -\frac{A}{B}(b+t)^{\alpha_1-\beta_1}(a+t)^{\alpha_2-\beta_2}(a-t)^{\alpha_3-\beta_3}(b-t)^{\alpha_4-\beta_4}.$$

Or, si l'on se reporte à la figure, on voit qu'en prenant un sens déterminé pour la normale, on a

$$u = 0, \qquad \text{en } a \text{ et en } d,$$
$$u = \infty, \qquad \text{en } b \text{ et en } c;$$

il faut donc prendre

$$\alpha_1 > \beta_1, \qquad \alpha_2 < \beta_2, \qquad \alpha_3 < \beta_3, \qquad \alpha_4 > \beta_4,$$

ce qui détermine complètement les exposants et donne

$$(28)\qquad \begin{cases} G = A(a^2 - t^2)^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}(b^2 - t^2)^{-\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}}, \\ H = B(a^2 - t^2)^{-\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}}(b^2 - t^2)^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}, \\ u = -\dfrac{A}{B}\left(\dfrac{b^2 - t^2}{a^2 - t^2}\right)^{\alpha}. \end{cases}$$

Si l'on suppose que le plan des xz ait été pris parallèle à la face $ba'cd'$ du parallélépipède, u doit être réelle dans l'intervalle $(-a, +a)$; il faudra donc que $\frac{A}{B}$ soit réel. On peut d'ailleurs déterminer ce rapport par différents moyens.

Par exemple, on pourra exprimer que l'accroissement de x est le même en valeur absolue quand on passe du sommet b au sommet c, ou du sommet d au sommet a. En se reportant aux équations (3) (n° 294) qui définissent la surface, on est ainsi conduit à l'équation

$$2\int_0^a (G^2 - H^2)\,dt = 2\int_0^\infty (G^2 - P^2)\,dt.$$

Effectuons dans le second membre la substitution

$$t = \frac{ab}{t'}.$$

Un calcul facile donnera

$$G(t) = \pm i\frac{A}{B}\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha}\frac{t'H(t')}{\sqrt{ab}}, \qquad H(t) = \pm i\frac{B}{A}\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}\frac{t'G(t'')}{\sqrt{ab}},$$

et l'équation prendra la forme

$$\int_0^a (G^2 - H^2)\,dt = \int_0^a \left[\frac{B^2}{A^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha}G^2 - \frac{A^2}{B^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{2\alpha}H^2\right]dt,$$

ou encore

$$0 = \left(\frac{A^2}{a^{2\alpha}} - \frac{B^2}{b^{2\alpha}}\right)$$
$$\times\int_0^a (a^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}-\alpha}(b^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}-\alpha}\left[\left(\frac{b^2 - t^2}{b}\right)^{2\alpha} + \left(\frac{a^2 - t^2}{a}\right)^{2\alpha}\right]dt.$$

Tous les éléments de l'intégrale étant positifs, il faudra qu'on ait

$$\frac{A^2}{a^{2\alpha}} = \frac{B^2}{b^{2\alpha}}.$$

On prendra donc, pour satisfaire à cette équation,

$$A = \sqrt{iM}\, a^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} b^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}},$$
$$B = \sqrt{iM}\, b^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} a^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}},$$

et les valeurs définitives de $G(t)$, $H(t)$ seront

$$(29)\quad \begin{cases} G(t) = \sqrt{iM}\left(\dfrac{a^2-t^2}{a}\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}\left(\dfrac{b^2-t^2}{b}\right)^{-\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}}, \\ H(t) = \sqrt{iM}\left(\dfrac{a^2-t^2}{a}\right)^{-\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}}\left(\dfrac{b^2-t^2}{b}\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}; \end{cases}$$

M sera une constante réelle : on le reconnaît immédiatement en exprimant que $\frac{dz}{dt}$ est nulle pour chaque point de la droite ab.

Le rapport $\frac{a}{b}$ se déterminera par la condition que le parallélépipède à l'intérieur duquel se trouve le segment déterminé (M) soit semblable au parallélépipède donné. Dans le cas où la base est carrée, il faudra faire $\alpha = \frac{1}{4}$ [1].

314. Nous venons de montrer, par l'étude de deux problèmes particuliers, le parti que l'on peut tirer de la forme générale des valeurs de $G(t)$ et $H(t)$, donnée au n° 311. En continuant l'application de la méthode synthétique qui a réussi dans les exemples

---

[1] Si l'on cherche la valeur de la fonction $\mathcal{F}(u)$ de Weierstrass relative à la surface que nous venons de déterminer, on est conduit à un résultat de la forme

$$\mathcal{F}(u) = \frac{K u^{\frac{1}{2\alpha}-2}}{\sqrt{\left(b - au^{\frac{1}{\alpha}}\right)\left(a - bu^{\frac{1}{\alpha}}\right)}}.$$

Pour le cube, on a $\alpha = \frac{1}{4}$ et l'on retrouve la forme de $\mathcal{F}(u)$ donnée par M. Schwarz dans le Mémoire que nous avons cité (n° 266).

précédents, nous allons étudier deux formes nouvelles des mêmes intégrales, qui dépendent des fonctions elliptiques et nous donnerons une solution élégante de l'un des problèmes étudiés par Riemann.

$\mathcal{G}(t)$ et $\mathcal{H}(t)$ désignant les valeurs nouvelles des fonctions G et H, prenons

$$(30)\qquad \begin{cases} \mathcal{G}(t) = \mathrm{A}\prod \mathrm{H}^{\alpha}(t-a)\prod \Theta^{-\beta'}(t-b), \\ \mathcal{H}(t) = \mathrm{B}\prod \mathrm{H}^{\alpha'}(t-a)\prod \Theta^{-\beta'}(t-b). \end{cases}$$

Dans ces formules, A et B désignent deux constantes quelconques; a, b, α, β, α', β' sont des constantes réelles, et le nombre des constantes a n'est pas nécessairement égal à celui des constantes b; enfin les symboles H et Θ désignent les *transcendantes de Jacobi*, le module k étant supposé réel et plus petit que l'unité. En répétant les raisonnements indiqués dans les numéros précédents, nous reconnaissons immédiatement que, si l'on donne à t des valeurs réelles quelconques, le contour de la surface correspondant à ces valeurs réelles de t se composera de droites parallèles au plan des xy ou de courbes situées dans des plans coupant la surface à angle droit et parallèles à l'axe des z; il suffira, pour cela, que le produit $\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2$ soit réel et que les exposants satisfassent aux relations

$$\alpha + \alpha' = \frac{n}{2},$$

où n désignera toujours un nombre entier. Mais ici se présente une circonstance tout à fait exceptionnelle : si l'on change t en $t + i\mathrm{K}'$, les formules bien connues

$$\Theta(t + i\mathrm{K}') = \mathrm{H}(t)\, e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2t + i\mathrm{K}' - 2\mathrm{K})},$$
$$\mathrm{H}(t + i\mathrm{K}') = \Theta(t)\, e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2t + i\mathrm{K}' - 2\mathrm{K})},$$

montrent immédiatement que $\mathcal{G}(t)$ et $\mathcal{H}(t)$ ne changeront pas de forme pourvu que les exposants soient liés par les relations

$$(31)\qquad \Sigma\alpha - \Sigma\beta = 0, \qquad \Sigma\alpha' - \Sigma\beta' = 0,$$

que nous supposerons vérifiées. Alors, toutes les fonctions H se

changeront en fonctions Θ, et réciproquement; on aura

$$(32)\quad \begin{cases} \mathcal{G}(t+i\mathrm{K}') = \mathrm{A}\, e^{\frac{i\pi}{2\mathrm{K}}(\Sigma a\alpha - \Sigma b\beta)} \prod \Theta^{\alpha}(t-a) \prod \mathrm{H}^{-\beta}(t-b), \\ \mathcal{H}(t+i\mathrm{K}') = \mathrm{B}\, e^{\frac{i\pi}{2\mathrm{K}}(\Sigma a\alpha' - \Sigma b\beta')} \prod \Theta^{\alpha'}(t-a) \prod \mathrm{H}^{-\beta'}(t-b). \end{cases}$$

Par conséquent, si l'on a

$$\beta + \beta' = \frac{n'}{2}$$

et si la somme

$$\Sigma a(\alpha + \alpha') - \Sigma b(\beta + \beta')$$

est un multiple de K, il y aura sur la surface un second contour tout semblable au premier, qui correspondra aux valeurs de t dont la partie réelle est quelconque, mais dont la partie imaginaire est $i\mathrm{K}'$. Par suite, la portion de la surface qui contient tous les points pour lesquels la partie imaginaire est comprise entre o et $i\mathrm{K}'$ formera une espèce de bande, limitée par deux contours distincts, de la nature de ceux que nous avons étudiés, qui seront, par conséquent, formés soit de droites, soit de plans que la surface coupera normalement, les droites étant toutes parallèles au plan des xy et les plans tous parallèles à l'axe des z.

Pour nous borner au cas le plus simple et le plus intéressant, nous supposerons que les exposants soient liés par les relations

$$(33)\qquad \alpha' + \alpha = 0, \qquad \beta' + \beta = 0.$$

Alors, si le produit AB est réel et si les exposants α, β sont tous inférieurs en valeur absolue à $\frac{1}{2}$, la bande de surface déjà définie sera limitée par deux lignes brisées situées dans deux plans parallèles au plan des xy. Les sommets de l'un des contours correspondront aux valeurs

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots$$

de t et à ces valeurs augmentées de multiples de $2\mathrm{K}$; ceux du second aux valeurs

$$b_1 + i\mathrm{K}', \quad b_2 + i\mathrm{K}', \quad \ldots,$$

et à ces valeurs augmentées également de multiples quelconques de $2\mathrm{K}$.

La valeur de z, donnée pour la dernière des formules (3) (n° 294),

devient ici

$$(34) \qquad z = \mathcal{R}\int 2i\mathrm{AB}\,di = 2\mathrm{AB}\mathcal{R}\,it.$$

Si donc on pose

$$(35) \qquad 2\mathrm{ABK}' = -\delta,$$

le segment de surface sera tout entier compris entre le plan des xy et le plan

$$z = \delta.$$

La périodicité des fonctions Θ et H entraîne d'ailleurs certaines propriétés de la surface; si, dans les expressions de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{H}$, on change t en $t + 2\mathrm{K}$, un calcul facile donne

$$(36) \qquad \begin{cases} \mathcal{G}(t + 2\mathrm{K}) = e^{-i\pi\Sigma\alpha}\,\mathcal{G}(t), \\ \mathcal{H}(t + 2\mathrm{K}) = e^{i\pi\Sigma\alpha}\,\mathcal{H}(t). \end{cases}$$

Ces formules définissent un déplacement parallèle à l'axe des z. Si donc on considère seulement le segment (M) de la surface qui correspond aux valeurs de t représentées par des points à l'intérieur du parallélogramme ($2\mathrm{K}$, $i\mathrm{K}'$) des demi-périodes, il suffira, pour obtenir toutes les autres parties de la surface, de faire tourner le segment (M) d'angles égaux aux multiples de $2\pi\Sigma\alpha$ autour d'un axe convenablement choisi, parallèle à l'axe des z. Nous allons chercher la condition pour que le segment (M) forme une surface annulaire fermée, qui sera alors nécessairement limitée par deux polygones fermés, et dont chaque point correspondra ainsi à une infinité de valeurs de t qui seront égales, à des multiples près de $2\mathrm{K}$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que les valeurs de $\mathcal{G}^2(t)$, $\mathcal{H}^2(t)$ soient périodiques, ce qui aura toujours lieu d'après les équations (36), si l'on a l'unique relation

$$(37) \qquad \Sigma\alpha = \mathrm{N},$$

N désignant un nombre entier. La première des équations (31) nous donne alors la relation

$$\Sigma\beta = \mathrm{N},$$

à laquelle devront satisfaire les exposants β.

Considérons maintenant une section plane quelconque dont le plan soit parallèle au plan des xy. Elle correspond, d'après la formule (34), à une valeur de t

$$u + ih,$$

dont la partie imaginaire est constante. Pour que cette courbe soit fermée, il faudra, comme le montrent les formules qui déterminent la surface, que les deux intégrales

$$\mathcal{R}\int_{ih}^{ih+2K} i(\mathcal{G}^2 - \mathcal{H}^2)\,dt, \qquad \mathcal{R}\int_{ih}^{ih+2K} (\mathcal{G}^2 + \mathcal{H}^2)\,dt$$

soient nulles toutes les deux. Il suffit d'intégrer le long d'un rectangle pour reconnaître que ces deux intégrales seront nulles pour toutes les valeurs de h, si elles le sont pour $h = 0$.

En résumé, si les trois conditions suivantes sont vérifiées,

$$(38)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Sigma\alpha = \Sigma\gamma = N, \\ \mathcal{R}\displaystyle\int_0^{2K} i(\mathcal{G}^2 - \mathcal{H}_2)\,dt = 0, \qquad \mathcal{R}\int_0^{2K} (\mathcal{G}^2 + \mathcal{H}^2)\,dt = 0, \end{array}\right.$$

la surface minima déterminée sera un segment annulaire (M), à connexion double, compris entre deux plans parallèles dont la distance est δ et limité par deux polygones fermés quelconques situés dans ces plans. Ces deux polygones, qui n'ont pas nécessairement le même nombre de côtés, seront, l'un et l'autre, de l'espèce N; c'est-à-dire qu'un point mobile ne pourra, après les avoir entièrement parcourus, revenir au point de départ qu'après avoir fait N tours complets. On reconnaît aisément que le nombre de constantes arbitraires contenu dans la solution est précisément égal à celui des arbitraires qui sont nécessaires pour la détermination complète du contour.

Cet exemple est le dernier de ceux qui ont été traités par Riemann (n° 264). On peut l'étudier d'une manière directe en suivant la méthode indiquée plus haut, dans la Note du n° 311 [1].

---

[1] Riemann avait seulement indiqué que le problème pouvait être résolu; et les développements si intéressants donnés sur ce sujet dans les Œuvres complètes du grand géomètre (p. 386 et suiv. de la traduction de M. Laugel) sont l'œuvre de H. Weber.

315. Nous développerons maintenant une remarque générale qui nous paraît de nature à faire mieux comprendre le caractère propre des solutions précédentes. Soit

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p\frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0 \tag{39}$$

l'équation linéaire dont deux solutions connues, G et H, doivent être substituées dans les formules qui déterminent la surface. Substituons à la fonction θ la fonction plus générale θ_1, liée à θ par la relation

$$\theta_1 = \sqrt{R}\left(\frac{d\theta}{dt} + S\theta\right); \tag{40}$$

R et S étant des fonctions de t qui seront réelles pour les valeurs réelles de t, et que, pour plus de simplicité, nous supposerons uniformes dans toute l'étendue du plan. Substituons au segment (M) de surface minima déterminé par les deux solutions G et H le segment (M_1) qui serait défini par les nouvelles fonctions

$$G_1 = \sqrt{R}\left(\frac{dG}{dt} + SG\right), \qquad H_1 = \sqrt{R}\left(\frac{dG_1}{dt} + SG_1\right); \tag{41}$$

nous allons voir que ce segment (M_1) et le segment (M) sont limités l'un et l'autre par des contours qui ne sont pas nécessairement superposables, mais qui sont au moins de même espèce.

Soit, pour fixer les idées, (d) une droite du contour de (M), qui correspond à un intervalle réel (a_k, a_{k+1}) dans lequel varie t. Si l'on amène l'axe des y à être parallèle à la droite (d), il faudra effectuer sur G et H une certaine substitution linéaire dont la forme a été donnée au n° 295; il faudra aussi soumettre G_1 et H_1 à la même substitution linéaire, ou à une substitution dont les quatre coefficients auraient leur signe changé. Si donc on désigne par g, h, g_1, h_1 les nouvelles valeurs de G, H, G_1, H_1, il suit de la forme linéaire des relations (41) que l'on aura

$$g_1 = \varepsilon\sqrt{R}\left(\frac{dg}{dt} + Sg\right), \qquad h_1 = \varepsilon\sqrt{R}\left(\frac{dh}{dt} + Sh\right),$$

ε désignant toujours l'unité positive ou négative.

Cela posé, donnons à t la valeur réelle, comprise entre a_k et a_{k+1}, qui convient à un point de la droite (d); g et h seront toutes les deux réelles ou toutes les deux purement imaginaires (n° 300).

Puisque, par hypothèse, R et S sont des fonctions réelles pour toutes les valeurs réelles de t, g_1 et h_1 seront, comme g et h, toutes les deux réelles ou toutes les deux purement imaginaires. Par suite, la portion du contour de (M_1) qui correspond à l'intervalle (a_k, a_{k+1}) sera aussi une droite (d_1), parallèle à la droite (d). La démonstration se ferait de la même manière si la portion considérée du contour de (M) était située dans un plan (P) normal à la surface : la portion correspondante du contour de (M_1) serait dans un plan (P_1) parallèle à (P) et normal à (M_1) : on le reconnaît, d'ailleurs, presque immédiatement en passant aux surfaces adjointes de (M) et de (M_1). La proposition que nous avions en vue est donc établie dans toute sa généralité.

Les fonctions R et S pourront s'annuler, avoir des pôles ou des points singuliers essentiels. Il en résultera, pour le segment (M_1), des singularités, ou des points de ramification, ou des nappes infinies; certains sommets du contour pourront être rejetés à l'infini, ou ramenés à distance finie; il pourra y avoir des stationnements ou des rebroussements sur certaines parties du contour. Nous n'insisterons pas sur toute cette discussion. Le point essentiel que nous avons voulu mettre en évidence, et qui est important pour la théorie générale des équations aux dérivées partielles, est le suivant : on peut trouver une infinité de surfaces minima, dépendant d'un nombre limité ou illimité d'arbitraires, qui contiendront toutes un contour de nature donnée; en sorte que la condition, pour une telle surface, de contenir un contour donné ne la détermine pour ainsi dire pas et ne permet pas, en particulier, de fixer la valeur ou la forme des fonctions arbitraires qui entrent dans son intégrale. Le problème est susceptible d'une solution précise et déterminée dans le cas seulement où l'on ajoute les conditions de continuité indiquées dans tous les exemples précédents.

316. J.-A. Serret, dans un Article inséré au Tome XL des *Comptes rendus* [1], a montré qu'il existe une infinité de surfaces minima

---

[1] J.-A. Serret, *Sur la moindre surface comprise entre des lignes droites données, non situées dans le même plan* (*Comptes rendus*, t. XL, 1855, p. 1078).
La même question a aussi été traitée par O. Bonnet dans le Mémoire déjà cité *Sur l'emploi d'un nouveau système de variables, etc.* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. V, p. 246).

passant par deux droites et que ces surfaces contiennent dans leur équation une fonction arbitraire. On obtiendra toutes ces surfaces en appliquant les remarques précédentes au problème particulier du n° 280. Les hélicoïdes obtenus dans cet Article correspondent à des valeurs de H et de G qui sont de la forme suivante :

$$G = t^m, \qquad H = t^{-1-m};$$

si l'on porte ces valeurs dans les formules (41), on aura

$$G_1 = t^m\sqrt{R}\left(S + \frac{m}{t}\right), \qquad H_1 = t^{-m-1}\sqrt{R}\left(S - \frac{1+m}{t}\right)$$

ou, plus simplement,

$$G_1 = t^m\sqrt{P}, \qquad H_1 = t^{-1-m}Q\sqrt{P},$$

P et Q étant des fonctions réelles pour les valeurs réelles de t.

317. Supposons encore que, $a_1, a_2, \ldots, a_s$ étant les valeurs de t relatives aux points singuliers, on prenne dans les formules (40)

$$(42) \qquad \begin{cases} S = 0, \\ R = \prod (t - a_k)^{n_k}, \end{cases}$$

tous les nombres n_k étant entiers et ayant leur somme nulle. On obtiendra la surface définie par les équations

$$(43) \qquad \begin{cases} x = \mathcal{R}\int i(G^2 - H^2)R\,dt, \\ y = \mathcal{R}\int (G^2 - H^2)R\,dt, \\ z = \mathcal{R}\int 2iGHR\,dt. \end{cases}$$

Le segment de cette surface qui correspond aux valeurs de t dont la partie imaginaire est positive est limité pas un contour dont tous les éléments sont parallèles à ceux du contour qui limite la surface primitive. Ce segment n'offre d'ailleurs aucune singularité; certains sommets seulement pourront être rejetés à l'infini; d'autres ramenés à distance finie.

S l'on prenait pour R une fonction réelle quelconque, on intro-

duirait nécessairement des singularités; mais elles pourraient être toutes à une distance finie du contour.

318. Nous appliquerons encore les remarques précédentes aux différentes solutions du problème que nous avons obtenues au n° 310 par l'emploi de l'équation de Gauss. Nous avons vu que, si l'on pose

$$\theta = t^{\frac{\mu-1}{2}}(1-t)^{\frac{\nu-1}{2}}F, \tag{44}$$

F désignant une solution particulière de l'équation de Gauss, les deux valeurs G et H de θ déterminées par les formules (7) définissent une surface minima contenant trois droites dont les angles sont quelconques. Substituons à θ la fonction

$$\theta_1 = t(1-t)P(t)\frac{d\theta}{dt} + Q(t)\theta,$$

où $P(t)$ et $Q(t)$ désignent des polynomes réels, de degré $m-1$ et m respectivement, n'ayant aucun facteur commun. Les deux valeurs G_1, H_1 de θ_1 obtenues en substituant successivement G et H à θ, définiront une surface minima contenant trois droites et ne présentant, en dehors des sommets qui correspondent aux valeurs 0, 1, ∞, que des points de ramification; car les intégrales G_1 et H_1 sont partout finies et continues et elles ne s'annulent jamais simultanément en dehors de ces sommets. Étudions le cas le plus simple, celui où l'on a

$$\theta_1 = ct(1-t)\frac{d\theta}{dt} + [at + b(1-t)]\theta, \tag{45}$$

les constantes a, b, c étant toutes réelles ou toutes purement imaginaires.

Alors, les exposants des six intégrales régulières de l'équation en θ_1 sont [1] :

Pour le point 0.....	$\frac{\mu-1}{2}$,	$\frac{\mu-1}{2}+1+\gamma$.
Pour le point 1.....	$\frac{\nu-1}{2}$,	$\frac{\nu-1}{2}+\gamma-\alpha-\beta$.
Pour le point ∞.....	$\beta-\frac{\mu+\nu-2}{2}-1$,	$\alpha-\frac{\mu+\nu-2}{2}-1$.

[1] Pour certaines relations entre a, b, c, il est clair que quelques-uns de ces

Si donc on pose

$$\mu - 1 + 1 - \gamma = \frac{n}{2} - 1,$$

$$\nu - 1 + \gamma - \alpha - \beta = \frac{n'}{2} - 1,$$

$$\beta + \alpha - 2 - (\mu + \nu - 2) = \frac{n''}{2},$$

n, n', n'' seront des nombres entiers, pairs ou impairs suivant que le sommet correspondant sera de première ou de seconde espèce, et l'addition des trois équations précédentes nous donnera

$$n + n' + n'' = 2.$$

Si les deux premiers sommets sont à distance finie, les sommes $\frac{n}{2} - 1$ et $\frac{n'}{2} - 1$ des exposants pour ces deux points devront être supérieures à -1. On aura donc

$$n + n' > 0$$

et, par conséquent,

$$n'' < 2.$$

Le troisième sommet sera donc à l'infini, et la surface aura un secteur infini, de forme plus ou moins compliquée. Nous laisserons de côté l'examen de toutes ces hypothèses et nous remarquerons seulement que la surface peut avoir trois secteurs infinis logarithmiques, ce qui aura lieu si l'on prend

$$n = 0, \qquad n' = 0, \qquad n'' = 2.$$

Les trois sommets sont alors de même espèce, et l'on obtient une surface minima passant par trois droites dont aucune ne rencontre les deux autres. On a

$$\mu = \gamma - 1, \qquad \nu = -(\gamma - \alpha - \beta),$$

---

exposants pourraient s'élever. Par exemple, si la constance b est nulle, le premier exposant relatif au point o est augmenté d'une unité; et la somme des exposants des six intégrales régulières, au lieu d'être égale à -1, devient égale à zéro. Nous laisserons de côté l'étude de ces cas exceptionnels qui conduiraient, si nous ne nous sommes pas trompé, à différentes surfaces parmi lesquelles se trouve celle qui a deux secteurs infinis hélicoïdaux et qui contient trois droites dont deux se coupent, l'ensemble de ces trois droites n'étant d'ailleurs assujetti à aucune autre condition.

et l'on détermine les valeurs de G_1 et de H_1 qui font connaître la surface en substituant à la place de θ, dans la formule (45), les deux valeurs de G et de H définies par les équations (7). Il faudra, dans ces équations, remplacer μ et ν par les valeurs précédentes et prendre pour la valeur de K^2 une constante réelle quelconque. Il est inutile, en effet, de conserver à K^2 une valeur arbitraire puisqu'elle vient s'adjoindre comme facteur aux constantes a, b, c qui entrent dans l'expression de θ_1. Si l'on prend, par exemple,

$$K^2 = \frac{-C}{1-\gamma}, \tag{46}$$

la formule (9) nous donnera

$$GH' - HG' = \frac{-1}{t^2(1-t)^2}; \tag{47}$$

nous allons faire usage de cette relation.

Les fonctions G_1 et H_1 que nous venons d'obtenir, et qui déterminent la surface, dépendent de six constantes arbitraires a, b, c, α, β, γ. Il est aisé de reconnaître que la forme du système formé par trois droites dépend également de six constantes : si l'on se donne, par exemple, les angles de ces droites et leurs plus courtes distances, on pourra d'abord construire le système formé par les deux premières; et, pour déterminer la troisième, il suffira de mener, à deux cylindres de révolution ayant pour axes ces deux droites, une tangente commune, parallèle à une droite donnée. Il semble donc que la surface déterminée dans la solution précédente pourra contenir trois droites quelconques : on peut mettre ce point essentiel hors de doute en employant la méthode suivante, qui a été donnée par Riemann.

319. Nous allons d'abord compléter les remarques générales présentées au n° 305, en les étendant au cas où un secteur hélicoïdal infini correspond aux valeurs de t infiniment voisines d'une valeur singulière, que nous supposerons, pour fixer les idées, égale à zéro. Alors, les deux intégrales régulières G et H considérées au n° 304 auront la somme de leurs exposants égale à -1; et l'on pourra poser

$$\left\{\begin{aligned} G &= A\,t^{-\frac{1}{2}-\frac{h}{2}}\{1+\alpha t+\ldots\}, \\ H &= B\,t^{-\frac{1}{2}-\frac{h}{2}}\{1+\alpha' t+\ldots\}. \end{aligned}\right. \tag{48}$$

En substituant ces valeurs de G et de H dans l'expression de σ, on aura

$$(49)\quad \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = 2i(\mathrm{HG}' - \mathrm{GH}') = -\frac{2i\mathrm{AB}h}{t^2}\left\{1 + \beta t + \beta' t^2 + \ldots\right\};$$

comme $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ doit être purement imaginaire pour les valeurs réelles de t, on voit que le produit AB sera nécessairement réel.

Les coordonnées x, y, z d'un point de la surface s'obtiennent en substituant dans les formules (3) (n° 294) les valeurs précédentes de H et de G. On trouve un résultat de la forme

$$(50)\quad \begin{cases} x = -\frac{1}{h}\mathcal{R}\, i\mathrm{A}^2 t^{-h}\left\{1 + \theta\right\}, \\ y = -\frac{1}{h}\mathcal{R}\, \mathrm{A}^2 t^{-h}\left\{1 + \theta'\right\}, \\ z = 2\mathrm{AB}\,\mathcal{R}[i\log t + \theta''], \end{cases}$$

θ, θ', θ'' étant des séries qui s'annulent pour $t = 0$.

En réduisant les valeurs de x et de y à leurs termes principaux, on aura

$$(51)\quad \begin{cases} x = -\frac{1}{h}\mathcal{R}\, i\mathrm{A}^2 t^{-h}, \\ y = -\frac{1}{h}\mathcal{R}\, \mathrm{A}^2 t^{-h}, \end{cases}$$

ou encore

$$x + iy = -\frac{i}{h}\mathrm{A}^2 t^{-h}.$$

Lorsque le point variable t décrira, dans la partie supérieure du plan, un demi-cercle infiniment petit autour de l'origine, x et y seront très grands et l'argument de $x + iy$ augmentera de $h\pi$. Comme on passe ainsi de l'une des droites du contour à la suivante, on voit que l'angle du secteur infini sera égal en valeur absolue à $h\pi$.

D'autre part, la valeur de z, réduite à son premier terme

$$2\mathrm{AB}\,\mathcal{R}\, i\log t,$$

ou au produit de AB par l'argument de t pris en sens contraire, variera entre 0 et $-2\mathrm{AB}\pi$. Si δ désigne la plus courte distance des

deux droites qui limitent le contour infini, on aura donc

$$\delta = -2AB\pi. \tag{52}$$

Le développement de l'invariant $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ sera donc de la forme

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \frac{\delta h i}{\pi}\frac{1}{t^2}\left\{1 + \beta t + \ldots\right\}. \tag{53}$$

et son premier terme s'exprimera complètement au moyen des éléments géométriques δ et h. Ce résultat, dû à Riemann, est très essentiel et nous allons en faire l'application. Remarquons seulement que, si le secteur infini correspond à une valeur infinie de t, il suffira de changer t en $\frac{1}{t}$ dans la formule précédente, ce qui donnera

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \frac{\delta h i}{\pi}\frac{1}{t^1}\left\{1 + \frac{\beta}{t} + \frac{\beta'}{t^2} + \ldots\right\}. \tag{54}$$

320. Appliquons à l'exemple que nous étudions ces remarques générales. Les angles des trois secteurs hélicoïdaux sont ici

$$(1-\gamma)\pi, \quad (\gamma - \alpha - \beta)\pi, \quad (\alpha - \beta)\pi.$$

Nous les désignerons par $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ respectivement.

D'autre part, on a généralement

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2i(H_1 G'_1 - G_1 H'_1),$$

et un calcul facile donne ici

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2i(HG' - GH')[A(1-t) + Bt - Ct(1-t)], \tag{55}$$

A, B, C ayant les valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} A &= \left(b - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2 l^2}{4}, \\ B &= \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2 m^2}{4}, \\ C &= \left(a - b + \frac{3c}{2}\right)^2 - \frac{c^2 n^2}{4}. \end{aligned}\right. \tag{56}$$

Si l'on remplace $HG' - GH'$ par sa valeur déduite de la formule (47), on a

$$(57)\qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2i\,\frac{A(1-t) + Bt - Ct(1-t)}{t^2(1-t)^2}.$$

Pour $t = 0$, on doit trouver, en développant suivant les puissances croissantes de t,

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \frac{i\delta l}{\pi}\,\frac{1}{t^2} + \ldots,$$

δ désignant la plus courte distance des deux droites qui limitent le secteur.

On aura donc, en prenant le premier terme de ce développement dans la formule (57),

$$(58)\qquad \mathcal{G}l = 2\pi A.$$

La considération des deux autres points donnerait de même

$$(58_a)\qquad \delta' m = 2\pi B, \qquad \delta'' n = 2\pi C,$$

δ' et δ'' étant les plus courtes distances des droites qui correspondent aux secteurs 1 et ∞.

On peut donc considérer A, B, C comme connues, et il reste à déduire des formules (56) les expressions de b, a, c.

Écrivons ces équations sous la forme

$$(59)\qquad \left\{\begin{aligned} b - \frac{c}{2} &= +\varepsilon\sqrt{A + \frac{c^2 l^2}{4}},\\ a + \frac{c}{2} &= -\varepsilon'\sqrt{B + \frac{c^2 m^2}{4}},\\ a - b + \frac{3c}{2} &= +\varepsilon''\sqrt{C + \frac{c^2 n^2}{4}},\end{aligned}\right.$$

ε, ε', ε'' désignant l'unité positive ou négative; l'élimination de a et de b conduit à l'équation irrationnelle

$$(60)\qquad -\frac{c}{2} + \varepsilon\sqrt{A + \frac{c^2 l^2}{4}} + \varepsilon'\sqrt{B + \frac{c^2 m^2}{4}} + \varepsilon''\sqrt{C + \frac{c^2 n^2}{4}} = 0,$$

qui déterminera c.

Si l'on chassait les radicaux, on trouverait une équation du

quatrième ordre par rapport à c^2. Nous discuterons cette équation seulement dans le cas où l, m, n sont inférieurs à 1, c'est-à-dire où les trois secteurs hélicoïdaux ont des angles moindres que π. Alors si, par un point de l'espace, on mène des parallèles aux trois droites en attribuant à ces parallèles un sens convenable, $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ seront les suppléments des angles formés par ces trois parallèles.

$l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ étant les angles d'un triangle sphérique, on a les inégalités

$$(61)\qquad \begin{cases} 1 + l - m - n > 0, \\ 1 + m - l - n > 0, \\ 1 + n - l - m > 0, \end{cases} \qquad 1 - l - m - n < 0.$$

Par suite, si, dans l'équation (60), on fait d'abord

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = -\varepsilon,$$

et si l'on substitue à la place de c^2 les deux valeurs ∞ et 0, le premier membre sera certainement négatif pour $c = \infty$, $m + n - l$ étant inférieur à 1 en valeur absolue; mais, pour $c = 0$. il y aura un signe qui dépendra entièrement de celui du facteur ε. On peut donc choisir ε de telle manière que les résultats des deux substitutions précédentes soient de signes contraires, ce qui met en évidence une première racine au moins de l'équation en c^2.

Si l'on fait maintenant, soit

$$\varepsilon = \varepsilon'' = -\varepsilon',$$

soit

$$\varepsilon = \varepsilon' = -\varepsilon'',$$

on trouvera encore deux autres équations irrationnelles, qui auront chacune au moins une racine réelle; ce qui donne, en tout, trois racines réelles de l'équation en c^2, convenant chacune à une forme connue de l'équation irrationnelle (60).

Pour séparer la quatrième racine, changeons c en $c'i$; l'équation (60) prend alors la forme

$$(60_a)\qquad \sqrt{\frac{c'^2 l^2}{4} - A} \pm \sqrt{\frac{c'^2 m^2}{4} - B} \pm \sqrt{\frac{c'^2 n^2}{4} - C} \pm \frac{c'}{2} = 0.$$

Adoptons la combinaison suivante des signes :

$$\varepsilon\sqrt{\frac{c'^2 l^2}{4} - A} + \sqrt{\frac{c'^2 m^2}{4} - B} + \sqrt{\frac{c'^2 n^2}{4} - C} - \frac{c'}{2} = 0,$$

en supposant que $\frac{A}{l^2}$ désigne la plus grande des quantités $\frac{A}{l^2}$, $\frac{B}{m^2}$, $\frac{C}{n^2}$. Si nous substituons maintenant ∞ et la valeur

$$c' = \frac{2}{l}\sqrt{A},$$

le résultat de la première substitution aura le signe de

$$\varepsilon l + m + n - 1,$$

c'est-à-dire le signe de ε, d'après les inégalités (61). La seconde substitution donnera un résultat

$$m\sqrt{\frac{A}{l^2} - \frac{B}{m^2}} + n\sqrt{\frac{A}{l^2} - \frac{C}{n^2}}\,\frac{\sqrt{A}}{l},$$

dont le signe est inconnu, mais ne dépend nullement de ε. On pourra donc choisir le signe de ε de telle manière que les résultats des deux substitutions soient de signes contraires, et l'on aura ainsi mis en évidence la quatrième racine. En portant successivement les valeurs de c dans les formules (59), on déterminera les valeurs correspondantes de a et de b, qui seront réelles si l'on prend pour c une des trois valeurs réelles, et purement imaginaires comme c si l'on emploie la dernière racine. On voit que l'on sera ainsi conduit à quatre surfaces différentes, pouvant toutes être acceptées.

Nous terminerons ici, avec le premier Volume de cet Ouvrage, la théorie des surfaces minima et l'étude du problème de Lagrange et de Plateau. Ce problème, qui doit compter au nombre des plus intéressants que l'Expérience ait jamais posés aux Géomètres, est aussi un de ceux dont les progrès sont le plus étroitement liés à ceux de l'Analyse moderne; le lecteur l'aura certainement remarqué en étudiant les développements, peut-être trop rapides, donnés dans les cinq derniers Chapitres.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

ERRATA.

—

Page 446, ajouter après le Sommaire :

Application de la méthode de M. Schwarz à la détermination de la surface, découverte par Riemann, qui est engendrée par un cercle dont le plan se meut parallèlement à un plan fixe.

Page 464. dernière ligne, *au lieu de* point tangent, *lire* plan tangent.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

LIVRE I.

APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE DE LA THÉORIE DES MOUVEMENTS RELATIFS.

CHAPITRE I.

Pages.

Du déplacement à un paramètre; application à la théorie des courbes gauches 1

Déplacement d'un système invariable ayant un point fixe. — La vitesse absolue d'un point rapporté au système invariable est la résultante de sa vitesse relative et de sa vitesse d'entraînement. — On donne d'abord les formules qui permettent de définir un déplacement fini, c'est-à-dire le passage d'un système fixe d'axes rectangulaires à un système mobile de même nature, et l'on rappelle les expressions des neuf cosinus en fonction des angles d'Euler. — On donne également les expressions des mêmes cosinus en fonction des quantités λ, μ, ν, ρ qui font connaître simplement la rotation finie par laquelle on réalise le passage des axes fixes aux axes mobiles. — Définition des paramètres quaternoniens.

On définit le mouvement du trièdre mobile par les composantes p, q, r de la rotation instantanée, relatives aux axes de ce trièdre. — Expressions des dérivées des neuf cosinus. — Solution d'un problème fondamental : déterminer le mouvement quand on se donne les composantes p, q, r en fonction du temps. — La solution est unique et exige l'intégration d'un système linéaire à trois inconnues.

Cas où le système mobile n'a plus de point fixe. — Il faut joindre à p, q, r les trois composantes par rapport aux axes mobiles de la vitesse de l'origine de ces axes. — Ici encore il y a un seul mouvement correspondant à des valeurs données de ξ, η, ζ, p, q, r. — Composantes de la vitesse absolue d'un point rapporté aux axes mobiles. — Détermination de l'axe du mouvement hélicoïdal instantané. Cas où ce mouvement se réduit à une rotation. — Réduction du mouvement instantané à deux rotations. — Droites conjuguées.

Application de la théorie précédente à l'étude des courbes gauches. — Les propriétés de ces courbes se déduisent de l'étude du mouvement d'un trièdre formé par la tangente à la courbe, la normale principale et la binormale. — Propriétés caractéristiques de ce déplacement : Les translations η, ζ et la rotation q sont nulles. Les deux compo-

Pages.

santes p et r représentent respectivement la torsion et la courbure de la courbe. — Distinction essentielle entre la courbure et la torsion. — Calcul de divers infiniment petits. — Théorie des développées. — Enveloppe du plan rectifiant. — Toute courbe pour laquelle le rapport de la courbure à la torsion est constant est une hélice tracée sur un cylindre quelconque. Ce cylindre est circulaire droit si la courbure et la torsion sont constantes. — Étude des courbes, dites de Bertrand, pour lesquelles les normales principales sont normales principales d'une autre courbe. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, en général, qu'il y ait une seule relation entre la courbure et la torsion. — Relations entre les deux courbes qui ont mêmes normales principales. — Propriétés relatives à certaines droites conjuguées.

CHAPITRE II.

Sur l'intégration du système linéaire qui se présente dans la théorie précédente 27

Il s'agit du système qui détermine le mouvement quand on se donne les rotations p, q, r en fonction du temps. — Ce système est le type, ou la forme réduite, d'une classe importante de systèmes linéaires qui admettent une intégrale quadratique, à coefficients constants ou variables. — On voit immédiatement, presque sans calcul, qu'on peut l'intégrer complètement, si l'on en connaît deux solutions particulières. Mais d'après un résultat plus caché, il suffira d'en connaître une solution particulière pour en achever l'intégration complète à l'aide d'une seule quadrature. Pour établir ce résultat, on reprend l'intégrale $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\text{const.}$ et l'on examine successivement le cas où la constante du second membre n'est pas nulle, et celui où elle est nulle.

Dans le premier cas, l'intégration du système linéaire se ramène à celle d'une *seule* équation de Riccati. — Propriétés générales de l'équation de Riccati. Forme de l'intégrale par rapport à la constante. Le rapport anharmonique de quatre solutions est constant. Cas où l'on connaît une, deux ou trois solutions particulières. Réduction à un système linéaire homogène à deux inconnues.

Application de ces propriétés générales à l'équation de Riccati qui se présente dans le problème actuel. La connaissance d'un seul système de cosinus vérifiant les trois équations fondamentales permet d'achever le problème par une seule quadrature portant sur une fonction réelle. — Rappel de la méthode par laquelle Euler avait établi ce résultat.

On arrive maintenant à l'étude des solutions du système fondamental pour lesquelles la somme $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ est nulle. On ramène leur détermination à celle d'un système linéaire à deux inconnues, un de ceux qu'on peut rattacher à l'équation de Riccati considérée plus haut. Son intégration complète permettra d'obtenir sans quadrature celle du système linéaire à trois inconnues. Si l'on en connaît une solution particulière, on en obtiendra une autre sans intégration, ce qui fournira l'intégrale générale, lorsque p, q, r seront fonctions réelles de t; dans le cas contraire, il faudra une quadrature pour déduire l'intégrale générale de la solution particulière.

CHAPITRE III.

Pages.

Interprétation géométrique des deux méthodes employées dans le Chapitre précédent 42

Étude des coordonnées, dites symétriques, sur la sphère. Forme de l'élément linéaire. Substitutions linéaires effectuées sur ces coordonnées qui reproduisent cet élément et transforment, par conséquent, une figure quelconque en une figure égale ou symétrique. — Formules qui expriment, à l'aide des coordonnées symétriques, la distance de deux points sur la sphère. — Définition de deux rapports anharmoniques attachés à un quadrilatère et explication géométrique de la réduction du problème traité au Chapitre précédent à l'intégration d'une seule équation de Riccati.

Réduction de tout déplacement fini à une même substitution linéaire fractionnaire effectuée sur les deux coordonnées symétriques. On montre, lorsque cette substitution est connue, comment on obtient les paramètres quaternoniens qui définissent le déplacement. — Système de coordonnées symétriques imaginaires conjuguées employé dans la théorie moderne des fonctions.

Étude du cône isotrope ou sphère de rayon nul. Cette sphère doit être considérée comme une surface double et, de plus, la distance de deux quelconques de ses points jouit de la même propriété que celle de deux points sur une droite : elle s'exprime rationnellement. — Généralisation du théorème de Ptolémée.

Roulement du cône isotrope sur lui-même. — Tout déplacement fini s'obtient en soumettant les coordonnées u et v de chaque point à une substitution linéaire de coefficients constants. Relations entre les paramètres quaternoniens du déplacement et les coefficients de cette substitution. — Déplacement infiniment petit. Système de deux équations différentielles linéaires rattaché à ce déplacement et permettant de déterminer le mouvement quand on connaît les expressions des rotations p, q, r en fonction du temps. Ce système est précisément celui que l'on a rencontré au Chapitre précédent. — Indications historiques.

CHAPITRE IV.

Applications de la théorie précédente 56

Extension de la théorie de Poinsot. — Détermination des mouvements dans lesquels il y a deux relations, données à l'avance, entre les rotations. — Détermination des courbes gauches dont la courbure et la torsion satisfont à une relation donnée. — Étude du cas où cette relation est linéaire. — Courbes à torsion constante.

CHAPITRE V.

Des déplacements à plusieurs variables indépendantes 65

Différentes recherches de géométrie exigent la considération de déplacements qui dépendent, non plus d'un seul paramètre, mais de plusieurs paramètres distincts. On commence ici l'étude de ces déplacements, et l'on suppose d'abord que le système mobile, dont la position dépend

Pages.

de n paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_n$, ait un point fixe. Introduction de ce qu'on peut appeler les rotations partielles dans l'étude du déplacement infiniment petit. Équations aux dérivées partielles linéaires qui relient les neuf cosinus aux rotations partielles. Conditions d'intégrabilité auxquelles doivent satisfaire les rotations partielles. Quand ces équations sont vérifiées, il y a un déplacement, et un seul, correspondant aux valeurs données des rotations partielles. La démonstration directe de cette proposition conduit à un théorème important, qui sera utile dans la suite.

Cas général où le système mobile n'a pas de point fixe. Introduction des translations partielles. Relations différentielles entre ces translations. Expression des composantes D_x, D_y, D_z du déplacement infiniment petit d'un point du système mobile. Si les conditions d'intégrabilité auxquelles doivent satisfaire les rotations et les translations sont vérifiées, il y a un déplacement correspondant, et un seul. Méthode par laquelle, sans sortir du trièdre mobile, on démontre cette proposition fondamentale, après avoir retrouvé les conditions d'intégrabilité.

CHAPITRE VI.

Intégration simultanée des systèmes linéaires rencontrés dans la théorie précédente 75

Considérations générales sur le système linéaire fondamental auquel satisfont les trois groupes de cosinus, a, b, c, a', b', c' a'', b'', c''. Il se compose de n groupes de trois équations, le groupe de rang i faisant connaître les dérivées des trois inconnues par rapport à la seule variable t_i. — Si l'on sait intégrer complètement les équations faisant partie de p groupes, la solution du problème pourra se ramener à celle d'un problème *identique* dans lequel le nombre des variables indépendantes sera diminué de p. — Si l'on connaît seulement une solution particulière des équations faisant partie de p groupes, il sera possible, sauf dans un cas exceptionnel, d'obtenir sans quadrature l'intégrale complète de ces équations et, par suite, d'appliquer la proposition précédente. Le cas exceptionnel auquel on vient de faire allusion ne peut se présenter que si les rotations partielles sont imaginaires et si la solution particulière satisfait à l'équation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$; d'ailleurs quand il se psésente, on peut, par de simples quadratures, obtenir la solution complète et générale du problème.

Remplacement des équations linéaires par un groupe d'équations simultanées de Riccati auxquelles doit satisfaire une variable unique. Étude des solutions communes à deux équations simultanées de Riccati. — Cas particulier où la somme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ est nulle. On est ramené à un système linéaire ne contenant que deux fonctions inconnues. Une solution particulière de ce système suffit à donner, par une quadrature unique, la solution générale du problème proposé.

CHAPITRE VII.

Application de la théorie précédente aux déplacements qui dépendent de deux variables indépendantes 88

Les déplacements à deux variables indépendantes jouent un rôle parti-

Pages.

culièrement important dans la théorie des surfaces. Il convient de les étudier complètement. — Application des formules générales. — Étude des mouvements infiniment petits. Notion de la vis due à Ball. Il y a deux déplacements, réels ou imaginaires, qui se réduisent à des rotations. — Théorème de Schönemann et Mannheim, qui permet de généraliser la notion du centre instantané et de construire les normales aux surfaces trajectoires de tous les points.

Étude de tous les déplacements infiniment petits qui peuvent se produire à partir d'une position donnée. Simplification des formules par un choix convenable des axes et des variables indépendantes. Les axes de tous les mouvements hélicoïdaux engendrent un conoïde que Plücker a le premier étudié. Expression du pas des différentes vis. Construction géométrique des formules. Propriétés du conoïde de Plücker : il est la seule surface réglée pour laquelle les projections d'un point de l'espace sur les génératrices rectilignes soient sur une courbe plane. Démonstration de cette proposition découverte par M. P. Appell. — Étude des relations qui existent entre le conoïde de Plücker et le complexe des droites qui sont perpendiculaires à ses génératrices.

Étude spéciale du cas particulier, envisagé par Ribaucour, où deux des déplacements infiniment petits sont des rotations autour d'axes concourants. — Dans ce cas, tous les déplacements se réduisent à des rotations autour d'axes passant par un même point et situés dans le même plan. Le mouvement peut être obtenu par le roulement d'une surface sur une autre surface qui est *applicable* sur la première. — Il y a alors un centre instantané de rotation, et les normales à toutes les surfaces trajectoires passent par un même point.

CHAPITRE VIII.

Premières notions sur les coordonnées curvilignes..... 112

Définition du système le plus général de coordonnées curvilignes. — Méthode de Gauss. — Élément linéaire d'une surface. — Coordonnées orthogonales. — Les surfaces de révolution rapportées à leurs méridiens et à leurs parallèles. — Rappel de la définition et des propriétés élémentaires de deux surfaces remarquables de révolution : la caténoïde et la surface pseudosphérique. — Surfaces de révolution qui partagent avec cette dernière la propriété d'avoir le produit de leurs rayons de courbure constant. — Des surfaces réglées et de leur élément linéaire. — Détermination des trajectoires orthogonales de leurs génératrices. — Élément linéaire des surfaces développables. — Les surfaces développables sont applicables sur le plan, et cela de telle manière que leurs génératrices rectilignes correspondent nécessairement à des droites du plan. — Réciproquement, toute surface applicable sur le plan est une surface développable. — Démonstration directe, donnée par Ossian Bonnet, de cette importante proposition.

CHAPITRE IX.

Surfaces définies par des propriétés cinématiques..... 127

Propriété cinématique commune aux surfaces de révolution, aux

Pages.

cylindres et aux hélicoïdes. — Ces différentes surfaces peuvent être déplacées d'une manière continue sans cesser de coïncider avec elles-mêmes.

Définition des hélicoïdes les plus généraux. — Leur élément linéaire lorsqu'on forme un système de coordonnées curvilignes avec les hélices tracées sur la surface et leurs trajectoires orthogonales. — Théorème de Bour : La forme de l'élément linéaire ainsi obtenu convient à une double infinité d'hélicoïdes parmi lesquels se trouvent des surfaces de révolution, en nombre simplement infini. — Étude des surfaces de révolution qui sont toutes applicables les unes sur les autres. — Si l'on considère les points qui se correspondent sur toutes ces surfaces, le produit des rayons de courbure principaux de la surface est le même en tous ces points; la tangente au méridien, prolongée jusqu'à l'axe, a la même longueur pour toutes les surfaces. — Application à la sphère et à la surface pseudosphérique.

Des surfaces les plus générales qui peuvent être engendrées par le mouvement d'une courbe invariable de forme. — Leur élément linéaire. — Application aux surfaces réglées. — Cas où le mouvement de la courbe invariable se réduit à une translation. — Surfaces de translation, leur étude directe. — Définition due à Lie des surfaces de translation. — Elles peuvent être considérées comme lieux des milieux de toutes les cordes qui joignent un point d'une courbe (C) à un point d'une autre courbe (C'). — Cette nouvelle définition montre bien qu'elles peuvent être engendrées de deux manières différentes par la translation d'une courbe invariable. — Propriété géométrique tout à fait générale des surfaces de translation : Les deux courbes dont la translation peut engendrer la surface déterminent sur cette surface un système de coordonnées curvilignes *conjuguées*, c'est-à-dire un système tel que les tangentes aux deux lignes coordonnées qui se croisent en chaque point de la surface sont conjuguées suivant la définition de Dupin. — Pour établir cette proposition, à laquelle la Géométrie conduirait aisément, on donne un théorème général, sur lequel on aura à revenir, relatif aux systèmes de coordonnées curvilignes qui sont formées de courbes conjuguées. — On revient aux surfaces les plus générales engendrées par le mouvement d'une courbe invariable pour examiner le cas spécial où cette courbe est plane et où les vitesses de tous ses points sont normales au plan qui la contient. — Élément linéaire de la surface. — Cas spécial où le plan de la courbe roule sur un cylindre. — Surfaces moulures cylindriques. — Bour a montré qu'il existe une infinité de telles surfaces applicables les unes sur les autres.

Extension de la méthode cinématique précédente au cas où la courbe qui engendre la surface varie en même temps de forme et de position. — Surfaces engendrées par un cercle. — Détermination des trajectoires orthogonales de tous les cercles de la surface. — Elle se ramène à l'intégration d'une équation de Riccati. — Étude du mouvement d'un système qui se déplace en variant de grandeur, mais en restant semblable à lui-même. — Loi de variation des vitesses de ses différents points. — Surfaces spirales de Maurice Lévy. — Leur élément linéaire. — Extension du théorème de Bour. — Il y a une double infinité de surfaces spirales applicables sur une surface spirale donnée

CHAPITRE X.

Pages.

Sur une classe particulière de surfaces de translation..... 151

On se propose, dans ce Chapitre, de déterminer toutes les surfaces qui peuvent, de deux ou de plusieurs manières, êtres considérées comme des surfaces de translation. Cette question, qui a été posée et résolue par Sophus Lie, a été aussi l'objet des recherches d'Henri Poincaré. On va en donner une solution nouvelle qui n'exige aucune connaissance de la théorie des fonctions abéliennes.

Énoncé précis du problème à résoudre. — A chaque solution du problème convenablement formulé correspondent trois surfaces distinctes, qui peuvent être regardées, de deux ou plusieurs manières, comme des surfaces de translation. — Résultat de la recherche : Les parallèles menées par un point fixe aux tangentes de l'une quelconque des courbes (C_i) dont la translation engendre la surface sont les génératrices d'un cône algébrique du quatrième ordre. — Détermination effective de ces courbes. — Démonstration directe du théorème d'Abel pour le problème particulier étudié. — Cas où le cône du quatrième ordre se décompose. — S'il se décompose en deux cônes du second ordre, l'une des surfaces correspondantes peut être regardée d'une infinité de manières comme une surface de translation. — Équation en coordonnées cartésiennes de cette surface

LIVRE II.

DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE COORDONNÉES CURVILIGNES.

CHAPITRE I.

Des systèmes conjugués..... 163

On commence l'étude des systèmes conjugués par l'énoncé et la démonstration d'une belle proposition de M. G. Kœnigs. Tandis qu'il semble impossible de déterminer des systèmes orthogonaux par des opérations qui ne comportent aucune intégration, il est toujours possible d'obtenir, *sur une surface quelconque*, sans aucune intégration, des systèmes à lignes conjuguées. Il suffit de prendre, comme première famille, les sections planes dont les plans passent par une droite quelconque (D) et, comme deuxième famille, les courbes de contact des cônes qui sont circonscrits à la surface et ont leurs sommets sur la droite (D). — Application de la proposition de M. Kœnigs à la solution d'un problème résolu par Joachimsthal : détermination des surfaces admettant un système de lignes de courbure planes dont les plans passent par une droite fixe. On démontre que les lignes de courbure de l'autre système sont sur des sphères qui coupent à angle droit la surface cherchée et l'on ramène le problème à la détermination des trajectoires orthogonales d'une famille de cercles situés dans un plan et dont les centres sont en ligne droite. — Digression sur les familles les plus générales de cercles dans le plan. La détermination de leurs trajectoires orthogonales dépend d'une équation de Riccati. — Notion

Pages.

des familles similaires de cercles introduite par V. Rouquet. — On peut définir, sans aucun signe de quadrature, la famille de cercles la plus générale et les trajectoires orthogonales de ces cercles. — Retour au problème proposé. Équations qui définissent les surfaces de Joachimsthal.

On met en évidence le caractère projectif et dualistique de la définition des systèmes conjugués. — On peut rattacher à tout système conjugué deux équations linéaires aux dérivées partielles : l'une à laquelle satisfont les quatre coordonnées homogènes d'un point de la surface, l'autre à laquelle satisfont les quatre coordonnées du plan tangent. En dehors de ces deux équations, il n'y en a pas d'autre de même forme à laquelle satisfassent, soit les quatre coordonnées ponctuelles, soit les quatre coordonnées tangentielles.

Application à la détermination de toutes les surfaces pour lesquelles il existe deux familles conjuguées formées exclusivement de courbes planes. — Indication d'un mode de génération de ces surfaces.

Les polaires réciproques de ces surfaces sont celles sur lesquelles il existe deux familles conjuguées formées exclusivement de courbes de contact de cônes ou de cylindres circonscrits. — Étude du cas particulier où l'une des familles est formée des courbes de contact de cylindres circonscrits. — On essaye de déterminer des surfaces de cette catégorie applicables les unes sur les autres. On résout le problème pour les surfaces admettant deux familles de courbes conjuguées planes : les unes situées dans des plans parallèles, les autres dans des plans passant par une droite fixe perpendiculaire aux plans des sections parallèles. — Comme les surfaces du second degré admettent de trois manières différentes cette génération, on peut déterminer trois familles de surfaces applicables sur une surface à centre du second degré.

CHAPITRE II.

Systèmes conjugués. Lignes asymptotiques..... 185

Application d'une des propositions précédentes à la détermination des surfaces à ligne de courbure planes dans les deux systèmes. — Résolution de l'équation aux variables mêlées dont dépend la solution de ce problème. — Cyclide de Dupin. — Il y a trois classes distinctes de surfaces à lignes de courbure planes. — On indique un mode de génération très simple de ces différentes surfaces.

Retour à la théorie générale. — Définition des caractéristiques d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. — Réduction à une forme typique. — Cas où les caractéristiques sont confondues.

Équations linéaires les plus générales auxquelles satisfont, soit les quatre coordonnées ponctuelles, soit les quatre coordonnées tangentielles. Leurs caractéristiques correspondent toujours à un système conjugué. — Cas particulier où l'on obtient le système conjugué formé par les lignes de courbure.

Recherche des lignes asymptotiques. — Leur définition est à la fois projective et dualistique. — Leur équation différentielle, soit en coordonnées ponctuelles, soit en coordonnées tangentielles. — Appli-

Pages.

cation nouvelle de la proposition de M. G. Kœnigs. Elle fournit un moyen de débarrasser du terme rectangle l'équation différentielle des lignes asymptotiques. — Détermination des lignes asymptotiques de quelques surfaces remarquables.

Relations entre la théorie des lignes asymptotiques et celle des équations linéaires aux dérivées partielles.

CHAPITRE III.

Des systèmes orthogonaux et isothermes..... 206

Division de la surface en carrés infiniment petits. Elle ne peut se réaliser qu'avec les systèmes isothermes. — Relations entre les systèmes isothermes et les coordonnées symétriques. — Sur toute surface, il existe une infinité de systèmes orthogonaux et isothermes. La connaissance d'un seul de ces systèmes entraîne celle de tous les autres. — Problème des Cartes géographiques. Sa solution pour toute surface de révolution et, en particulier, pour la sphère. — Projection de Mercator. — Projection stéréographique. — Surfaces du second degré. Leurs lignes de courbure forment un système isotherme pour lequel l'élément linéaire a une forme particulière qui se retrouvera dans la théorie des lignes géodésiques. — Différents moyens de faire la carte d'une portion d'ellipsoïde. — Propriétés générales des systèmes isothermes. — On peut se borner à étudier dans le plan tout ce qui concerne la substitution d'un système isotherme à un autre. — Relations diverses entre les fonctions d'une variable complexe et les systèmes isothermes. — Courbes d'égale partie réelle et d'égale partie imaginaire de la fonction. — Courbes d'égal module et d'égal argument. — Définition de quelques systèmes isothermes employés en Physique mathématique. — Cassiniennes. — Ovales de Descartes. — Détermination de tous les systèmes isothermes comprenant une famille de cercles. Dans ce cas la famille isotherme conjuguée est aussi composée de cercles; et les cercles de chaque famille ont même axe radical. On peut obtenir tous ces systèmes isothermes en appliquant l'inversion, soit au système de coordonnées rectilignes, soit au système de coordonnées polaires.

CHAPITRE IV.

Représentation conforme des surfaces les unes sur les autres..... 230

On applique dans ce Chapitre les propriétés générales des systèmes isothermes à la résolution de différents problèmes relatifs aux Cartes géographiques et aux représentations conformes.

Représentations conformes d'une surface sur elle-même. — Recherche de toutes celles pour lesquelles un système isotherme donné de la surface correspond à un autre système également donné. — Représentations conformes qui conservent un système isotherme donné. — Application aux surfaces de révolution. — Transformation de Lambert qui fait correspondre les parallèles aux parallèles et les méridiens aux méridiens.

Emploi que Gauss a fait du même principe pour représenter d'une manière conforme l'ellipsoïde terrestre sur une sphère, le rapport de

Pages.

similitude demeurant le même en tous les points d'un parallèle. Si l'on voulait appliquer cette méthode à un pays tel que la France, le rapport de similitude ne varierait pas, *dans toute l'étendue de la carte*, de $\frac{1}{400\,000}$ de sa valeur.

CHAPITRE V.

Du système orthogonal formé par les lignes de courbure..... 244

Équation différentielle des lignes de courbure en coordonnées cartésiennes. — Formation de la même équation à l'aide de coordonnées plückériennes de la normale. — Application à la détermination des lignes de courbure des surfaces définies par l'équation $x^m y^n z^p = C$. — Système triple orthogonal dont fait partie cette famille de surfaces. — Détermination des lignes de courbure de la surface lieu des points tels que la somme de leurs distances à deux droites qui se rencontrent à angle droit soit constante. — Formules d'Olinde Rodrigues relatives aux lignes de courbure. — Premières notions sur la méthode de représentation sphérique de Gauss. — Rapports avec la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles. — Les lignes de courbure sont les caractéristiques de celle de ces équations qui, en même temps que x, y, z, admet $x^2 + y^2 + z^2$ comme solution particulière. — L'inversion conserve les lignes de courbure. — Premier exemple d'équations linéaires admettant des solutions particulières liées par une relation quadratique et homogène. — Système triple formé de surfaces cyclides à trois plans de symétrie. — Démonstration du célèbre théorème de Dupin relatif aux systèmes triples orthogonaux. — Cette démonstration se rattache à la considération d'un système de trois équations linéaire aux dérivées partielles auxquelles satisfont les coordonnées cartésiennes x, y, z, équations dont on peut déterminer simplement les coefficients lorsqu'on a calculé l'expression de l'élément linéaire de l'espace dans le système orthogonal employé.

CHAPITRE VI.

Les coordonnées pentasphériques..... 265

Équation d'une sphère mise sous une forme qui permet d'affecter un signe de rayon. — Système de cinq sphères deux à deux orthogonales. — Leur théorie se ramène à celle d'une substitution linéaire orthogonale à cinq variables. — Relations entre les puissances d'un point par rapport à cinq sphères orthogonales. — Coordonnées pentasphériques. — Distance de deux points, élément linéaire de l'espace, relations d'orthogonalité exprimées avec ce système de coordonnées. — Équation linéaire du second ordre à laquelle satisfont les cinq coordonnées pentasphériques. — Ses caractéristiques sont les lignes de courbure. — Système triple orthogonal formé avec les cyclides les plus générales. — De même que les coordonnées homogènes d'un point ou d'un plan ne changent pas quand on soumet la figure à une homographie, de même les coordonnées pentasphériques ne changent pas lorsqu'on effectue une inversion.

Formules principales relatives à la sphère. — Les six coordonnées homo-

Pages.

gènes de la sphère. — La transformation de Lie qui fait correspondre une sphère à une ligne droite. — Deux définitions de cette transformation.

CHAPITRE VII.

Les lignes de courbure en coordonnées tangentielles 285

Cas où la surface est définie par son équation tangentielle. — Application à la surface de quatrième classe, normale à toutes les positions d'une droite invariable dont trois points décrivent trois plans rectangulaires. — Cas où les coordonnées tangentielles sont exprimées en fonction de deux paramètres. — Première solution du problème qui a pour objet la détermination des surfaces admettant une représentation sphérique donnée pour leurs lignes de courbure. — Développements sur un système particulier de coordonnées tangentielles employé par O. Bonnet dans l'étude des surfaces.

CHAPITRE VIII.

Applications diverses 301

La comparaison des résultats donnés précédemment pour les équations différentielles des lignes asymptotiques et des lignes de courbure conduit naturellement à une belle découverte de S. Lie, la transformation de contact dans laquelle les lignes de courbure d'une surface correspondent aux lignes asymptotiques de sa transformée. — Emploi du système de coordonnées tangentielles précédent pour définir une autre transformation découverte en 1870 par Ribaucour et dans laquelle, comme dans l'inversion, les lignes de courbure sont transformées. — Cette transformation a été nommée par Laguerre *transformation par directions réciproques*. — On donne sa construction géométrique et ses principales propriétés. — Parmi celles que l'on indique, il faut signaler la suivante : Les deux surfaces qui se correspondent peuvent être considérées comme les deux nappes de l'enveloppe d'une famille de sphères qui coupent un plan fixe sous un angle constant. — Les points homologues des deux surfaces sont sur un cercle qui coupe à angle droit le plan fixe; le rapport anharmonique de ces deux points et de ceux où le cercle coupe le plan fixe est un nombre constant. — Comme toutes les transformations de contact qui conservent les lignes de courbure, la transformation par directions réciproques résulte d'un certain nombre d'inversions et de dilatations.

Formules relatives à l'inversion dans le système de coordonnées tangentielles (α, β, ξ).

LIVRE III.

LES SURFACES MINIMA.

CHAPITRE I.

Résumé historique 319

L'équation aux dérivées partielles de Lagrange. — Mémoire de Meusnier

Pages.

sur la courbe des surfaces. — Premières recherches de Monge. — Méthode rigoureuse de Legendre. — Détermination de quelques surfaces minima nouvelles par Scherk. — La surface minima réglée, le théorème de Catalan. — Recherches générales sur la théorie, par O. Bonnet, Catalan et Björling.

CHAPITRE II.

Les surfaces minima en coordonnées ponctuelles..... 332

Première condition à laquelle doit satisfaire la surface minima passant par un contour donné. — Pour que l'aire de cette surface soit plus petite que celle de toutes les autres surfaces infiniment voisines limitées au même contour, il faut que la somme des rayons de courbure soit égale à zéro. — On peut interpréter géométriquement cette propriété de la manière suivante : les deux familles de lignes de longueur nulle tracées sur la surface doivent former un réseau conjugué. — On déduit aisément de là que les surfaces minima sont des surfaces de translation, engendrées de deux manières différentes par la translation d'une ligne de longueur nulle. — Formules de Monge et de Legendre débarrassées de tout signe d'intégration. — Formules plus simples et plus élégantes d'Enneper et de Weierstrass. — Détermination de toutes les surfaces minima algébriques. — Détermination de toutes les surfaces minima réelles. — Relation établie par Weierstrass entre les surfaces minima et les fonctions d'une variable complexe. — A toute fonction de la variable complexe on peut faire correspondre une surface minima. Au contraire, à toute surface minima correspondent deux fonctions de la variable complexe, qui sont différentes en général.

CHAPITRE III.

Les surfaces minima en coordonnées tangentielles..... 347

Formules relatives au plan tangent et à la normale. — Nouvelle méthode d'intégration de l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima; on emploie le système de coordonnées tangentielles étudié au n° 165. — Équation finie qui représente la surface minima la plus générale quand on adopte un système quelconque de coordonnées tangentielles. — Quand la surface minima est donnée *a priori*, on indique comment on obtiendra les expressions des fonctions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$, $f(u)$, $f_1(u_1)$ qui caractérisent cette surface. — Application à l'hélicoïde gauche à plan directeur.

Détermination des lignes de courbure et des lignes asymptotiques des surfaces minima. Théorème de Michael Roberts. Cette détermination se fait par des quadratures, qui sont les mêmes pour les deux séries de lignes. — Les formules relatives aux coordonnées tangentielles permettent de résoudre une question importante et d'indiquer les transformations que subissent les fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$, $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ quand on déplace la surface ou, ce qui revient au même, lorsqu'on effectue un changement de coordonnées. — Application des résultats obtenus à la détermination de toutes les surfaces minima qui sont des hélicoïdes, des surfaces de révolution ou des surfaces spirales.

Pages.

Détermination de toutes les surfaces minima qui peuvent, de plusieurs manières, et par conséquent ici d'une infinité de manières, être considérées comme des surfaces de translation.

CHAPITRE IV.

Représentations conformes des surfaces minima 365

Élément linéaire de la surface minima et de sa représentation sphérique. — La représentation sphérique réalise un tracé géographique de la surface minima sur la sphère. — Cette propriété est caractéristique, et, si l'on fait abstraction de la sphère, pour laquelle elle est évidente, elle appartient aux seules surfaces minima. — En laissant de côté encore la sphère, les surfaces minima sont les seules pour lesquelles un système orthogonal, tracé sur la surface et différent de celui qui est formé par les lignes de courbure, ait pour représentation sphérique un système orthogonal. — Problème de Minding; extension à une surface quelconque de la définition des méridiens et des parallèles. Les méridiens sont les courbes pour lesquelles la normale est parallèle à un plan vertical; les parallèles sont les courbes pour lesquelles la normale fait un angle constant avec la verticale. — Recherche des surfaces pour lesquelles les méridiens et les parallèles forment un système orthogonal. Ce sont, ou bien des surfaces moulures, ou bien des surfaces minima.

Représentations conformes obtenues par Riemann de la surface minima sur le plan. Elles font correspondre aux lignes de courbure de la surface deux systèmes de droites rectangulaires dans le plan. — Dans le tracé géographique sur la sphère, les lignes de courbure qui forment sur la surface un système isotherme admettent nécessairement pour représentation sphérique un système isotherme. — Théorème de Bour. — Recherche des surfaces minima à lignes de courbure planes. — Si l'une des familles est composée de courbes planes, il en est de même de l'autre. — Surface transcendante d'Ossian Bonnet. — Surface algébrique d'Enneper. Sa construction et ses propriétés principales.

Autres représentations conformes sur le plan indiquées par Riemann et dans lesquelles une famille de sections de la surface par des plans parallèles est représentée par une famille de droites parallèles.

CHAPITRE V.

La surface adjointe d'O. Bonnet 379

Définition des surfaces minima associées à une surface donnée. — La surface adjointe d'O. Bonnet. — Quand on connaît une surface minima on peut obtenir la surface adjointe par des différentiations et des éliminations, sans aucun signe de quadrature; mais il importe de connaître des formules de M. Schwarz qui exigent, au contraire, l'emploi de deux quadratures.

Si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre et si les plans tangents aux points correspondants sont parallèles, elles sont nécessairement des surfaces minima associées. — Examen d'un problème posé par Mathet : Deux surfaces peuvent-elles se correspondre point par point

Pages.

avec similitude des événements infiniment petits, les éléments correspondants faisant un angle constant.

Propriétés relatives aux lignes de courbure et aux lignes asymptotiques des surfaces associées. — Détermination de toutes les surfaces minima applicables sur une surface minima donnée, sur une surface de révolution, ou sur une surface spirale.

CHAPITRE VI.

Les formules de Monge et leur interprétation géométrique..... 397

Recherches de Lie. — Génération de toute surface minima par la translation de deux courbes minima. — Étude de ce mode de génération, détermination nouvelle des surfaces algébriques et des surfaces réelles. — Surfaces minima doubles. — Détermination des surfaces doubles réelles. — Courbes minima qui sont identiques à leurs conjuguées. — Les surfaces minima dans le premier système de coordonnées tangentielles étudié au Livre II, Chap. VII. — Propriété géométrique qui distingue les surfaces doubles des surfaces simples. — Surfaces découvertes par Möbius et dans lesquelles on peut passer d'une face à l'autre par un chemin continu.

CHAPITRE VII.

Les surfaces minima algébriques..... 422

Détermination de la classe et de l'ordre de la surface minima algébrique engendrée par la translation de deux courbes minima données. — Application au cas particulier où la fonction $f(u)$ est rationnelle. — Détermination de la surface minima réelle, simple ou double, de la classe la moins élevée. — Points à l'infini des surfaces minima. — La section de la surface par le plan de l'infini se compose exclusivement de droites simples ou multiples. — Points multiples à distance finie. — Surfaces minima à point conique.

CHAPITRE VIII.

Les formules de M. Schwarz..... 446

Détermination de la surface minima tangente à une développable donnée suivant une courbe donnée. — Application à ce problème des résultats généraux que la théorie des équations aux dérivées partielles doit à Cauchy. — Formules de M. Schwarz. — Leur démonstration par Lie. — Surface minima passant par une droite réelle; la droite est toujours un axe de symétrie de la surface. — Surface minima réglée, détermination nouvelle de cette surface. — Surface minima passant par une courbe plane. — Cas où cette courbe doit être une ligne de courbure ou une ligne géodésique. — Théorème d'Henneberg et de Lie. — — Surface minima admettant une conique pour ligne géodésique.

Application de la méthode de M. Schwarz à la détermination de la surface, découverte par Riemann, qui est engendrée par un cercle dont le plan se meut parallèlement à un plan fixe.

CHAPITRE IX.

Pages.

Surfaces minima algébriques inscrites dans une développable algébrique. 465

Cas où la développable est un cylindre. — Le problème n'est possible que si la section droite est rectifiable. — Solution analytique du problème proposé. — Première solution géométrique. — Construction générale des surfaces minima algébriques inscrites dans une développable algébrique. — Théorèmes relatifs à des cas particuliers donnés par M. Lie. — Deuxième solution géométrique. — Génération nouvelle des surfaces minima due à Ribaucour. — Définition et principale propriété des *congruences isotropes*. — Le problème se ramène à la détermination d'une surface réglée dont la ligne de striction doit satisfaire à une condition donnée.

CHAPITRE X.

Le problème de Plateau. Détermination de la surface minima passant par un contour donné composé de lignes droites, ou de plans que la surface doit couper normalement..... 490

Historique. — Indication des travaux de Riemann, de Weierstrass et de M. Schwarz. — Exposition générale de la méthode à suivre dans le cas où il n'y a pas de point de ramification. — Surface minima passant par deux droites, — coupant à angle droit deux plans donnés et contenant une droite donnée, — passant par trois droites, dont l'une coupe les deux autres, — passant par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche quelconque. — Introduction des points de ramification. — Propriétés géométriques relatives à ces points. — Solution générale du problème proposé.

CHAPITRE XI.

Représentation conforme des aires planes..... 500

Énoncé du problème à résoudre : faire la représentation conforme d'une aire plane à connexion simple sur une autre aire donnée de même connexion. On peut ramener ce problème au suivant : effectuer la représentation conforme d'une aire donnée (A) sur l'aire d'un cercle de rayon donné, choisi une fois pour toutes. On rappelle les résultats acquis sur ce sujet par les très nombreuses recherches que, depuis Riemann, les géomètres ont consacrées à cette étude, aussi importante pour l'Analyse que pour la Physique mathématique. — Le problème est ramené à la recherche d'une fonction de la variable complexe qui satisfait à des conditions bien déterminées dans l'intérieur de l'aire (A). Application à la portion de l'aire du plan qui se trouve au-dessus de l'axe des x. — Principe posé par M. Schwarz pour résoudre les problèmes de représentation conforme auxquels on a été conduit dans le Chapitre précédent. — Application de ce principe aux aires limitées par des droites. — Cas particulier du triangle et du rectangle. — Des aires limitées par des arcs de cercle. On est conduit à intégrer une équation linéaire dont les coefficients sont connus. — Cas particulier du triangle formé par trois arcs de cercle. — Projection stéréographique du triangle formé par trois arcs de grand cercle de la sphère.

Représentation conforme, due à M. Schwarz, d'une aire elliptique sur une aire circulaire.

CHAPITRE XII.

Pages.

Le problème de Plateau. Applications 527

Surface minima limitée par deux droites quelconques. — Surface minima limitée par deux droites qui se coupent et par un plan, qui rencontre les deux droites, et que la surface doit couper à angle droit. — Surface minima limitée par trois droites, dont l'une rencontre les deux autres. — Surface minima limitée par les côtés d'un quadrilatère gauche. Équation linéaire du second ordre dont dépend la solution du problème; formes diverses que l'on peut donner à cette équation. — Cas particulier où le quadrilatère a un plan de symétrie. — Après ces applications particulières, on discute les cas les plus généraux et l'on montre qu'il est nécessaire d'élargir les hypothèses faites sur les deux représentations conformes de la surface en admettant l'existence de *points de ramification*.

CHAPITRE XIII.

Les Formules de Weierstrass 547

Forme nouvelle, due à Weierstrass, sous laquelle on peut mettre les équations qui définissent une surface minima. — Formules relatives à une transformation de coordonnées ou à un déplacement de la surface. — Équation linéaire du second ordre à laquelle satisfont les deux fonctions G et H. — Définition d'une *famille* de surface minima. — Application à la détermination de la surface minima passant par un contour donné. — Formation de l'équation linéaire correspondant à cette surface. — Indication des questions qui resteront à résoudre après la formation de cette équation. — Propriétés géométriques de la famille des surfaces minima définie par cette équation.

CHAPITRE XIV.

Applications diverses 573

Méthode inverse dans laquelle on prend comme point de départ certaines équations différentielles linéaires dont on connaît l'intégrale générale. — Surfaces que l'on peut déduire de l'équation à laquelle satisfait la série hypergéométrique de Gauss. — Surfaces déduites de la forme $A\prod(t-a)^{\alpha}$ adoptée pour $G(t)$ et $H(t)$. — Surface minima limitée par une ligne brisée plane et une droite parallèle au plan de la ligne brisée. — Problème de Gergonne. — Surface déduite de la forme $A\prod\Theta^{\alpha}(t-a)\prod H^{\beta}(t-b)$ adoptée pour les fonctions fondamentales, Θ et H désignant ici les fonctions de Jacobi. — Surface minima limitée par deux polynomes fermés situés dans des plans parallèles. — Remarque générale sur les moyens de multiplier le nombre des solutions du problème. — Surface passant par trois droites situées d'une manière quelconque dans l'espace.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
114190 Quai des Grands-Augustins, 55.

134182

RETURN TO Astronomy/Mathematics/Statistics/Computer Science Library
100 Evans Hall 1684 642-3381

LOAN PERIOD 1	2	3
[redacted]	1 MONTH	
4	5	6

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS

DUE AS STAMPED BELOW

FEB 14 1987	Rec'd UCB A/M/S	
Due end of FALL semester Subject to recall after —	JUL 15 2002	
NOV 5 1987	JAN 3 2005	
Subject to recall		
DEC 09 1994		
Rec'd UCB A/M/S		
NOV 30 1998		
JUL 08 2002		

FORM NO. DD3, 1/83

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720

U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037411931

QA641
D3
1914
V.1

MATH/STAT.

193